高等学校教学参考用书

高等数学教程

〔苏〕L·S 邦德列雅金著

职大教学编辑部

高等学校教学参考用书

高　等　数　学　教　程

谢龙森　吴健敏　连永康
彭延铭　冯剑卿　孙月光
编译

职大教学编辑部

(原作者)Lev Semenovič Pontrjagin

(L・S邦德列雅金)苏联科学院院士，莫斯科斯坦克洛夫数学学院教授。

(英译者)Edwin Hewitt

(E海威脱)美国华盛顿大学数学教授。

俄文版原著于莫斯科苏联科学院出版社1977、1980年。

本书为苏维埃数学丛书中的一部分

顾问：L、D、法捷耶夫(列宁格勒)，
R、V冈克来列奇(莫斯科)。

英译本1984年出版于西德

编 译 者 的 话

原著于1977、1980年于莫斯科出版，1984年后相继译成他国文字印行于柏林、汉堡、纽约、东京等地。与国内传统的教学模式作比较，体现到本书具有颇多独到之处。兹扼要指出其中几处：

1．叙述逻辑性论证替代于解析性论证以导出公式或结论。

2．扩展到复数范畴合并阐述、讨论及运算，一气呵成。

3．适当穿插鲜为人知的有关数学史话以表明作者的论点，生动诱人，发人深思。

4．直观形象，观点拔高，视野宽广。

5．有独特的系统布局与安排。

我们深切感到正如海威脱教授所述那样，本书读后越读越得裨益。

为了能引进近年来的国外学术，以此或作一借鉴使国内教学深化改革，对旧框框有所突破起到一定的作用，特此译出，聊供广大的高等数学教师、学生和数学工作者的参考。

本书英译本译者前言，第一部份引言，第一章及第二章由谢龙森编译；第三章由孙月光编译（绘制全书插图）；第二部份引言及第四章由吴健敏编译；第五章由彭延铭编译；第六章由冯剑卿编译；第七章由连永康编译。在编译过程中得到黄午阳副教授和市九三学社静安区委的关心和支助，谨深表谢意！

由于经验缺乏，水平有限及时间上的仓促，难免有失误处，恳请广大读者提出宝贵意见！

编译者　　1987年6月于上海

目　录

英译本译者前言

L·S邦德列雅金(1908)是廿世纪数学家中杰出人物之一。在一段漫长的生涯里，他对数学的许多分支在理论和应用的两个方面都作出了重要的贡献。他获得了政府所能颁赐的每一项荣誉。他还主动地在莫斯科大学担任数学教学多年。1975年他致力于撰写中学和大学初期的数学丛书。用他自己的话来说：“我希望象一位科学工作者和一位教师一样，使用积累多年的经验，又以一种能为我——假定是一个年轻的孩子——所易于接受的方法来阐明高等数学基础知识”。本书是邦德列雅金教授所计划的论题的四卷中前二卷的译本。

此书由现代数学的开端即平面与三维空间的解析几何出发，紧接着是关于极限和实数性质的精确描述。书中有许多具体例子，这也可用来代替书中所未提供的正式练习。该书继续审慎地陈述了微积分、极限、初等函数的幂级数展开。最后的几节论述了复变量的解析函数。末了以关于本性奇点近旁的解析函数性态的著名定理的证明作为结尾。

