初等拓扑学与几何学讲义

I.M.辛格　J.A.索普著
傅熙如　谢金良译

河南师范大学印刷厂

原　　序

目前，一般数学专业的大学生发现 数学已被划分为许多分支。学完微积分后，选学分析课与代数课。然后根据他的兴趣（或者他所在系的兴趣），他将选学专题课程。如果他攻读拓扑学，通常是简易点集拓扑学；如果他攻读几何学，通常是古典微分几何学。对某些令人鼓舞的新发现 —— 数学各分支的一致性，各领域间的相互渗透，一领域的方法适用于另一领域——大学生还不大相信。他必须等到从事研究工作时才会看到这种内在联系。这大概是因为在早期他对此了解不够。

这本讲义至少在拓扑学 ——几何学中是打破此种划分的一个尝试。学生可用在代数和高等微积分中学到的知识来证明与 几何学、 拓扑学和群论有关的某些相当深刻 的结果。（德拉姆定理，关于曲面的高斯一邦尼定理，基本群到覆盖空间的函子关系，以及常曲率曲面作为齐性空间等都是最有价值的实例。）

在前两章中讲述了最必要的初等点集拓扑学知识进而提示了一些在泛函分析学科的应用。第三、四章论述基本群、复盖空间与单纯复形。对这些问题的处理著者感谢E．斯帕尼尔。接在第五章关于流形理论的一些予备知识之后，像在H．惠特尼《几何积分论》中那样证明了德拉姆定理（第六章）。在最后两章黎曼几何的论述中，著者仿效了E．卡坦与陈省身的讲法。（为了在最后两章中避免李群论，仅着重论述了有向 2 —维流形。）

本讲义曾在麻省理工学院使用过。作为拓扑学与几何学一年的课程，前提是学生至少学过一学期近世代数和一学期高等微积分，而且“成绩不错”。该班由大约七十个学生组成，而且大部分是四年级学生。开设这门课程的想法来源于著者之一参加了美国数学会关于数学系大学生课程安排委员会的调查。在大学生课程安排委员会的小册子《准备当数学家的大学肄业生》（1963）（参看曲面理论大纲Ⅱ， PP.68—70）中可以找到这样的安排，但更加雄心勃勃。然而，著者相信，在没有课本给大班讲课时，本讲义的材料足够使用一年。

为适应教学需要，由我系傅熙如老师把本书译成中文。在出版过程中进修生孙克宽、研究生梁德有、张群、史存海、袁夫永曾参与校订工作。

刘亚星

一九七九年九月

目　录

第五章

第六章

第七章

第八章

一些点集拓扑　1

1.1　朴素集论

我们将采用某些对象的集（总体、族）的概念及一对象属于一集的概念作为本原（不定义）概念。

我们仅需注意，已知一集S与一对象x，我们若可确定该对象属于此集（是此集的一元），就记做$x\in S$，或者若它不属于此集，则记做$x\notin S$。

定义. 设A与B为二集，A是B的一个**子集**，记做$A\subset B$，如果$x\in A$蕴涵$x\in B$。A**等于**B，记做$A=B$，如果$A\subset B$且$B\subset A$。

符号. **空集**，即其中不具对象的集，用$\varnothing$表示.

注意.

(1)对所有集A，$\varnothing\subset A$。

(2)空集$\varnothing$是唯一的，即，任意两个空集相等。

因为若$\varnothing_1$与$\varnothing_2$是两个空集，那么$\varnothing_1\subset\varnothing_2$且$\varnothing_2\subset\varnothing_1$。

(3)对所有集A，$A\subset A$。

定义. 设A与B是二集，A与B的**并**$A\cup B$是适合$x\in A$或$x\in B$的所有x之集，记做

$$A\cup B=[x;\ x\in A\text{或}x\in B].$$

A与B的**交**$A\cap B$由

$$A\cap B=[x;\ x\in A\text{且}x\in B]$$

来定义。

同样，若$\mathbf{S}$是一些集所成的集系，$\mathbf{S}$内所有集之并与交分别由

$$\bigcup_{S\in\mathbf{S}} S=[x;\ \text{对某个}S\in\mathbf{S},x\in S]$$

与

$$\bigcap_{S\in\mathbf{S}} S=[x;\ \text{对每个}S\in\mathbf{S},x\in S]$$

来定义。

若$A\subset B$，A在B内的**余集**，用A'或$B-A$表示，由

$$A'=[x\in B;\ x\notin A]$$

来定义。

定理 1. 设A、B、C与S是一些集. 则

(1)$A\cup B=B\cup A$。

(2)$A\cap B=B\cap A$,

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(7)若$A\subset S$且$B\subset S$，则$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(8)若$A\subset S$且$B\subset S$，则$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

(9)若$\mathbf{S}_1$与$\mathbf{S}_2$是两个以集为元的集系，则

$$\left(\bigcup_{S\in\mathbf{S}_1} S\right)\cup\left(\bigcup_{S\in\mathbf{S}_2} S\right)=\bigcup_{S\in\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2} S.$$

$$\left(\bigcap_{S\in\mathbf{S}_1} S\right)\cap\left(\bigcap_{S\in\mathbf{S}_2} S\right)=\bigcap_{S\in\mathbf{S}_1\cup\mathbf{S}_2} S.$$

(10)对(9)中的$\mathbf{S}_1$与$\mathbf{S}_2$.

$$\left(\bigcup_{S_1\in\mathbf{S}_1} S_1\right)\cap\left(\bigcup_{S_2\in\mathbf{S}_2} S_2\right)=\bigcup_{\substack{S_1\in\mathbf{S}_1\\ S_2\in\mathbf{S}_2}}(S_1\cap S_2).$$

证. 本定理的证明留给学生.

