$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=?$$

数学分析习题题解

（第二分册）

合肥工业大学数学教研室编印

SHUXUE FENXI XITI TIJIE

说　　明

为了适应我校教学的需要，帮助青年教师业务进修和搞好教学工作，我们于七八年初开始，组织室内部分教师编写了这本《数学分析习题集》（吉米多维奇著1956年第三版）题解，供我校师生学习和教学参考。并替部分兄弟院校的代为加印。本题解由参加编写工作的同志按章节分工编、审完成的。何天晓同志提供了大部分题解的初稿。由于篇幅较大，全书共分三册，从今年开始陆续在校内发行。

由于我们水平有限，人力也不足，加之时间仓促，因此一定存在不少缺点和错误。另外，有许多题目所选用的解法也不够理想，希望我校师生在使用过程中不断提出修改意见，并殷切希望兄弟院校的同志给于帮助和指导。

在本题解的排印过程中，承安徽省肥西县印刷厂热情帮助和大力支援，安徽省教育厅教材编审室薛凌、张巧英两同志帮助绘图和整图，使本书得以顺利付印，特在此表示感谢。

合肥工业大学数学教研室

1980年10月

目　　录

第三章　不定积分

第四章　定积分

第五章　级　　数

第三章　不定积分

3.1　最简单的不定积分

1628. $\int(3-x^2)^3dx$。　**解**　原式 $=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$。

1629. $\int x^2(5-x)^4dx$。

解　原式 $=\int\left[(5-x)^2-10(5-x)+25\right](5-x)^4dx$

$=\int\left[(5-x)^6-10(5-x)^5+25(5-x)^4\right]dx$

$=-5(5-x)^5+\frac{5}{3}(5-x)^6-\frac{1}{7}(5-x)^7+C$。

1630. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$。

解　原式 $=\int(1-6x+11x^2-6x^3)dx=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C$。

1631. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$。　**解**　原式 $=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$。

1632. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$。　**解**　原式 $=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$。

1633. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$。　**解**　原式 $=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+C$。

1634. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$。

解　原式 $=\int\left(\sqrt[4]{x}-2x^{\frac{5}{12}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$。

1635. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$。

解　原式 $=\int\left(x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}\right)dx$

$=-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C$。

1636. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$。

解　原式 $=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)dx=\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1}{7}x^2+1\right)+C$。

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$。

解 原式 $=\int\left(2-2\sqrt{2}\sqrt{3}\,x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}\,x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$

$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+c$。

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$。

解 原式 $=\int\sqrt{\frac{(x^2+x^{-2})^2}{x^3}}dx=\int\frac{x^2+x^{-2}}{x^3}dx=\ln|x|-\frac{1}{4}x^{-4}+C$。

1639. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$。 **解** 原式 $\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\mathrm{arctg}\,x+C$。

1640. $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$。 **解** 原式 $=-\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C$。

1641. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$。 **解** 原式 $=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$。

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$。

解 原式 $=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$。

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$。

解 原式 $=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$。

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx$。

解 原式 $=\int(4^x+9^x+2\cdot6^x)dx=\frac{4^x}{\ln4}+\frac{9^x}{\ln9}+2\frac{6^x}{\ln6}+C$。

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$。

解 原式 $=\int\left(2\cdot\frac{1}{5^x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^x}\right)dx=-\frac{2}{\ln5\cdot5^x}+\frac{1}{5}\frac{1}{\ln2\cdot2^x}+C$。

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$。

解 原式 $=\int(e^{2x}-e^x+1)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+c$。

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$。 **解** 原式 $=x-\cos x+\sin x+C$。

1648. $\int\sqrt{1-\sin2x}\,dx$。

解 原式 $=\int\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}dx=\int|\sin x-\cos x|dx$

$=\int(\sin x-\cos x)\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)dx$

$=(-\cos x-\sin x)\operatorname{sgn}(\sin x-\cos x)+C$

$=(\sin x+\cos x)\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+c$。

1649. $\int ctg^2 x dx$。 **解** 原式 $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-ctg x-x+C$。

1650. $\int tg^2 x dx$。 **解** 原式 $=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=tg x-x+C$。

1651. $\int(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)dx$。 **解** 原式 $=a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x+C$。