本书自始至终都打上了这样的印记：它突出地反映了邦德列雅金教授的全部科学著作中严谨的思维和对“透彻”两字的不懈的追求。

本书不能说是“易读”，因为数学就其本身性质而言是困难的，但对坚持学习的读者来说，必定在知识与满足这两者中都会得到丰硕的收获。

玛利·基勒为本书制作了原版本上的插图，提供了大力的支持，译者在此谨表谢意。

爱吐温·海威脱　于华盛顿西雅图1983·6

第一部分 引言

在现代，任何领域里的科学家们都熟知平面的笛卡儿直角坐标。这是由于这样的坐标能给出一个变量怎样随另一个变量变化的一直观的几何图象表示法。于是一位医生可以画出病人患病期间体温的变化图，一位经济学家可以画出工业产品的产量增长图，例子很多。笛卡儿坐标的命名可能带来了一个错误的印象，似乎它是由笛卡儿本人所发明。事实上是，直角坐标的使用早已在公元初就开始。笛卡儿在一个十分重要的方面完善了直角坐标，即他采用了符号选择的法则(见后)。而最重要的是，他引进了解析几何，从而把几何与代数结合起来。我们另外要指出的是与笛卡儿同时发现坐标的还有一位以“大定理”而闻名于世的法国数学家费尔马，此“大定理”至今尚未被人证出。在笛卡儿和费尔马生活的17世纪年代里，数学的发展已经为解析几何的发现，即代数与几何的结合提供了土壤。最后由笛卡儿和费尔马一举成功。奇怪的是，几乎人人只知道笛卡儿。这显然是所有或者几乎所有伟大的科学发现的命运。经过多少世纪的准备酝酿，而某个科学家完成了它的最后一步，然而就把全部的发现都归到他名下。为用解析几何的事例来表明我的论点，下面，我对直至17世纪的数学发展将作出简短和极不完整的概述。

为了建立坐标系，在平面内我们作出两条直线，称作坐标轴。其中一条水平的叫做横轴，另一条竖直的叫做纵轴，两轴的交点O称做坐标原点或简称原点。设r为平面内任意一点。由r作垂线rp至横轴，并作垂线rq至纵轴。由此构造，点r可与两个非负数：线段op和oq的长联系在一起了。又设r′为r关于

纵轴的对称点。显然与r和r'相联系的两个数是相等的。与r关于横轴的对称点也有同样的结论。这种观察说明了笛卡儿的符号选择法则。如果点r位于纵轴之右，则op的数取正号。如果r位于纵轴之左，则op取负号。当r位于横轴的上边或下边，则用类似的方法指定为正或负号。带有正号或负号的数op常用x表示，带有正号或负号的数oq常用y表示。数x及y称作点r的笛卡儿坐标。如果变量x和y存在着某种关系，例如某个代数方程，则所有坐标满足该方程的点的集合必构成在此平面内的一直线或曲线。特别是如果y取决于x，则便可采用此法作图。

上述结构与笛卡儿(1596—1650)的名字牢固地联系在一起。然而，在他的时代之前很久，数学家们曾经以这样或那样不完善的形式使用过坐标系。古代的亚历山大数学家阿波罗尼奥司(公元前3或2世纪)使用过相当于直角坐标的工具。他用它来定义抛物线、双曲线和椭圆加以详尽的研究，并为人们所熟知。阿波罗尼奥司找到了这些曲线的方程：

$$y^2 = px \qquad (\text{抛物线})；$$

$$y^2 = px + \frac{p}{a}x^2 \qquad (\text{双曲线})；$$

$$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2 \qquad (\text{椭圆})。$$

其中p和a为正的常数。

阿波罗尼奥司当然没有写出上面的代数方程，因为当时代数符号还未为人们所知，他用几何概念来代替方程的：y^2是边长为y的正方形面积；px是以边长为p及x的矩形面积；如此等等。曲线的名称与方程相联系。在希腊，抛物线意味着等量：正方形y^2的面积等于矩形px的面积。椭圆则意味着不足：正方形y^2的面积小于矩形px的面积。而双曲线意味着过量：正

方形y^2的面积大于矩形px的面积。

法国数学家尼古拉·奥来姆(公元1323—1382)曾用直角坐标作出表示变量y依赖于变量x的图象。他没有使用如今通常采用的横坐标与纵坐标这两个术语，而分别用含义为经线及纬线的拉丁字母来代替。然而奥来姆的这种思想流传不广，因为在他的那个时代里，函数依从性的观念(即变量y如何依赖于变量x)还是十分迷茫的。

可见笛卡儿坐标并非为笛卡儿所发现。尽管如此，将它们印上他的名字，并非很不公正，因为他作出了数学上最重大的成就之一。他的关于解析几何发现把几千年来缓慢而辛勤积累的许多数学发现聚集于一个焦点上。他的著作“几何学”出版于1637年，概括了平面解析几何的基本思想。人们应当注意到另一个法国数学家费尔马(1601—1655)在同一个时代也具有同样的思想观点。然而，至1679年，费尔马的著作一直未见出版。于1637，费氏思想曾只是以当时惯用的书面通讯方式在同时代人中间进行交流。