定义. 设A与B为二集. A与B的**笛卡耳积**$A\times B$为序偶之集.

$$A\times B=[(a,b);\ a\in A,b\in B].$$

A与B之间的一个**关系**是$A\times B$的一个子集R. a与b称谓R-**相关** 的 如果$(a,b)\in R$.

例. 设$A=B=$实数集. 则$A\times B$是平面，序关系$x<y$是A与B间的一个关系. 此关系是图1.1.中画阴影的点集.

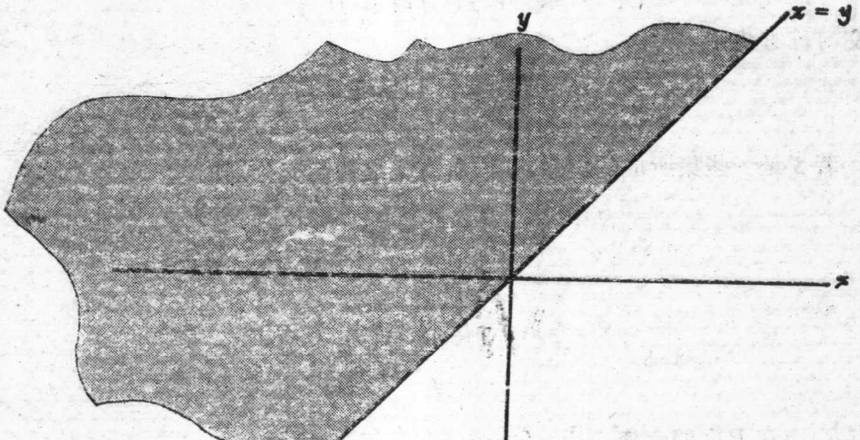


图1.1.

定义. 关系$R\subset A\times A$为一**偏序**如果

(1) $(s_1,s_2)\in R$且$(s_2,s_3)\in R\Longrightarrow(s_1,s_3)\in R$且

(2) $(s_1,s_2)\in R$且$(s_2,s_1)\in R\Longrightarrow s_1=s_2$.

关系R为一**全序**如果它是一个偏序，且还有：

（3）对每个元偶$s_1, s_2 \in s$，或者$(s_1, s_2) \in R$或者$(s_2, s_1) \in R$。

关于S = 实数集的序关系是全序的一个例子。通常，我们说S由R来偏序（全序）。

定义．设A与B是二集，将A映射到B的一个**函数**f，用$f: A \to B$表示，是A与B间满足下述诸性质的一个关系（$f \subset A \times B$）。

（1）若$a \in A$，则存在$b \in B$使$(a, b) \in f$，

（2）若$(a, b) \in f$且$(a, b_1) \in f$，则$b = b_1$。

性质（1）是说函数f在A上是**处处**确定的。性质（2）是说f是一个“单值”函数。

符号．设$f: A \to B$．$f(a) = b$我们意指$(a, b) \in f$。

定义．设$f: A \to B$．f为**全射的**（到上的）如果对每个$b \in B$存在$a \in A$使$f(a) = b$．若f是全射的，我们记做$f(A) = B$．f为**单射的**（一对一）如果$f(a) = f(a_1) \Rightarrow a = a_1$．如果$f$同时是全射的与单射的，我们说$f$是$A$与$B$间的一个**一一对应**。

定义．集A为**可数的**如果存在全部整数之集与A间的一个**一一对应**．集A为**有限的**，如果对某个正整数n存在集$\{1, \cdots, n\}$与A间的一个一一对应，在此情况下我们说A有n个元。

定理 2．若$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$是一个n元有限集，则A的所有子集之集有2^n个元。

证．研究将A映射到两个元“是”与“否”组成的集{是，否}的所有函数之集F．F有2^n个元．A的所有子集之集$\mathbf{S}$同F是一一对应的．因为设$f: \mathbf{S} \to F$定义如下

对$B \in \mathbf{S}$，即，对$B \subset A$，由

$$f(B)(x) = \begin{cases} \text{是} & \text{若} x \in B \\ \text{否} & \text{若} x \overline{\in} B \end{cases}$$

定义的函数$f(B)$（即$f(B)$：$A \to$[是，否]）是F的元．f是单射的，因为若$f(B) = f(C)$，则对所有$x \in A$，$f(B)(x) = f(C)(x)$．因此$f(B)(x) =$ 是，当且仅当$f(C)(x) =$ 是时；即，$x \in B$当且仅当$x \in C$时．因此，$B = C$，f是全射的，因为每个函数g：$A \to$[是，否]由

$$B = [x;\ g(x) = \text{是}]$$

确定一个$B \subset A$且$f(B) = g$。

符号．由此命题诱导，我们用2^A表示A的所有子集之集．给定二集A与B，B^A表示所有函数$A \to B$之集。

定义．设$f \in B^A$．f的**逆**f^{-1}是由

$$f^{-1}(B_1) = [a \in A;\ f(a) \in B_1] \qquad (B_1 \subset B)$$

定义的函数$2^B \to 2^A$．$f^{-1}(B_1)$称谓B_1的**逆象**．注意

$$f^{-1} \in \left(2^A\right)^{2^B}$$

符号．设W为一集，并设$\mathbf{S}$是一些集所成的集系，我们说$\mathbf{S}$是由W**标号的**，如果存在给定的一个全射函数$\varphi: W \to \mathbf{S}$．对$\omega \in W$，我们用$S_\omega$表示$\varphi(\omega)$并且将$\mathbf{S}$由$W$标号表示为$\{S_\omega\}_{\omega \in W}$。

