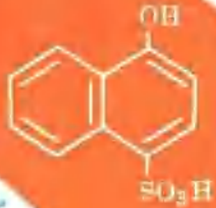
SHULIHUASHENGYUANDI



SHULIHUASHENGYUANDI

數理化生園地

上海科学技术出版社

1985 3

数理化生園地

1985年
第3辑
总17辑

上海科学技术出版社出版
（上海市瑞金二路四五〇号）
新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

科技新书目： 94·108
统一书号： 13119·1262
定 价： 0.24元

学习辅导

四面体与三角形的类比

田增伦 （陕西省渭南县瑞泉中学）

三角形是最简单的多边形，四面体是最简单的多面体. 两者间有许多相似之处. 将它们加以类比，是很有意义的.

三角形有两个重要定理，即余弦定理和正弦定理. 另外，直角三角形的勾股定理也是一极其重要的定理. 在四面体中，有与上述三个定理类比的定理吗？有的. 我们把这些类比的定理不妨叫做“空间余弦定理”、“空间正弦定理”和“空间勾股定理”.

为了推导出这三个类比定理，我们先介绍两个公式.

1．三角形面积公式. 设三角形三边的长为 a, b, c. 则面积

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

2．三面角公式. 在四面体 $P-ABC$(图 1)中，设以 P 为顶点的三面角的三个面角是 $\angle BPC=\alpha$, $\angle APC=\beta$, $\angle APB=\gamma$; 以 PA, PB, PC 为棱的三个二面角是 α', β', γ'. 则有

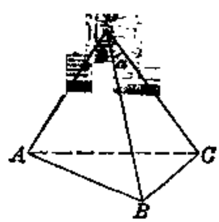


图 1

$$\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cos\beta'=\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},\quad \cos\gamma'=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

这两个公式的证明都不很困难，请读

现在，我们可以推导空间的类比定理了。

"空间余弦定理"．在四面体 $P-ABC$（图 1）中，除设面角 $\angle BPC=\alpha$, $\angle APC=\beta$, $\angle APB=\gamma$, 以 PA, PB, PC 为棱的二面角分别为 α', β', γ' 外，再设棱长 $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$, 各面的面积分别为

$$S_{\triangle PAB}=S_1,\ S_{\triangle PBC}=S_2,\ S_{\triangle PCA}=S_3,\ S_{\triangle ABC}=S_4.$$

则有

$$S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_2S_3\cos\alpha'-2S_1S_3\cos\beta'$$
$$-2S_1S_2\cos\gamma'. \qquad (3)$$

这就是空间余弦定理．其证明如下：

由三角形面积公式(1)，有

$$S_4=\frac{1}{4}\sqrt{4AB^2\cdot BC^2-(AB^2+BC^2-AC^2)^2},$$

而根据平面余弦定理，

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$
$$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$
$$AC^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

所以，

$$\begin{aligned}&4AB^2\cdot BC^2-(AB^2+BC^2-AC^2)^2\\&=4a^2b^2-4a^2b^2\cos^2\gamma+4b^2c^2-4b^2c^2\cos^2\alpha\\&\quad+4a^2c^2-4a^2c^2\cos^2\beta-8a^2bc\cos\alpha\\&\quad-8ab^2c\cos\beta-8abc^2\cos\gamma+8a^2bc\cos\beta\cos\gamma\\&\quad+8ab^2c\cos\alpha\cos\gamma+8abc^2\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}S_4^2=&\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\alpha+\frac{1}{4}a^2c^2\sin^2\beta+\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma\\&-\frac{1}{2}a^2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}ab^2c(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)$$

$$-\frac{1}{2}abc^2(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta).$$

根据三面角公式(2)即有

$$S_4^2=S_3^2+S_1^2+S_2^2-\frac{1}{2}a^2bc\cos\alpha'\sin\beta\sin\gamma$$

$$-\frac{1}{2}ab^2c\cos\beta'\sin\alpha\sin\gamma-\frac{1}{2}abc^2\cos\gamma'\sin\alpha\sin\beta,$$