解析几何的首要意义是几何、代数间取得紧密的联系，在笛卡儿时代，数学的这两个分支已经达到高度完备的境地。然而它们上千年来的发展曾相互独立地进展着，而彼此间存在联系的察觉仅处在萌芽状态。在公元前不久，几何学获得了令人瞩目的成就。象抛物线、双曲线和椭圆类的复杂图象已有了详细的分析。特别是，发现此三条曲线系由圆锥面与平面相交所获得，这就说明了这些曲线统称为圆锥曲线的由来。代数的进展则较几何缓慢。代数的最早踪迹在公元前1700年的埃及作家阿姆司的纸莎草纸上发现，用今天的话来说，阿姆司给出了一元一次方程的解，他用特殊的象形文字表示未知量、加法、减法

和等量关系。代数上，杰出的进展是在公元后9—15世纪由阿拉伯人所作出，他们解出了线性的方程和二次方程。令人注目的是不用符号而用口头上的描述。现代的符号“+”和“—”出现在公元后15世纪末的意大利。未知量与已知量以字母表示则出现在法国数学家弗朗西司哥·维也脱的著作中，他生活于1540—1603年，然后在笛卡儿时现代代数符号才占有了一定的地位。

解析几何在数的概念的发展上起了重大的作用。尽管负数在6—11世纪为印度数学家所知，而欧洲数学家却长期以负数是荒谬为理由拒绝予以承认，甚至维也脱也不用它们。只有靠笛卡儿的解析几何负数才在数学中获得稳定的地位（对坐标指定符号的规则前已提及）。

虽然对复数的认识在笛卡儿之后很久才取得地位，然而笛卡儿坐标对认识复数确实存在作出了贡献。首先想到没有实根的二次方程没有根。仅当16世纪时，由求解三次方程的卡特诺公式，复数才获得了某种承认。这是因为当人们去解含有三个实根的三次方程时，在计算的中间阶段出现了复数。在这以后迄至高斯(1777—1835)时代，对复数的认识还是非常少。直至19世纪初，高斯用笛卡儿坐标给出了复数的几何解释并证得了代数的基本原理：n次多项式具有n个根。而在今日，复数及复变量的函数已在数学的理论与应用中占据着中心的位置。

第一部分　坐标法

第一章　平面坐标

在本章里，将介绍平面的直角坐标(笛卡儿)和极坐标。并用平面上的点来表示复数。

§1　平面内的笛卡儿直角坐标和向量

设P为可向任意方向伸展的一个几何平面。在P内作出相互垂直的二直线。令O为此二直线的交点。为了确定起见，设平面P如图1所示，并设其中一条直线的方向为水平，另一条为竖直。水平直线称作横轴，竖垂直线称作纵轴。二者统称坐标轴，而点O叫做坐标原点或简称原点。所选定的二轴把平面分成四部分，各部分均称作象限。给象限如下编号：第一象限位于横轴之上和纵轴之右。第二象限位于横轴之上及纵轴之左。第三象限位于横轴之下纵轴之左。第四象限位于横轴之下和纵轴之右(见图1)，也就是我们按逆时针方向为各象限编号。(设想一个钟面，中心在O，横轴指向O以右三点钟。)

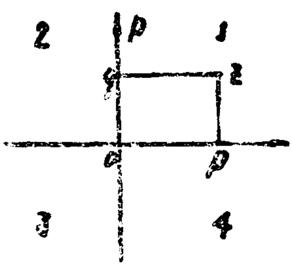

图1

现z为位于平面P内任意处的任意点。与z关联的两个数x和y分别称作为z的横坐标和纵坐标。为定义x和y，自z向横轴和纵轴各作垂直线段zp和zq。如果点p位于原点O之右，那末定义x为线段op的长它是一个正数。如果点p处于O之左，那末定义x为线段op的长度的负值，它当然是负数。如果点p