定义. 设$\{S\omega\}_{\omega\in W}$是由$W$标号的. 诸集$\{S\omega\}_{\omega\in W}$之积为集

$$\prod_{\omega\in W} S\omega=[f:W\to\bigcup_{\omega\in W} S\omega;\ f(\omega)\in S\omega \text{对所有} \omega\in W]$$

若集W不是有限的，此积称谓一个**无限积**. 注意到集积的这个概念是两个集的积$S_1\times S_2$的概念的拓广. 因为设$W=\{1,2\}$设$\mathbf{S}=\{S_1,S_2\}$，并设$\varphi:W\to\mathbf{S}$由$\varphi(j)=S_j$，$j=1,2$确定，从而$S_1\times S_2=[(s_1,s_2):s_j\in S_j]$，且

$$\prod_{\omega\in W} S\omega=[f:\{1,2\}\to S_1\cup S_2;\ f(j)\in S_j]$$，它可以同

$[(f(1),f(2));\ f(j)\in S_j]$等量齐观；这集又可同$S_1\times S_2$等量齐观.

注意. $\prod_{\omega\in W} S\omega$是一个函数集. 人们可能要问是否总存在这样的函数；即，$\prod_{\omega\in W} S\omega\neq\varnothing$吗？换句话说，给定无限个非空集，从每个集中选一个元可能吗？这个问题借助集论的通常公理不能回答. 在公理集论中可以证明.

选择公理. 设$\{S\omega\}_{\omega\in W}$是由$W$标号的一些集. 假设对所有$\omega\in W$. $S\omega\neq\varnothing$则

$$\prod_{\omega\in W} S\omega\neq\varnothing.$$

选择公理等价于一系列其它公理，其中之一是下述的

最大原理. 若S是由R偏序的，而T是一个全序子集. 则存在一集M使下述论断是正确的.

(1) $T\subset M\subset S$.

(2) M是由R全序的.

(3) 若$M\subset N\subset S$，且N是由R全序的，则$M=N$；即，M是包含T的一个极大全序子集.

1.2拓扑空间

定义. 一个**度量空间**是具有一个函数$\rho: S\times S\to$非负实数集的一个集S，对每个$s_1, s_2, s_3\in S$适合：

(1) $\rho(s_1, s_2)=0$当且仅当$s_1=s_2$时.

(2) $\rho(s_1, s_2)=\rho(s_2, s_1)$.

(3) $\rho(s_1, s_3)\leqslant\rho(s_1, s_2)+\rho(s_2, s_3)$.

函数ρ称谓S上的一个**度量**.

已知度量空间S内的一个点s_0与一个实数a，以s_0为中心以a为半径的**球**定义为集

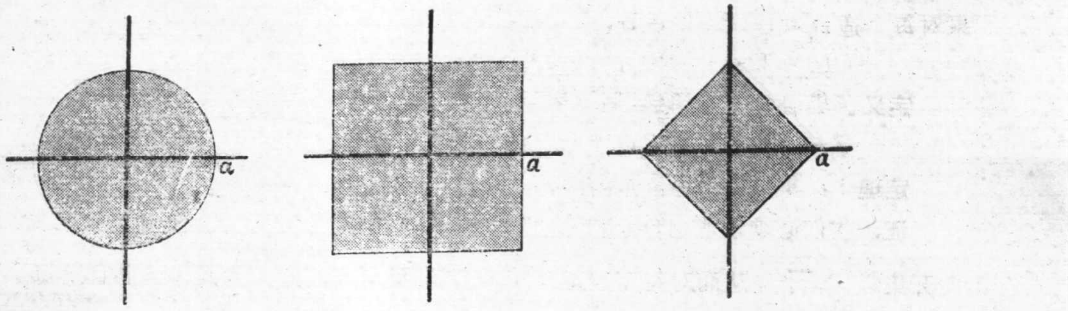
$$B_{s_0}(a)=[s\in S;\ \rho(s, s_0)<a].$$

例. 设S是平面，即，实数集同它自身的积. 我们在S上定义三个度量如次.

对S内的两点$p_1=(x_1, y_1)$与$p_2=(x_2, y_2)$，

$$\rho_1(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$\rho_2(p_1, p_2) = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$
$$\rho_3(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

关于这三个度量的每一个以点0 =（0,0）为中心 a 为半径的球用图1.2中画阴影的面积来表示．注意到一个球未必具有一条圆形的，甚或是光滑的边界．



$\rho_1(s,0)<a$　　$\rho_2(s,0)<a$　　$\rho_3(s,0)<a$

图1.2

注意．这三个度量规定了平面的三个不同的度量空间结构．然而当研究这些空间的某些性质时，这些度量是等价的．因此，譬如说：如果我们想知道 o 是不是集 $T\subset S$ 的一个极限点，我们问是否存在T内的一个点序列收敛于0；即，是否存在T内的点序列 $\{s_n\}$ 使得对给定的任意 $\varepsilon>0$，存在一个N，对所有 $n>N$ 使 $\rho(s_n, 0)<\varepsilon$．不难看出回答此问题对于ρ与我们用上面哪一个度量无关；即，给定$\varepsilon>0$用ρ_1存在这样一个N当且仅当用ρ_2存在这样一个N时，等等．回答同半径为ε 的球的形状无关，而仅同它的“肥性”或“开性”有关。为此将度量空间的本质上由“开性”表述的那些性质集中一起是方便的，用这些性质定义一个更抽象的结构，**拓扑结构**，在其内我们仍可谈极限点而且在其内上面表述的平面上的三个度量结构给出相同的“开集”．