再由三角形面积公式,可得

$$S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_2S_3\cos\alpha'-2S_1S_3\cos\beta'$$
$$-2S_1S_2\cos\gamma'. \tag{4}$$

这就证明了"空间余弦定理". 在图1中,如果以 P 为顶点的三面角是直三面角,即 $\alpha=\beta=\gamma=90°$. 代入(3)式,即得

空间勾股定理:

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_4^2. \tag{5}$$

最后,我们来推导空间正弦定理. 由三面角公式(2),有

$$\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

两端平方,得

$$\cos^2\alpha'=\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\sin^2\gamma},$$

从而可得

$$\sin^2\alpha'=\frac{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}{\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

$$\therefore\ \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=K.$$

同理有 $$\frac{\sin\beta'}{\sin\beta}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}=K.$$

连写在一起，就是

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta'}{\sin\beta}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}=K. \tag{6}$$

由此又不难推导出

$$\frac{aS_1}{\sin\alpha'}=\frac{bS_2}{\sin\beta'}=\frac{cS_3}{\sin\gamma'}=\frac{abc}{2K}, \tag{7}$$

$$\frac{aS_1}{\sin\alpha}=\frac{bS_2}{\sin\beta}=\frac{cS_3}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2}. \tag{8}$$

公式(6)～(8)都可以叫"空间正弦定理"．

四面体与三角形的类比是多方面的，绝不仅限于上述三个定理．请读者作深一步的探讨．

(上接第9页)

态，分别对两边按等容变化公式求出两边气体的压强．

	初始状态	过渡状态	方　程　式
左边	$p,\ V,\ T_A=273\,\mathrm{K}$	$p_A,\ V,\ T'_A=T_A+10=283\,\mathrm{K}$	$\frac{pV}{T_A}=\frac{p_AV}{T'_A}$，　$p_A=\frac{283}{273}p=1.04p$
右边	$p,\ V,\ T_B=293\,\mathrm{K}$	$p_B,\ V,\ T'_B=T_B+10=303\mathrm{K}$	$\frac{pV}{T_B}=\frac{p_BV}{T'_B}$，　$p_B=\frac{303}{293}p=1.03p$

$p_A>p_B$，水银向右移动．

当水银逐步向右移动时，p_A 与 p_B 趋向相等而达成平衡．只要我们能弄清楚系统与状态，掌握压强的计算方法，一般来讲解气态方程的习题是不困难的．

球面镜和透镜成像光路的对比

林桐绰　（中国教育学会物理教学研究会副理事长）

球面镜成像作图法和透镜成像作图法都是几何光学的重点，虽然不是学习上的难点，却是易于出错的问题．这是因为它们的成像作图法形式相似，通常都是从下面三条特殊的入射光线中任选两条来作图：① 沿球半径方向的入射光线（对球面镜而言）或通过光心的入射光线（对透镜而言）；② 平行于主光轴的入射光线；③ 通过焦点或指向焦点的入射光线．但它们的反光作用（对球面镜而言）和折光作用（对透镜而言）的本质是不同的，同学们往往由于没有抓住本质问题，因而把凹面镜（凹镜）、凸面镜（凸镜）、凸透镜和凹透镜的成像作图混淆起来而产生种种不应有的错误．为了从本质上理解这四种镜子成像作图法的区别，应该抓住球面镜的反光作用（凹面镜能使入射光线起反射会聚作用，凸面镜能使入射光线起反射发散作用）和透镜的折光作用（凸透镜能使入射光线起折射会聚作用，凹透镜能使入射光线起折射发散作用，这里透镜与周围空气比较是光密媒质），以及球面镜的反射成像和透镜的折射成像这些本质问题进行对比．同学们画球面镜或透镜成像光路图时，一定要掌握上述四种镜子的反光或折光特点，来检验自己所画的光路图有否出现错误．还有一点必须注意：由于透镜有两个焦点和两个焦平面，因此画成像光路图时一定要根据凸透镜的折光特点（折射会聚——实焦点、实焦平面）和凹透镜的折光特点（折射发散——虚焦点、虚焦平面）来确定所取的焦点（或焦平面）和入射光线的方向关系，

即确定所取的焦点(或焦平面)应在入射光线的哪一侧. 同学们要学会、掌握这种检验成像光路图的方法.