1652. $\int\operatorname{th}^2 x dx$。 **解** 原式 $=\int\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx=x-\operatorname{th}x+C$。

1653. $\int\operatorname{cth}^2 x dx$。 **解** 原式 $=\int\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}+1\right)dx=-\operatorname{cth}x+x+C$。

1654. 证明：若 $\int F(x)dx=F(x)+C$，则

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\quad(a\neq o)。$$

证 $\int f(ax+b)dx\overset{ax+b=t}{=\!=\!=}\frac{1}{a}\int f(t)dt$

$=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,\ (a\neq o)$

求出下列积分：

1655. $\int\frac{dx}{x+a}$。 **解** 原式 $=\ln|x+a|+C$。

1656. $\int(2x-10)^{10}dx$。 **解** 原式 $=\frac{1}{22}(2x-10)^{11}+c$。

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$。 **解** 原式 $=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$。

1658. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$。 **解** 原式 $=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$。

1659. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$。 **解** 原式 $=-\frac{2}{15}(5x-2)^{\frac{3}{2}}+C$。

1660. $\int\frac{\sqrt[3]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$。

解 原式 $=\int(1-x)^{-\frac{3}{5}}dx=-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}}+C$。

1661. $\int\frac{dx}{2+3x^2}$。

解 原式 $= \frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$。

1662. $\int\frac{dx}{2-3x^2}$。

解 原式 $= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\frac{2}{3}-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+x}{\sqrt{\frac{2}{3}}-x}\right|+C$。

$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right|+C$。

1663. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ 。

解 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$。

1664. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$。

解 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}\right|+C$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C'$。

1665. $\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$。 **解** 原式 $= -e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$。

1666. $\int\left[\sin 5x-\sin(5a)\right]dx$。

解 原式 $= -\frac{1}{5}\cos 5x-\sin(5a)\cdot x+C$。

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$。 **解** 原式 $= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$。

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$ 。 **解** 原式 $= \int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$。

1669. $\int\frac{dx}{1-\cos x}$。 **解** 原式 $= \int\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$。

1670. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$。

解 原式 $= \int\frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$。

1671. $\int\left[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)\right]dx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)\right]+C$。

1672. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$。 解 原式 $=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$。

1673. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$。 解 原式 $=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C$。

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分：

1674. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$。 解 原式 $=-\sqrt{1-x^2}+C$。

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ 解 原式 $=\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}+C$。

1676. $\int\frac{x\,dx}{3-2x^2}$。 解 原式 $=-\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right|+C$。

1677. $\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$。 解 原式 $=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+C=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$。

1678. $\int\frac{x\,dx}{4+x^4}$。 解 原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$。

1679. $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}$。 解 原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{(x^4)^2-2}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$。

1680. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$。 解 原式 $=\int\frac{2d\sqrt{x}}{1+x}=2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$。

1681. $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$。 解 原式 $=\int\left(-\sin\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$。

1682. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$。

解 原式 $=\int\frac{\operatorname{sgn}x\cdot\frac{1}{x^2}dx}{\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{d\frac{1}{|x|}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$

$$=-\ln\left|\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C。$$

1683. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$。 解 原式 $=-\int\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$。

1684. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$。

$$原式=\int \operatorname{sgn} x \frac{\frac{1}{x^3}dx}{\frac{1}{|x|^3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\int \operatorname{sgn}\cdot x(-\tfrac{1}{2})\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}$$

$$=\operatorname{sgn}x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}+C。$$

1685. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{3/2}}$ 。

解 $原式=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^{3/2}}=-\frac{1}{(x^2-1)^{1/2}}+C=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$ 。

1686. $\int \frac{x^2dx}{(8x^5+27)^{2/3}}$ 。

解 $原式=\frac{1}{24}\int \frac{d(8x^3+27)}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{8}(8x^3+27)^{\frac{1}{3}}+C$ 。

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$。

解法1. $原式=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}=\int \frac{d[2(x+\frac{1}{2})]}{\sqrt{[2(x+\frac{1}{2})]^2-1}}$

$$=\ln\left|2(x+\tfrac{1}{2})+\sqrt{[2(x+\tfrac{1}{2})]^2-1}\right|+C$$

$$=\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right|+C,\qquad [|x+\tfrac{1}{2}|>\tfrac{1}{2}]。$$