定义．拓扑空间是带有满足下述条件的S的子集的集系$\mathbf{U}$（即，$\mathbf{U}$是2^S的一个子集）的一个集S：

（1 a）$\varnothing\in\mathbf{U}$，$S\in\mathbf{U}$．

（2 a）若U_1，…，$U_n\in\mathbf{U}$则$\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathbf{U}$．

（3 a）$\mathbf{U}$内元的任意并在$\mathbf{U}$内；即，若$\widetilde{\mathbf{U}}\subset\mathbf{U}$，则

$$\bigcup_{U\in\widetilde{\mathbf{U}}}U\in\mathbf{U}.$$

$\mathbf{U}$的元称谓S内的**开集**，集系$\mathbf{U}$称谓S上的一个**拓扑**．

注意．我们常删去$\mathbf{U}$而单将S叫做一个拓扑空间．

定义．设（S，$\mathbf{U}$）是一个拓扑空间，集$A\subset S$为**闭的**，如果它是一个开集的余集，即，如果$A'\in\mathbf{U}$．

注意．在上面条件（1 a），（2 a），（3 a）中取余集，我们看出闭集的集系$\mathbf{C}$满足下述条件．

（1 b）$\varnothing \in \mathbf{C}$，$S \in \mathbf{C}$。

（2 b）若A_1，…，$A_n \in \mathbf{C}$，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathbf{C}$。

（3 b）$\mathbf{C}$内元的任意交在$\mathbf{C}$内。

注意。像指定开集集系一样一个拓扑可以由指定闭集集系来刻画。

定义：设（S，$\mathbf{U}$）是一个拓扑空间，设$A \subset S$，点$s \in S$为A的一个**极限点**，如果对每个适合$s \in U$的$U \in \mathbf{U}$，

$$(U-\{s\}) \cap A \neq \varnothing.$$

定义。集$A \subset S$的**闭包**，用$\overline{A}$表示。是集

$$\overline{A} = A \cup \{s \in S;\ s \text{是} A \text{的极限点}\}.$$

定理1：集A的闭包$\overline{A}$是闭的。

证。我们必须证明$\overline{A}'$是开的，为此只须证明对每个$s \in \overline{A}'$存在一个适合$s \in U_s$的开集$U_s \subset \overline{A}'$。从而对每个$s$，$s \in U_s$蕴涵$\overline{A}' \subset \bigcup_{s \in \overline{A}'} U_s$，而且对每个$s$，$U_s \subset \overline{A}'$蕴涵$\bigcup_{s \in \overline{A}'} U_s \subset \overline{A}'$。因此$\overline{A}' = \bigcup_{s \in \overline{A}'} U_s$是一些开集的并，所以是开集。

现在设$s \in \overline{A}'$。则s不是A的极限点，从而存在一个开集U_s使$s \in U_s$且（$U_s - \{s\}$）$\cap A = \varnothing$。而且由于$s \notin \overline{A}$，$s \notin A$，所以事实上$U_s \cap A = \varnothing$。由于U_s的每个元包含在一个开集内，即U_s本身内，它同A的交是$\varnothing$，这导出U_s不包含A的极限点从而$U_s \cap \overline{A} = \varnothing$；即$U_s \subset \overline{A}'$。 □

定理2。当且仅当$A = \overline{A}$时，A是闭的。

证。假设A是闭的，从而A'是开的。若$s \notin A$，则A'是包含s且适合（$A' - \{s\}$）$\cap A = \varnothing$的一个开集。因此s不是A的极限点，所以A的所有极限点在A内；即$A = \overline{A}$。

反之，若$A = \overline{A}$，则由上定理A是闭的。 □

定义：集$\mathbf{B} \subset 2^S$为S上一个拓扑的一个基，如果下述条件满足：

（1c）$\varnothing \in \mathbf{B}$

（2c）$\bigcup_{B \in \mathbf{B}} B = S$

（3c）若B_1与$B_2 \in \mathbf{B}$，则对某个子集$\widetilde{\mathbf{B}} \subset \mathbf{B}$，$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \widetilde{\mathbf{B}}} B$。

定理3。设S为一集而$\mathbf{B}$是S上一拓扑的基。设

$$\mathbf{U}_{\mathbf{B}} = [U \in 2^S;\ U \text{是} \mathbf{B} \text{中元的并}].$$

则$\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$是S上的一个拓扑，由$\mathbf{B}$生成的拓扑。

证。我们必须验证$\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$满足S上拓扑的三个开集公理。

由基定义中的（1 c）与（2 c）。$\varnothing$与S都$\in \mathbf{U}_{\mathbf{B}}$从而拓扑空间定义中的条件

（1 a）满足。

假设 $\mathbf{V}\subset\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$。从而 $\bigcup_{V\in\mathbf{V}}V=\bigcup_{V\in\mathbf{V}}(\bigcup_{B\in\mathbf{B}_V}B)=\bigcup_{B\in\widetilde{\mathbf{B}}}B$

其中对每个 $V\in\mathbf{V}$，$\mathbf{B}_V\subset\mathbf{B}$ 且 $\widetilde{\mathbf{B}}=\bigcup_{V\in\mathbf{V}}\mathbf{B}_V\subset\mathbf{B}$。所以条件(3a)成立。