上述画成像光路图的三条特殊的入射光线中，第一条沿球半径方向的入射光线或通过光心的入射光线的光路图同学们是容易理解和掌握的;其他两条入射光线的光路图,我们采取如图1和图2所示的不同光路对比的方法——"四合一作图比较法". 其中,图1表示一条平行于主光轴的近轴光线,入射到不同种类的镜子的镜面 MN 时的光路图;图2表示一条通过(凹面镜和凸透镜)或指向(凸面镜和凹透镜)不同种类的镜子的焦点 F 时的光路图. 这两个"四合一作图比较法"，实际上就是球面镜的反光作用和透镜的折光作用，以及球面镜和透镜成像光路图的系统总结.

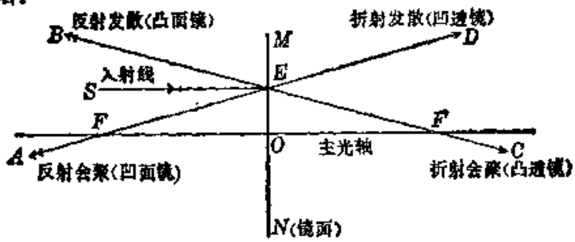


图 1

图1中,SE 为平行于主光轴入射到镜面的近轴光线(入射线);EA 为入射线 SE 经凹面镜反射后的反射线(通过焦点); EB 为入射线 SE 经凸面镜反射后的反射线(反向延长线通过焦点);EC 为入射线 SE 经凸透镜折射后的折射线(通过焦点); ED 为入射线 SE 经凹透镜折射后的折射线(反向延长线通过焦点).

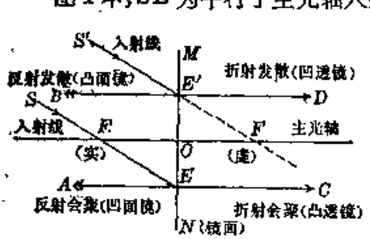


图 2

图2中, SE 为通过凹面镜或凸透镜焦点的入射线(近轴光线); EA

为入射线 SE 经凹面镜反射后的反射线；EC 为入射线 SE 经凸透镜折射后的折射线．$S'E'$ 为指向凸面镜或凹透镜焦点的入射线(近轴光线)；$E'B$ 为入射线 $S'E'$ 经凸面镜反射后的反射线；$E'D$ 为入射线 $S'E'$ 经凹透镜折射后的折射线．(这时 EA、$E'B$、EC、$E'D$ 均平行于镜子的主光轴)

解气态方程时应注意哪些问题

朱国祥　(上海市南市区教育学院，特级教师)

解气态方程的习题时为了用好有关定律及公式，必须注意以下三个问题．

1．必须弄清楚系统与状态．在研究气态方程问题时，容器内的气体可以看作一个系统．

对于一定质量的气体(即系统)来说，如果压强、体积和温度这三个量都不改变，气体就处于一定的状态中．一定量的理想气体从一个状态变化到另一个状态必须经过“过程”．其中，仅一个参量保持不变的过程可以有三种，即等温、等压、等容过程，它们分别服从于玻-马定律、盖·吕萨克定律及查理定律，综合这三条定律就得到状态方程．这些道理看起来似乎很简单，但实际解题时往往容易忘记这些道理而把习题中的数据硬套入公式，以致把不是同一个系统的参量也都代入同一状态方程式中去求解．例如两个互相隔开的系统，我们就要分别把它们的初始状态及最终状态的三个参量列出表来，然后分别代入各自的状态方程中去，但这两个系统往往是有联系的，造成混淆的原因就在于此，现举例说明．

〔例 1〕　如图 1 所示，当一个两臂不等的水银压强计顶端被封闭时，两臂中的压强各为 p_0，两臂横截面积都是 1 厘米^2，在温度保持恒定的情况下，通过底端活塞将 10 厘米^3 的水银送进去，左臂中水银面上升 6 厘米，右臂中水银面上升 4 厘米，求压强 p_0．