解法2. $原式=\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|1+x|}}=2\int \frac{\operatorname{sgn}x\, d(\sqrt{|x|})}{\sqrt{|1+(\sqrt{|x|})^2|}}$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C,\qquad [x(1+x)>0]。$$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 。

解法1. $原式=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}}\int \frac{d[2(x-\frac{1}{2})]}{\sqrt{1-[2(x-\frac{1}{2})]^2}}=\arcsin(2x-1)+C$

解法2. $原式=\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-(x)^2}}=\int \frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C。$

1689. $\int xe^{-x^2}dx$。 **解** $原式=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ 。

1690. $\int \frac{e^xdx}{2+e^x}$ 。 **解** $原式=\ln(2+e^x)+C。$

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 。 **解** $原式=\int \frac{e^xdx}{e^{2x}+1}=\operatorname{arctg} e^x+C。$

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ 。

解 $原式=\int \frac{dx}{e\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+1}}=\int \frac{-d\left(\frac{1}{e^x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+1}}=-\ln\left|\frac{1}{e^x}+\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)^2+1}\right|+C$

$$=-\ln\left(\frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{e^x}\right)+C。$$

1693. $\int\frac{\ln^2x}{x}dx$, $(x>0)$。 **解** 原式$=\frac{1}{3}\ln^3x+C$。

1694. $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$, $(x>1)$。 **解** 原式$=\ln|\ln(\ln x)|+C$。

1695. $\int\sin^5x\cos x dx$。 **解** 原式$=\frac{1}{6}\sin^6x+C$。

1696. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3x}}dx$。 **解** 原式$=-\int\frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^3x}}=\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$。

1697. $\int \mathrm{tg}x dx$。 **解** 原式$=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C$。

1698. $\int \mathrm{ctg}x dx$。 **解** 原式$=\ln|\sin x|+C$。

1699. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$。 **解** 原式$=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$。

1700. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}dx$。

解 原式$=\int\frac{1}{2(a^2-b^2)}\frac{d(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}dx$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}+C,\qquad (a^2\neq b^2)。$$

1701. $\int\frac{dx}{\sin^2x\sqrt[4]{\mathrm{ctg}x}}$。

解 原式$=-\int\frac{d\mathrm{ctg}x}{\sqrt[4]{\mathrm{ctg}x}}=-\frac{4}{3}\mathrm{ctg}^{\frac{3}{4}}x+C$。

1702. $\int\frac{dx}{\sin^2x+2\cos^2x}$。

解 原式$=\int\frac{1}{\mathrm{tg}^2x+2}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}+C$。

1703. $\int\frac{dx}{\sin x}$。

解 原式$=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}d\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$。

1704. $\int\frac{dx}{\cos x}$。

解 原式$=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$。

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.　　解　原式 $=\int \frac{dx}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\int \frac{d\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$。

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$。　　解　原式 $=\int \frac{2dx}{e^{x}+e^{-x}}=\int \frac{2de^{x}}{e^{2x}+1}=2\operatorname{arctg} e^{x}+C$。

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}$。

解　原式 $=\frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sh}2x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x-2\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\operatorname{ch}2x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x+1}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\operatorname{ch}2x+\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x+1}|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2x+1}}{\sqrt{2}}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right|+C'$。

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$。　　解　原式 $=\int \frac{d\operatorname{th}x}{\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}=3\operatorname{th}^{\frac{1}{3}}x+C$。

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$。　　解　原式 $=\int \operatorname{arctg}x\, d\operatorname{arctg}x=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$。

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$。

解　原式 $=\int \frac{d\arcsin x}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$。

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$。

解　原式 $=\int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\,d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C$。

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$。

解　原式 $=\int \frac{x^2}{x^4+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int \frac{1}{\frac{x^4+1}{x^2}}d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\int \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+2}d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$。

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$。

解　原式 $=\int \frac{x^2}{x^4+1}d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

$=\int \frac{1}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-2}d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{x^2+1}{x}-\sqrt{2}}{\frac{x^2+1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right|+C$。