我们用归纳法证明条件（2 a）。我们假设 $\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$ 内 k 个集之交在 $\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$ 内。（当 $k=1$ 时，论断自然是真的）。从而

假设 $U_1,\cdots,U_{k+1}\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$。由归纳法假设 $U_1\cap\cdots,\cap U_k\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$；即，存在一个子集 $\mathbf{B}_1\subset\mathbf{B}$ 使 $U_1\cap\cdots,\cap U_k=\bigcup_{B_1\in\mathbf{B}_1}B_1$，

由于 $U_{k+1}\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$，存在一个子集 $\mathbf{B}_2\subset\mathbf{B}$ 使 $U_{k+1}=\bigcup_{B_2\in\mathbf{B}_2}B_2$。

$$
\text{所以}\quad U_1\cap\cdots\cap U_{k+1}=\left(\bigcup_{B_1\in\mathbf{B}_1}B_1\right)\cap\left(\bigcup_{B_2\in\mathbf{B}_2}B_2\right)=\bigcup_{\substack{B_1\in\mathbf{B}_1\\B_2\in\mathbf{B}_2}}(B_1\cap B_2).
$$

但由基定义的条件（3 c），$B_1\cap B_2\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$。

所以 $U_1\cap\cdots\cap U_{k+1}\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}}$。 □

定理4. 设（S，ρ）是一个度量空间。设

$\mathbf{B}=\{Bs(a);\ s\in S$ 而 a 是非负实数$\}$

则 $\mathbf{B}$ 是 S 上一个拓扑的基。

证。

（1）对任意 $s\in S$，$Bs(0)=\varnothing$，从而 $\varnothing\in\mathbf{B}$。

（2）对任意 $a>0$，$S=\bigcup_{s\in S}Bs(a)$，从而 $S=\bigcup_{B\in\mathbf{B}}B$。

（3）设 $s_1,s_2\in S$，$a_1,a_2>0$ 并设 $T=Bs_1(a_1)\cap Bs_2(a_2)$。我们可假定 $T\neq\varnothing$。

为了证明 T 是 $\mathbf{B}$ 的元的并，只须证明对每个 $s\in T$ 存在 $a_s>0$ 使 $Bs(a_s)\subset T$。从而 $T\subset\bigcup_{s\in T}Bs(a_s)\subset T$。第一个包含关系可由对每个 $s\in T$，$s\in Bs(a_s)$ 导出，第二个包含关系由对每个 $s\in T$，$Bs(a_s)\subset T$ 导出，因此

$T=\bigcup_{s\in T}Bs(a_s)$ 是 $\mathbf{B}$ 的元的并。

现在对 $s\in T$，设 $b_j=\rho(s,s_j)$，对 $i=1,2$。由于 $s\in Bs_j(a_j)$ 从而 $b_j<a_j$。设 $a_s=min\{a_1-b_1,a_2-b_2\}$。从而 $a_s>0$，且我们断言 $B_s(a_s)\subset Ts$，由于假定 $t\in B_s(a_s)$。从而

$$\rho(t,s_j)\leq\rho(t,s)+\rho(s,s_j)<a_s+b_j\leq a_j-b_i+b_j=a_j,$$

因此　$t\in B_{s_j}(a_j)\ j=1,\ 2$。 $\square$

推论。度量空间有一个拓扑空间结构其中开集是一些球的并。

定义。设S为一集，并设$\mathbf{B}_1$与$\mathbf{B}_2$是S上拓扑的基。$\mathbf{B}_1$与$\mathbf{B}_2$为**等价的**，如果它们生成相同的拓扑；即，如果$\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}=\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}$。

定理5・设S为一集，并设$\mathbf{B}_1$与$\mathbf{B}_2$是S上拓扑的基。$\mathbf{B}_1$与$\mathbf{B}_2$为等价的当且仅当

（1）对每个$s\in S$与适合$s\in B_1$的$B_1\in\mathbf{B}_1$，存在$B_2\in\mathbf{B}_2$使$s\in B_2\subset B_1$且

（2）对每个$s\in S$与适合$s\in B_2$的$B_2\in\mathbf{B}_2$，存在$B_1\in\mathbf{B}_1$使$s\in B_1\subset B_2$。

证。假设$\mathbf{B}_1$与$\mathbf{B}_2$是等价的，并设$s\in B_1\in\mathbf{B}_1$。从而$B_1\in\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}=\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}$，因而对某个子集$\widetilde{\mathbf{B}}_2\subset\mathbf{B}_2$，$B_1=\bigcup_{B_2\in\widetilde{\mathbf{B}}_2}B_2$。所以对某个$B_2\in\widetilde{\mathbf{B}}_2\subset\mathbf{B}_2$，$s\in B_2\subset B_1$。因此（1）证讫。同理可证（2）。

反之，假设（1）与（2）满足。我们首先证明$\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}\subset\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}$。

设　$B\in\mathbf{B}_1$。由（1）对每个$s\in B$存在$B_s\in\mathbf{B}_2$使$s\in B_s\subset B$。

现在$B\subset\bigcup_{s\in B}B_s\subset B$，从而$B=\bigcup_{s\in B}B_s$。因此$\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}\subset\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}$。

同样，由（2），$\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}\subset\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}$，　从而$\mathbf{U}_{\mathbf{B}_1}=\mathbf{U}_{\mathbf{B}_2}$。 $\square$