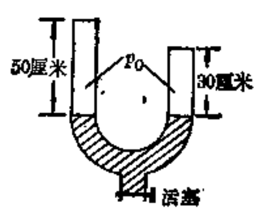


图　1

解 这里有两个系统，当水银上升时，两个系统的状态都要发生变化．

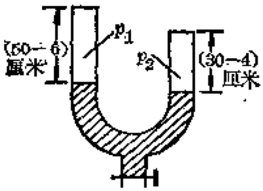


图 2

由于初始状态气体的体积不一样，当水银送进去以后，有些学生就会造成错觉，以为通过同一管道把水银送上去，根据连通器的原理，最后两臂的水银面仍然是相平的．这是不对的．因为，现在两管封闭以后，两臂水银面的上升必须服从玻-马定律．正确的解法如下：

参量＼状态	初始状态	终态	方程式	
左臂	p_0 $V_0=50$ 厘米^3 T	p_1 $V_1=50$ 厘米$^3-6$ 厘米^3 $=44$ 厘米^3 T	$p_0V_0=p_1V_1$	$p_2=p_1+2$ 厘米汞柱高
右臂	p_0 $V_0'=30$ 厘米^3 T	p_2 $V_2=30$ 厘米$^3-4$ 厘米^3 $=26$ 厘米^3 T	$p_0V_0'=p_2V_2$	

计算后得 $p_0=1.5\times10^5$ 帕斯卡．

2．由上例可见，除了弄清系统及状态外，还得注意系统间的相互关系，而相互关系涉及到压强时必须掌握两条：① 当液体表面上不是真空而有气体时，计算液体表面底下某一深度的压强时，必须加上液面上气体的压强．② 在液体内同一深度的地方，各个方向上的压强都是相等．

〔例 2〕 水银气压计中混进了一个空气泡，因此它的读数比实际的气压小些，当实际气压为 768 毫米水银柱高时，它的读数只有 748 毫米水银柱高，此时管中水银面到管顶的距离为 80 毫米，当气压计读数为 734 毫米水银柱高时，那么实际气压是多少？(温度保持不变)

解 分析时可先作一条水平线，在液体内部同一水平线上 A 和 B 两点的压强相等 $p_A=p_B$．如果 $p_A\neq p_B$，液体就要流动不能达成平衡．A 点在液面上故 $p_A=p_0$(p_0 是大气压强)，p_B 在管内距离管内液面的深度为 748

毫米，根据液体内部压强计算公式加液面上气体的压强得 $p_B=\rho gh+p$. 因 $p_A=p_B$，故 $p_0=p+\rho gh$，$p=p_0-\rho gh$，上面讲了管内气体压强的计算，关于实际气压的具体解法就不难解决了.

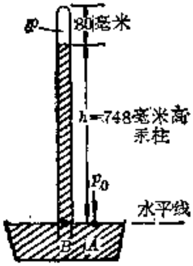


图 3

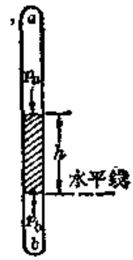


图 4

〔例 3〕 在一根竖直管内液柱把气体分成两个部分，这两部分气体的压强关系也是先作一条水平线(如图 4)，B 点在这条线上 $p_B=p_b$，同时 B 点又在液柱内它离上面液面的深度为 h，根据液体内部压强的计算公式加上液面上气体压强得：$p_B=\rho gh+p_a$.