与O重合（即如z位于纵轴上），则取x的值为0。用同样方法确定数y，若q位于点O的上方，则定义y为线段oq的长，它是一个正数。若q位于点O下方，定义y为oq长度的负值。如果q与O重合，则取y＝0。于是一旦选定了坐标轴，我们就确定了平面上每一点的横坐标x和纵坐标y。写出其关系式如：

$$z=(x,\ y) \tag{1}$$

数x和y统称为点z的坐标。

原点O具有坐标（0，0）。在横轴上的点z其纵坐标为0，故可记作

$$z=(x,\ 0)=(x)$$

位于横轴上的z的位置仅由数x来确定，所以人们自然取x作为横轴上的z的坐标。以同法，在纵轴上的点z可写成形如

$$z=(0,\ y)=(y)$$

从而，很自然地取y为纵轴上点z的坐标。

图1中，点O、p、z和q是一个矩形的顶点。边op的长等于边qz的长，而边oq的长等于边pz。于是点z的横坐标不仅是线段op的长，而且等于线段qz的长，并带有相应的±号。类似地，z的纵坐标是线段pz的长且带有相应的±号。

下面来考虑任意的一对数x和y。容易找到平面上唯一的一个点z，其横坐标为x纵坐标为y。这可参照图2来进行。先在横轴上找到一个坐标为x的点p。也即在横轴上截取线段op使其长等于|x|（数x的模或绝对值）。如x为正，则点p位于O之右，如x为负，则位于O之左。

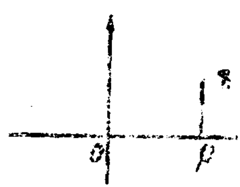

图2

作垂线pz垂直于横轴，使其长为$|y|$。如果y为正，则点z在横轴上方，如y为负，则点z在横轴下方。此垂线的端点z即具有坐标x和y的点z。这样公式(1)对点z成立，于是(1)建立了平面P内的点与数对(x, y)之间的一一对应关系。

设点z沿着横轴自左向右移动，则其横坐标递增。因此我们说横轴的方向是从左到右。我们在横轴上画一向右指的箭头来表示(再见图2)，在相同观念下，纵轴的方向指定为从下到上。横轴上O以右的一切点皆具有正横标，于是我们说它们组成了**横轴的正半轴**。类似地，在横轴上O以左的一切点组成了**横轴的负半轴**。至于正负的纵半轴亦以类似方法命名。

第一个问题是如何用坐标法计算线段的长。这等于用两个点的坐标去求取该两点间的距离。

设 $$z_1=(x_1, y_1)和z_2=(x_2, y_2) \qquad (2)$$
是平面内任意两点。令$l(z_1, z_2)$表示z_1和z_2间的距离，则有公式

$$l(z_1, z_2)=+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (3)$$

我们参照图3来证明公式(3)。过z_1与z_2各作水平和竖直线，它们交于r。点z_1、r、z_2为直角三角形的顶点，且直角边为z_1r与rz_2，斜边为z_1z_2。

显而易见线段z_1r的长等于$|x_2-x_1|$而线段z_2r的长等于$|y_2-y_1|$。将毕达哥拉斯定理用于直角三角形z_1rz_2便得公式(3)。

现在转而去考虑向量是适宜的。用向量写出许多公式比用坐标容易得多。

英译本注1 对于平方根的符号作出如下约定："+"号表示正平方根，"−"号表示负平方根。若平方根号前两者都未表出，则认为正负方根可任取其一。

读者可看图4。如图所示的a和b为平面内任意两点。考虑起自a点而止于b点的线段ab，我们把此有向线段称作为**向量**ab。点a称作**起点**，b称作**终点**。也可以说向量ab**附着于点**a。设c和d为平面P上的另外一对点，如果线段ab与cd为：1)等长；2)平行；3)同向，则我们称向量ab**等于向量**cd。当ab和cd不在同一直线上，我们能以简单几何形式来重述条件。除ab和cd外，作线段ac和bd（见图4）。条件1)－3)等价于一个要求，即acdb是一个平行四边形。

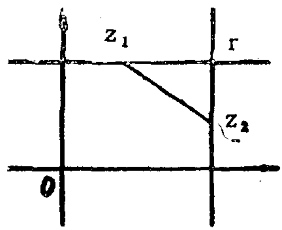

图3

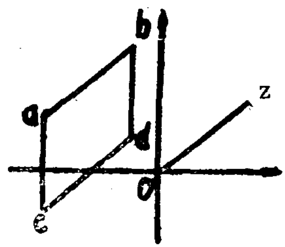

图4

显然，对任一向量ab，总存在着一个起点在原点O且等于ab的向量，我们用z表示它的终点，于是ab和oz为等向量。我们约定把向量oz用一个字母z记写。这表明了平面上的点与始点为O的向量间的一一对应：我们用向量oz把它与它的终点z联系在一起。往后，我们用同样记号记写点和向量就不会发生什么混乱了。