推论。早先提出的平面S上的三个度量ρ_1，ρ_2，ρ_3都确定S上的相同的拓扑。

证。定理5的条件（1）与（2）显然满足。 $\square$

注意。然而，一个已知空间上的所有度量给出相同拓扑并不真确。例如，考察具有下述两个度量的实数空间。

$$\rho_1(r_1,\ r_2)=|r_1-r_2|$$

$$\rho_2(r_1,\ r_2)=\begin{cases}0 & (r_1=r_2)\\ 1 & (r_1\neq r_2)\end{cases}$$

由ρ_1确定的拓扑内的开集是R内通常的（由开区间生成的）开集，而由ρ_2确定的开集的集系是R的所有子集之集2^R。因为，事实上，关于ρ_2，对每个$r\in R$，$B_r(\frac{1}{2})=\{r\}$，从而每个“点”是一个开集，所以“一些点”的每个并也是开集，即R的每个子集是开集。

定义。若$(S,\ \mathbf{U})$是一个拓扑空间且$\mathbf{U}=2^S$，则S称谓具有**离散拓扑**。

定理6．设$(S,\mathbf{U})$是一个拓扑空间并设$A\subset S$，设

$$\mathbf{U}_A=\{A\cap U;\ U\in\mathbf{U}\}$$

则$\mathbf{U}_A$是A上的拓扑，称谓**A上的相对拓扑**。

证。这是下述事实的结果。

（1）$\varnothing\cap A=\varnothing$，$S\cap A=A$。

（2）$\bigcap_{i=1}^{n}(U_i\cap A)=(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap A$。

（3）$\bigcup_{\widetilde{U}\in\widetilde{\mathbf{U}}}(\widetilde{U}\cap A)=(\bigcup_{\widetilde{U}\in\widetilde{\mathbf{U}}}\widetilde{U})\cap A$. □

注意．当我们同子空间打交道时，我们必须仔细说明这时所用的拓扑是哪一个．因此，譬如说，若U是开区间（1，3）$\subset R$而A是闭区间〔2，4〕$\subset R$，从而$U\cap A$在A内是开的，但在R内不是开的．然而，若A是开的或闭的，我们有下述定理．

定理7．设S是一个拓扑空间并设$A\subset S$．若A在S内是开的，则A内的每个开集在S内是开的，若A在S内是闭的，则A内的每个闭集在S内是闭的．

证．若A在S内是开的而B在A内是开的，则对S内的某个开集U，$B=U\cap A$；由于U与A在S内都是开的，从而B在S内是开的。

若A在S内是闭的，而B在A内是闭的，从而$A-B$在A内是开的；从而对S内的某个开集U，$A-B=A\cap U$．因此

$$B=A-(A-B)=A-A\cap U=A\cap U'.$$

由于A与U'在S内都是闭的，从而$A\cap U'=B$也是． □

定理8．设S是一个拓扑空间并设$Q\subset S$有相对拓扑．设P是Q的一个子集．则将P看作Q的子集时的相对拓扑$\mathbf{U}_1$与将P看作S的子集时的相对拓扑$\mathbf{U}_2$是相同的．

证．设$A\subset P$，从而

$$\begin{aligned} A\in\mathbf{U}_1 &\Longleftrightarrow \text{对某个开集}U\subset Q,\ A=P\cap U\\ &\Longleftrightarrow \text{对某个开集}\widetilde{U}\subset S,\ A=P\cap(Q\cap\widetilde{U})\\ &\Longleftrightarrow \text{对某个开集}\widetilde{U}\subset S,\ A=P\cap\widetilde{U}(\text{因}P\subset Q)\\ &\Longleftrightarrow A\in\mathbf{U}_2. \end{aligned}$$

□

1.3 连通空间与紧空间

定义．拓扑空间S为**连通的**，如果仅有的开闭集是$\varnothing$与S．

定理1．拓扑空间S为连通的，当且仅当它不是两个不交非空开集的并时．

证．设S是连通的．假定对适合$V_1\cap V_2=\varnothing$的开集V_1与V_2，$S=V_1\cup V_2$．从而$V_1=V'_2$，因此V_1是既开且闭的．由于S是连通的，或者$V_1=\varnothing$或者$V_1=S$．若$V_1=S$，则$V_2=\varnothing$；从而在两种情况下V_1或者V_2必定是空的．

反之．假定S不是两个不交非空开集的并，设$V\subset S$是既开且闭的．从而V'也是既开且闭的，且S是不交开集V与V'的并．因此或者$V=\varnothing$或者$V'=\varnothing$；即，或者$V=\varnothing$或者$V=S$，从而S是连通的．

例．实分析中曾证过下述空间是连通的： □

（1）实数空间R，

（2）R内的任意区间，

（3）实n－空间R^n，与

（4）R^n内的任意球或立方体．

注意．拓扑空间的一子集称谓连通的，如果它关于相对拓扑是连通的．

定理2．设S是一个拓扑空间．并设T_0与$\{T_\omega\}_{\omega\in W}$是$S$的连通子集．假设对每个$\omega\in W$，$T_0\cap T_\omega\neq\varnothing$．则$T_0\cup(\bigcup_{\omega\in W}T_\omega)$是连通的．

注意．已知直线在R^n内是连通的这个事实，此定理可用来证明R^n是连通的．事实

上，由于设 $T_o=\{O\}$ 且 $\{T_\omega\}_{\omega\in W}$ 表示过O的所有直线之集（指标集W可取做R^n内的单位球面。）从而$R^n=T_o\cup(\cup_{\omega\in W}T_\omega)$。