3. 从一个平衡态到另一个平衡态，中间要经过一系列的过渡状态，最后达成平衡. 在有些习题中就是研究过渡状态的. 如图 5 所示两个完全相同的容器充入氢气，左边温度 0°C，右边温度 20°C，中间用水银隔开，两边温度都升高 10°C，水银将向什么方向移动？这里两边温度不相等，所以两边容器内气体的初始状态不同，同样升高 10°C，就不可能维持原来的平衡状态，通过一系列的过渡状态后又趋向平衡. 题目要求回答水银柱向哪个方向移动，这不是平衡状态的问题. 当两边各升高 10°C 时，两边气体的参量发生变化，由于初始状态不一样，它们的变化也不同步，因此两边的压强开始不相等，压强大的一边就使水银向另一边的方向移动，两边的体积跟着变化，最终达成新的平衡. 体积的变化是在水银移动之后，而水银的移动是由于两边存在压强之差. 因此我们设想这样一个过渡状态，即两边温度及压强已经变化而容积将要变化的状

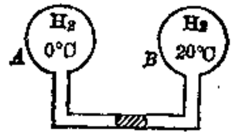


图 5

(下转第 4 页)

金属钠跟硫酸铜溶液的作用

张颂培 （人民教育出版社）

在金属活动顺序中，钠排在铜前面，所以，根据金属跟盐反应的一般规律，钠应能把铜从它的盐溶液中置换出来.

$$2Na+CuSO_4=Cu\downarrow+Na_2SO_4 \qquad (1)$$

但是，事实上钠跟硫酸铜溶液作用，产生的沉淀却并不是铜. 这是什么原因呢？

原来，钠是一种非常活泼的金属，常温下就能跟水进行剧烈的反应.

$$2Na+2H_2O=2NaOH+H_2\uparrow \qquad (2)$$

上述反应(1)和(2)都是氧化-还原反应，那么很显然，钠放进硫酸铜溶液中，将遇到 $CuSO_4$ 和 H_2O 两种氧化剂跟它作用. 但是，究竟是哪一种氧化剂先跟它作用呢？这除了跟两种氧化剂的相对强弱有关外，还跟它们浓度的相对大小有关. 在硫酸铜溶液中，Cu^{2+} 的氧化性比 H_2O 的氧化性强，但浓度却比 H_2O 小(即使是饱和硫酸铜溶液中，水仍是大量的). 因此，首先是钠的小颗粒迅速被大量的水分子所包围，发生置换反应，生成氢氧化钠并放出氢气；同时，钠跟水反应时放出的热量又使钠熔化，因而钠与水接触面增大，反应更为剧烈.

相反，由于钠粒子被水分子包围着，与铜离子接触就极少，使 Na 跟 Cu^{2+} 的反应很难进行；同时，随着 Na 跟 H_2O 反应生成的 NaOH 不断增加，溶液中大量的 OH^- 跟 Cu^{2+} 结合，形成 $Cu(OH)_2$ 微粒沉淀下来，因此 Cu^{2+} 浓度降低，更难跟 Na 发生氧化-还原反应了.

从上面分析可知，金属钠跟硫酸铜溶液作用，包含以下两个化学反应:

$$2Na+2H_2O=2NaOH+H_2\uparrow;$$

$$2NaOH+CuSO_4=Na_2SO_4+Cu(OH)_2\downarrow.$$

这个例子告诉我们，化学变化是复杂的，即使是一般规律，也总是存在着个别例外的，因此，我们必须对具体问题作具体分析，才可能得出符合事实的结论.

话说过氧化钠

胡学增 （上海市黄浦区教育学院）

特殊的氧化物

高一化学课本中指出:“钠的氧化物有氧化钠和过氧化钠等”．这是因为它们都由两种元素组成,其中一种元素是氧,符合氧化物的定义．

众所周知,氧化钠按其性质应属于碱性氧化物．那么,过氧化钠也是碱性氧化物吗?不是．因为它跟水反应的产物是碱和氧气,而不单单是碱;它跟酸反应的产物是盐和过氧化氢,而不是盐和水．

$$2Na_2O_2+2H_2O=4NaOH+O_2\uparrow$$

$$Na_2O_2+H_2SO_4=Na_2SO_4+H_2O_2$$

过氧化钠是不是酸性氧化物呢?也不是．因为它不能跟碱反应生成盐和水．当然,它也不可能是两性氧化物．

过氧化钠究竟属于哪一类氧化物呢? 在很多教材中,它被列为一类特殊的氧化物——过氧化物,以区别于普通的氧化物．

还有一种有趣的看法，认为如从电离角度看，过氧化钠似乎更象是一种盐，是过氧化氢(H_2O_2)相应的盐． 其理由是，H_2O_2 能在溶液里电离出 H^+，它的水溶液显弱酸性．

$$H_2O_2 \rightleftharpoons H^+ + HO_2^-$$

因而，H_2O_2 是符合阿仑尼乌斯关于酸的定义的，它是一种弱酸，其中 O_2^{2-} 可看作它的酸根(过氧根)，这样，Na_2O_2 不就是 H_2O_2 相应的盐吗?