现定义二向量的和。设z_1和z_2为平面P内的二个向量。记住z_1和z_2均是以点O为起点的二个向量的终点，参见图5。现作向量z_1z_3，按照z_1z_3等同于向量z_2的要求确定z_3，定义向量oz_3

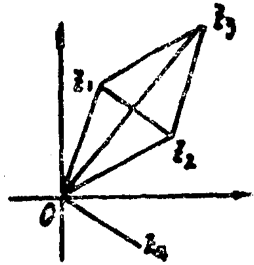

图5

（或按照我们的习惯简记为z_3）为向量z_1和z_2的和。

$$z_3=z_1+z_2$$

在结构中，z_1和z_2起了不同的作用，因为我们必须证明

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

为此作向量$\overrightarrow{z_2z_3}$。由于向量$\overrightarrow{oz_2}$和$\overrightarrow{z_1z_3}$相等，故$oz_1z_3z_2$为平行四边形，因而向量$\overrightarrow{oz_1}$和$\overrightarrow{z_2z_3}$相等。由定义，z_3是z_2与z_1的和。这便是说，两个向量的和与相加次序的先后无关。

向量z_1和z_2的差z_2-z_1（再见图5），把它规定为向量$\overrightarrow{z_1z_2}$记为z_4，这意味着向量$\overrightarrow{oz_4}$等于向量$\overrightarrow{z_1z_2}$。从和的定义获得

$$z_1+z_4=z_2$$

亦即，差z_2-z_1又可定义为：

$$(z_2-z_1)+z_1=z_2 \qquad (4)$$

公式（4）表明两向量差的定义是正确的。回顾定义z_2-z_1时，取z_1为起点z_2为终点。

恰有一个长度为0的向量：它的起终点合一，可取为O。我们用字母O表该向量。向量O对所有向量z具有以下性质

$$z+o=z$$

定为向量z的线段的长度叫做向量的模，记作$|z|=l(O, z)$；见图4所示。

有如下的重要不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_2|+|z_1| \qquad (5)$$

公式（5）从观察图5中的三角形oz_1z_3而得出。边oz_1的长是$|z_1|$，边z_1z_3的长是$|z_2|$，而边oz_3之长是$|z_1+z_2|$。公式（5）不过重述了这样的事实：三角形任一边的长小于或等于另两边长之和。除加、减运算之外，向量还具有第三类运算，即一向量乘以一个数。设α为一个数而z为一向量。下面将定义

乘积

$$z' = \alpha z \tag{6}$$

如图6，过O和z作直线L。设α为正数。在直线L上oz同一侧截取一条长为$\alpha|z|$的线段oz'，向量z'和线段oz'的终点都是z'。又设α为负数，这时，我们在直线L上oz的另一侧

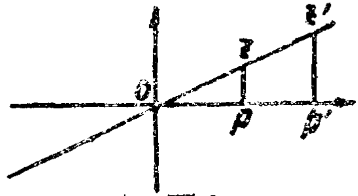

图6

截取一条长为$|\alpha|\cdot|z|$的线段oz'。如果α或z两者中有一个为0则规定向量αz为0。

向量$z'=\alpha z$必然在L上。同样明显的是：在L上的每个向量z'都具有(6)的形式(仅当$z\neq 0$时有意义)。数α从如下方法获得，如果z'和z都位于直线L上O的同侧，则α为正且规定为$\alpha=\frac{|z'|}{|z|}$。如果z'和z处在L上O点的异侧，则α为负且规定为$\alpha=-\frac{|z'|}{|z|}$。因此我们已经证得当α取所有可能的数值时，形为(6)式($z\neq 0$)的点填满整个直线L。

现在我们来定义向量的坐标。由于z既表示点又表示向量，这自然联想到点z的坐标也就是向量z的坐标。所以可记写$z=(x, y)$，其中z为一向量，且x，y为其坐标，也就是说它们也是点z的坐标。

应用坐标就能够以代数形式写出向量的运算。当然我们已经纯几何地定义了这些运算。除向量z外，另以坐标形式写出两个向量：$z=(x_1, y_1)$， $z_2=(x_2, y_2)$