证。设 $T=T_o\cup(\cup_{\omega\in W}T_\omega)$。假定对T内某对不交开集$V_1$与$V_2$，$T=V_1\cup V_2$。从而对每个$\omega$，$V_1\cap T_\omega$与$V_2\cap T_\omega$是$T_\omega$内的不交开集，且它们的并是$T_\omega$。由于$T_\omega$是连通的，或者$V_1\cap T_\omega=\varnothing$或者$V_2\cap T_\omega=\varnothing$。同理，或者$V_1\cap T_o=\varnothing$或者$V_2\cap T_o=\varnothing$；譬如说$V_2\cap T_o=\varnothing$。从而$V_1\cap T_o=T_o$；即，$T_o\subset V_1$。

由于$T_o\cap T_\omega\neq\varnothing$。所以对某个$\omega\in W$，$V_1\cap T_\omega\neq\varnothing$。因此由上面可知对所有$\omega\in W$，$V_2\cap T_\omega=\varnothing$且$V_1\cap T_\omega=T_\omega$；即，对所有$\omega\in W$，$T_\omega\subset V_1$。所以

$V_1=T_o\cup(\cup_{\omega\in W}T_\omega)$且$V_2=\varnothing$。 □

例。对于$n>1$，$R^n-\{o\}$是连通的。　　证明之

定义。设S为一集。集系$\mathbf{V}\subset 2^S$为S的一个**覆盖**，如果$\cup_{V\in\mathbf{V}}V=S$。若S是一个拓扑空间且每个$V\in\mathbf{V}$是一个开集，$\mathbf{V}$称谓S的一个**开覆盖**。

拓扑空间S为**紧的**，如果每个开覆盖有一个有限子覆盖；即，如果对每个开覆盖$\mathbf{V}$，存在有限个集，譬如说对某个k，V_1，…，$V_k\in\mathbf{V}$，使$S=\cup_{j=1}^{k}V_j$。

例。在实分析中证明过

（1）R^n的紧子集是R^n的有界闭集（$Heine-Borel$定理），

（2）R^n不是紧的，且

（3）R^1内的一个开区间不是紧的。

定义。一个拓扑空间称谓具有**有限交性质**（缩写为$f\cdot i\cdot p$），如果具有性质(α)的闭集的每个集系$\mathbf{F}$也具有性质（β）：

（α）对每个有限子集系$\{F_1,\cdots,F_k\}\subset\mathbf{F}$，$F_1\cap\cdots\cap F_k\neq\varnothing$。

（β）$\cap_{F\in\mathbf{F}}F\neq\varnothing$。

定理3。设S是一个拓扑空间。则S是紧的当且仅当S具有$f.\ i.\ P$时。

证。由取余集给出S的闭集的集系$\mathbf{F}$与S的开集的集系$\mathbf{V}$间的一个一一对应；即，$\mathbf{V}\longleftrightarrow\mathbf{F}$当且仅当$\mathbf{V}=[F';\ F\in\mathbf{F}]$或等价地，$\mathbf{F}=[V';\ V\in\mathbf{V}]$，现在设$\mathbf{V}$对应$\mathbf{F}$，则

$$\bigcap_{F\in\mathbf{F}}F=\varnothing\Longleftrightarrow\bigcup_{V\in\mathbf{V}}V=S.$$

即，$\mathbf{V}$是一个开覆盖当且仅当$\mathbf{F}$不满足性质（β）时。且$\mathbf{V}$有一个有限子覆盖当且仅当$\mathbf{F}$不满足性质（α）时 □

定理4。紧空间的每个闭子集关于它的相对拓扑是紧的。

证。设A是紧空间S的一个闭子集。我们来证A具有$f.\ i.\ p$。

设$\mathbf{F}$是满足性质（α）的A的闭子集的任意集系。由于A是闭的且每个$F\in\mathbf{F}$在A内是闭的，每个$F\in\mathbf{F}$在S内是闭的。因此$\mathbf{F}$是满足（α）的S内闭集的集系。由于S是紧的，$\cap_{F\in\mathbf{F}}F\neq\varnothing$。但$\cap_{F\in\mathbf{F}}F\subset A$，从而$A$具有$f.\ i.\ p$。 □

定理5。设S是一个紧拓扑空间，则S的每个无限子集有一个极限点。

证：我们来证若$A\subset S$没有极限点，则A是有限的．证明分三步．

第（1）步．A是离散的；即，它的相对拓扑是离散拓扑．因为假设$a\in A$．由于a不是A的极限点，存在包含a的一个开集$U_a\subset S$使$(U_a-\{a\})\cap A=\varnothing$；即，$U_a\cap A=\{a\}$。因此每个$\{a\}$是$A$的相对拓扑中的一个开集所以$A$是离散的．

第（2）步．A是紧的．因为事实上，由于A没有极限点，$A=\overline{A}$，所以A是闭的．但，由定理4，这蕴涵A是紧的．

第（3）步．A是有限的．因为对每个$a\in A$设$U_a=\{a\}$．从而由第（1）步，$\{U_a\}_{a\in A}$是A的一个开覆盖．由第（2）步，A是紧的，从而存在一个有限子覆盖$\{U_{a_1},\cdots,U_{a_k}\}$．

因此$A=\bigcup_{i=1}^{k}U_{a_i}=\{a_1,\cdots,a_k\}$是有限的． □

1.4 连续函数

定义．设S与T为二拓扑空间．函数$f:S\to T$称谓**连续的**，如果开集的逆象是开的；即，对每个开集$U\subset T$，$f^{-1}(U)$在S内是开的．