氧的化合价知多少

从学习化学伊始,我们就知道氧是 -2 价的元素．但在 Na_2O_2 中，如果氧仍是 -2 价，钠就是 $+2$ 价；如果钠仍是 $+1$ 价,氧就应当是 -1 价．孰是孰非?这要从分析 Na_2O_2 的结构才能得出结论．

Na_2O_2 的电子式为 $Na^+[\times\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}\times]^{2-}Na^+$. 显然, 在 Na_2O_2 晶体中, 存在着一种特殊的离子$[:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}}:]^{2-}$, 即 O_2^{2-}, 读作过氧离子. O_2^{2-} 是 -2 价的离子, 那么其中的氧元素就是 -1 价的了.

不仅 Na_2O_2 有这种特殊的结构, 所有的过氧化物如 H_2O_2、K_2O_2 等等, 都含有过氧根. 正因为过氧化物中的氧呈 -1 价, 处于 0 价和 -2 价之间的中间价态, 所以它们既可以获得电子还原为 -2 价, 也可以失去电子氧化到 0 价. 如

失去 $2e$, 化合价升高, 被氧化

$$2\overset{-1}{H_2O_2} = 2H_2\overset{-2}{O} + \overset{0}{O_2}\uparrow$$

得到 $2e$, 化合价降低, 被还原

所以, 过氧化物都是些既能作氧化剂、又能作还原剂的物质. 但通常是用作氧化剂的.

“吸进”二氧化碳, “呼出”氧气

过氧化钠有不少特殊的性质, 其中最妙的要数它跟二氧化碳的反应了.

$$2Na_2O_2 + 2CO_2 = 2Na_2CO_3 + O_2\uparrow$$

在这个反应里, Na_2O_2 “吸进” CO_2, “呼出” O_2, 这恰恰与人的呼吸情况相反. 因此, 在潜水艇和飞船中, 可用 Na_2O_2 来吸收人体呼出的 CO_2, 并放出 O_2 供呼吸, 可谓一举两得.

在这个反应里, Na_2O_2 中 -1 价的氧一部分氧化为 O_2, 另一部分则还原成 Na_2CO_3 中 -2 价的氧, 而 Na 元素以及 CO_2 中的 C、O 元素化合价均未变化, 可见, 这是一个发生在同种元素之间的自身氧化-还原反应, 其电子的转移情况可表示为 $2Na_2\overset{2e}{O_2}$.

在这个反应里, 气体体积变化也有一定规律: Na_2O_2 每吸收 2 体积 CO_2, 就释出 1 体积的 O_2, 可知反应掉的 CO_2 体积是反应前、后气体体积

差值的 2 倍[2=(2-1)×2]，而反应产生的 O_2 体积正好是反应前、后气体体积的差[1=2-1]。掌握这一规律，可为计算有关混和气体的问题带来较大便利。

例如，某气体中可能含有 CO 和 CO_2，把 80 毫升这种气体通过 Na_2O_2，充分反应后，体积变成 40 毫升，问原气体中有无 CO？

分析：反应掉的 CO_2 体积是反应前、后气体体积差的 2 倍，即(80-40)×2=80。所以原气体中全部是 CO_2，没有 CO。

又如，上题中原气体通过 Na_2O_2 后，若体积变为 60 毫升，问原气体中 CO_2、CO 各为多少？反应后产生多少 O_2？

分析：原气体中 CO_2 体积=(80-60)×2=40(毫升)

原气体中 CO 体积=80-40=40(毫升)

反应后生成的 O_2 体积=80-60=20(毫升)