1714. $\int \frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$。

解 原式 $=\int \frac{\frac{1}{x^6}dx}{\frac{1}{x^{20}}(x^5+1)^4}=\int -\frac{1}{5}\frac{d\left(\frac{1}{x^5}+1\right)}{\left(1+\frac{1}{x^5}\right)^4}=\frac{1}{15\left(1+\frac{1}{x^5}\right)^3}+C$

$=\frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C$。

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$。

解 原式 $=\frac{1}{\frac{n}{2}+1}\int \frac{d\left(x^{\frac{n}{2}+1}\right)}{\sqrt{1+x^{2\left(\frac{n}{2}+1\right)}}}=\frac{2}{n+2}\ln\left|x^{\frac{n}{2}+1}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right|+C$,

$(n\neq-2)$;

原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{2}\,x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C$, $(n=-2)$。

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$。

解 得式 $=\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\,d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$。

1717. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$。

解 原式 $=\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x+C$

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$。

解 得式 $=\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x\,dx}{\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2+\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2}=-\int \frac{d(\cos 2x)}{2+2\cos^2 2x}$

$=-\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}=-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\cos 2x)+C$。

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$。

解 原式 $=\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}$

$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|+C=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$。

1720. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$。

解 原式 $=\int\frac{d\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$。

用分项积分法计算下列积分：

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx$。

解 原式 $=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C$。

1722. $\int\frac{1+x}{1-x}dx$。

解 原式 $=\int\left(\frac{2}{1-x}-1\right)dx=-2\ln|1-x|-x+C$。

1723. $\int\frac{x^2}{1+x}dx$。

解 原式 $=\int(x-1)dx+\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$

1724. $\int\frac{x^3}{3+x}dx$

解 原式 $=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|3+x|+C$。

1725. $\int\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$。

解 原式 $=\int\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx=x+\ln(1+x^2)+C$。

1726. $\int\frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx$。

解 原式 $=-\int dx-\int\frac{4xdx}{2-x^2}+6\int\frac{dx}{2-x^2}=-x+2\ln|2-x^2|+$

$$+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+C。$$

1727. $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$。

解 原式 $=\int\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(1-x)^{100}}dx=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}$

$$+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C。$$

1728. $\int\frac{x^5}{x+1}dx$。

解 原式 $=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C$。

1729. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right]+C$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}dx$。

解 原式 $=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right]\sqrt{2-5x}\,dx=-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{2}{5}\int\sqrt{2-5x}\,dx$

$$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C。$$

1731. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$。

解 原式 $=\int\frac{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\sqrt[3]{(1-3x)^2}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$

$$=\frac{1}{15}\sqrt[3]{(1-3x)^5}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C。$$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int(1+x^2-1)\sqrt[3]{1+x^2}\,d(1+x^2)=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{(1+x^2)^4}\,d(1+x^2)$

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{1+x^2}\,d(1+x^2)=\frac{3}{14}\sqrt[3]{(1+x^2)^7}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4}+C$$

$$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C。$$

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$。

解 原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x+3)}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$、

1734. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$。

解 原式 $=\int\frac{dx}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\int\frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)(x-1)}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C。$

1735. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

解 原式 $=\int\frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}dx=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C。$

1736. $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$。

解 原式 $=\frac{1}{5}\int\frac{(x^2+3)-(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+3)}dx=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$

$$-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C。$$

1737. $\int\frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$。

解 原式 $=\int\frac{dx}{x+3}-2\int\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}dx=3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+C$

$$=\ln\frac{|(x+3)^3|}{(x+2)^2}+C。$$

1738. $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+\frac{3}{2})}{(x^2+\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C$。

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$，$(a\neq b)$。

解 原式 $=\frac{1}{a-b}\int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2(x+b)^2}dx$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int \frac{dx}{(x+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$-\frac{1}{(a-b)^2}\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{(a-b)^2}\int \frac{dx}{(x+a)^2}$$

$$=-\frac{1}{(a-b)^2}\frac{1}{x+b}-\frac{1}{(a-b)^2}\frac{1}{x+a}-\frac{2}{(a-b)^3}\int \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}dx$$

$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C。$$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$。

解 原式 $=\int \frac{1}{a^2-b^2}\frac{(x^2+a^2)-(x^2+b^2)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{b(a^2-b^2)}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$