再如，引燃上题反应后的气体，并恢复到室温，问气体的体积变化如何？

分析：上题反应后的气体 60 毫升中，含 40 毫升 CO，20 毫升 O_2。引燃后发生的反应是

$$2CO+O_2=2CO_2$$

可见 40 毫升 CO 和 20 毫升 O_2 正好完全反应，生成 40 毫升 CO_2。即体积由 60 毫升变为 40 毫升。

按以上分析，你能否独立完成下面的思考题吗？

1. 有 30 毫升由 N_2 和 CO_2 组成的混和气体，通过足量的 Na_2O_2，充分反应后气体体积变成 20 毫升。试分析原混和气体的组成。

2. 有 30 毫升由 CO、CO_2 和 O_2 组成的混和气体，通过足量的 Na_2O_2，充分反应后，剩余气体体积为 25 毫升；引燃剩余气体，恢复到室温，体积变成 20 毫升。试确定原混和气体的组成。

[**答案**：1. N_2—10 毫升，CO_2—20 毫升 2. O_2—10 毫升，CO—10 毫升，CO_2—10 毫升]

解题方法谈

动圆的圆心轨迹方程的解题规律和技巧

赵农民 （上海市第九中学）

有关动圆的圆心轨迹方程问题，一般可分为动圆与定直线相切，动圆与定圆相切，以及动圆经过定点等几种情况．其中，动圆的半径又有常量和变量之分．

求这类问题的轨迹方程，有时虽然比较复杂，但通过分析，可以找到它的一些解题规律和技巧，使问题不难获得简捷的解决．

一、动圆与定直线相切

动圆与定直线相切时，其圆心到定直线的距离恒等于动圆的半径，这就是动圆圆心的运动规律．

〔例 1〕 一半径为 2 的动圆，在定直线 l：$x+y-1=0$ 上滑动，求这动圆的圆心轨迹方程．

解　动圆在定直线上滑动时，它与定直线始终保持相切的位置关系．

设动圆的圆心为 $C(x, y)$．因点 C 到定直线 l 的距离恒等于动圆的半径 2．于是由点到直线的距离公式，得所求的轨迹方程为

$$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow x+y-1\pm2\sqrt{2}=0.$$

轨迹是平行于定直线 l 的两条直线．

〔例 2〕 求与两定直线 l_1: $4x-3y-2=0$ 和 l_2: $5x-12y-19=0$ 都相切的动圆的圆心轨迹方程.

解 动圆 C 与两相交直线 l_1、l_2 都相切时，动圆的半径 r 是变量，但圆心 C 到 l_1 和 l_2 的距离都等于动圆的半径 r，即

$$|CM|=|CN|=r$$

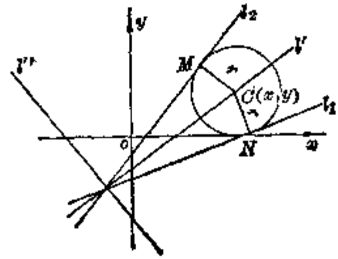


图 1

(图 1) 这就是动圆圆心的运动规律.

设 $C(x, y)$，则由点到直线的距离公式，得所求的轨迹方程为

$$\frac{|4x-3y-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|5x-12y-19|}{\sqrt{5^2+12^2}}.$$

解得 $$\frac{4x-3y-2}{5}=\pm\frac{5x-12y-19}{13}$$

即 $$l': 7x-9y-11=0, \quad l'': 9x+7y+23=0.$$

轨迹是两条定直线的交角的平分线.

二、动圆与定圆相切

动圆与定圆相切，可分为内切和外切两种情况．若相内切，则动圆的圆心与定圆圆心间的距离等于它们的半径之差；若相外切，则为两半径之和．这就是动圆圆心的运动规律.

〔例 3〕 半径为 1 的动圆，与定圆 C: $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 相切，求这动圆的圆心轨迹方程.

解 题设动圆与定圆相切，应考虑内切和外切两种情况.

设动圆的圆心为 $P(x, y)$，又 $R=1$．由定圆 C 的方程，得圆心 $C(2, -1)$，$r=2$.