$-\frac{1}{a(a^2-b^2)}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$。

1741. $\int \sin^2xdx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x+C$。

1742. $\int \cos^2xdx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin2x+C$。

1743. $\int \sin x\cdot\sin(x+d)dx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int[\cos d-\cos(2x+d)]dx=\frac{x}{2}\cos d-\frac{1}{4}\sin x(2x+d)+C$。

1744. $\int \sin3x\cdot\sin5xdx$。

解原式 $=\frac{1}{2}\int(\cos2x-\cos8x)dx=\frac{1}{4}\sin2x-\frac{1}{16}\sin8x+C$。

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{5}{6}x+\cos\frac{1}{6}x)dx=\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{1}{6}x+C$。

1746. $\int \sin(2x-\frac{\pi}{6})\cos(3x+\frac{\pi}{4})dx$。

解 原式 $=\frac{1}{2}\int\left[\sin(5x+\frac{\pi}{12})-\sin(x+\frac{5}{12}\pi)\right]dx$

$=-\frac{1}{10}\cos(5x+\frac{\pi}{12})+\frac{1}{2}\cos(x+\frac{5}{12}\pi)+C$。

1747. $\int\sin^3 xdx$。

解 原式 $=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$。

1748. $\int\cos^3 xdx$。

解 原式 $=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$。

1749. $\int\sin^4 xdx$。

解 原式 $=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$。

1750. $\int\sin^4 xdx$。

解 原式 $=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$。

1751. $\int\operatorname{ctg}^2 xdx$。

解 原式 $=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x-x+C$。

1752. $\int\operatorname{tg}^3 xdx$。

解 原式 $=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{-\sin^2 x}{\cos^3 x}d(\cos x)$

$=\ln|\cos x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C'$,

1753. $\int\sin^2 3x\sin^2 2xdx$。

解 原式 $=\frac{1}{4}\int(\cos x-\cos 5x)^2\sin 2xdx$

$=\frac{1}{4}\int\cos^2 x\sin 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 5x\sin 2xdx-$

$-\frac{1}{2}\int\cos x\cdot\cos 5x\cdot\sin 2xdx$

$=\frac{1}{8}\int\cos x(\sin 3x+\sin x)dx+\frac{1}{8}\int\cos 5x(\sin 7x-\sin 3x)dx$

$-\frac{1}{4}\int\cos x(\sin 7x-\sin 3x)dx$

$=\frac{1}{8}\int\cos x\cdot\sin 3xdx+\frac{1}{8}\int\cos x\sin xdx+\frac{1}{8}\int\cos 5x\cdot\sin 7xdx$

$$-\frac{1}{8}\int \cos 5x\sin 3x dx-\frac{1}{4}\int \cos x\sin 7x dx+\frac{1}{4}\int \cos x\sin 8x dx$$

$$=\frac{3}{16}\int(\sin 4x+\sin 2x)dx+\frac{1}{16}\int \sin 2x dx+\frac{1}{16}\int(\sin 12x+\sin 2x)dx$$

$$-\frac{1}{16}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx-\frac{1}{8}\int(\sin 8x+\sin 6x)dx$$

$$=\frac{3}{16}\int \sin 4x dx+\frac{3}{8}\int \sin 2x dx+\frac{1}{16}\int \sin 12x dx$$

$$-\frac{3}{16}\int \sin 8x dx-\frac{1}{8}\int \sin 6x dx$$

$$=\frac{-3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x+C。$$

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$。

解 原式$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x+C。$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$。

解 原式$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos x}dx=\int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}+\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C。$$

1756. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$。

解 原式$=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos^3 x}dx=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+\int \frac{d(2x)}{\sin 2x}$

$$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\mathrm{tg}x|+C。$$

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx。$

解 原式$=\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}d(\sin x)=\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C。$

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$。

解 原式$=\int \mathrm{Sec}^2 x d(\mathrm{tg}x)=\int(1+\mathrm{tg}^2 x)d(\mathrm{tg}x)=\mathrm{tg}x+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+C。$

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}$。

解 原式$=\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx=-\ln(1+e^{-x})+C=x-\ln(1+e\ )+C。$

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx。$

解 原式$=\int \frac{1+e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}dx=x+2\mathrm{arctg}e^x+C。$