定理1．设S与T是二拓扑空间．设$\mathbf{B}_S$与$\mathbf{B}_T$分别是S与T上拓扑的基．则$f:S\to T$为连续的当且仅当对每个$s\in S$与每个适合$f(s)\in V$的$V\in\mathbf{B}_T$，存在$U\in\mathbf{B}_S$使$s\in U$且$f(U)\subset V$．

注意．对度量空间，定理1表明我们的连续性定义等价于通常的连续性的ε，δ定义．

证：假设f是连续的．若$s\in S$且$f(s)\in V\in\mathbf{B}_T$，从而$f^{-1}(V)$是S内的开集因而是$\mathbf{B}_S$的一些元的并，由于$s\in f^{-1}(V)$，s必须属于这些基元的某一个，称它为U．则$U\subset f^{-1}(V)$，从而$f(U)\subset V$．

反之，假设对每个这样的s与V存在这样一个U．设$\widetilde{V}$在T内是开的．我们必须证明$f^{-1}(\widetilde{V})$在S内是开的．设$s\in f^{-1}(\widetilde{V})$．从而$f(s)\in\widetilde{V}$，因而$f(s)$位于适合$V_s\subset\widetilde{V}$的某个基元$V_s\in\mathbf{B}_T$内，所以，存在一个基元$U_s\in\mathbf{B}_S$使得$s\in U_s$且$f(U_s)\subset V_s\subset\widetilde{V}$；即，$U_s\subset f^{-1}(\widetilde{V})$．从而$f^{-1}(\widetilde{V})=\bigcup_{s\in f^{-1}(\widetilde{V})}U_s$；因而$f^{-1}(\widetilde{V})$在$S$内是开的．

定理2．设R，S，T都是拓扑空间．若$g:R\to S$与$f:S\to T$都是连续的，则$f\circ g:R\to T$是连续的．

证：设V在T内是开的，由于f是连续的．$f^{-1}(V)$在S内是开的．又由于g是连续的，所以$g^{-1}(f^{-1}(V))$在R内是开的．但$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$，从而$(f\circ g)^{-1}(V)$在$R$内是开的，因而$f\circ g$是连续的． □

定理3．设S与T是拓扑空间．设$f:S\to T$是连续的与全射的．若S是连通的，则T亦然．

证. 设V_1与V_2是T内适合$V_1\cup V_2=T$的不交开集.从而$f^{-1}(V_1)$与$f^{-1}(V_2)$是S内适合$f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)=S$的不交开集. 由于$S$是连通的,$f^{-1}(V_1)$或$f^{-1}(V_2)$至少有一个是空的. 但由于$f$是全射的,对某个$j$,$f^{-1}(V_j)=\varnothing$蕴涵$V_j=\varnothing$. 因此$T$是连通的. □

推论. 若$f:S\to T$是连续的, 且S是连通的, 则$f(S)$是连通的.

例 1. 设$f:[a,b]\to R^1$是在从a到b的闭区间上定义的连续实值函数. 若对某个$x_1\in[a,b]$, $f(x_1)>0$且对某个$x_2\in[a,b]$, $f(x_2)<0$, 则对某个$x_0\in[a,b]$, $f(x_0)=0$.

证. 设$T=f([a,b])$,由于$[a,b]$是连通的从而由推论T是连通的. 但是如果$0\notin T$, 则$T=(R_-\cap T)\cup(R_+\cap T)$是非空不交开集的并. 这里$R_+$表示正实数集, 而$R_-$表示负实数集. 因此$0\in T$; 即, 对某个$x_0$, $0=f(x_0)$. □

例 2. 设S^n是R^{n+1}内的单位球面; 即,

$$S^n=[(x_1,\cdots,x_{n+1})\in R^{n+1};\ \sum_{j=1}^{n+1}x_j^2=1].$$

则对$n>0$, S^n是连通的.

证. 由§1.3我们知$R^{n+1}-\{0\}$是连通的. 设

$$f: R^{n+1}-\{0\}\to S^n$$

是由

$$f(x_1,\cdots,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum x_j^2}},\frac{x_2}{\sqrt{\sum x_j^2}},\cdots,\frac{x_{n+1}}{\sqrt{\sum x_j^2}}\right)$$

定义的函数. 从而f是连续的与全射的; 因而S^n是连通的. □

例 3. 设$GL(n,R)$与$GL(n,C)$分别表示具有实值与复值的非奇异$n\times n$矩阵之集. 从而将每个矩阵各行排成一条线,$GL(n,R)$可以看成R^{n^2}的子集, 所以是作为R^{n^2}的子集关于相对拓扑的拓扑空间. 同理$GL(n,C)\subset C^{n^2}$是一个拓扑空间. (注意复n^2-空间C^{n^2}具有R^2同自身乘n^2-次的积拓扑.)现在$GL(n,R)$不是连通的.因为设

$$\Delta: R^{n^2}\to R^1-\{0\}$$

是行列式函数.Δ是连续的与全射的.由于$R^1-\{0\}$不是连通的,$GL(n,R)$不是连通的.

注意到此论断对$GL(n,C)$是错误的, 因为

$$\Delta: GL(n,C)\to C-\{0\}与C-\{0\}=R^2-\{0\}$$

是连通的. 事实上, 象在后面我们将看到的, $GL(n,C)$是连通的.

定理 4. 设S与T是二拓扑空间, 并设$f:S\to T$是连续的与全射的. 若S是紧的, 则T也是.

证. 设$\mathbf{V}$是T的一个开覆盖. 从而$[f^{-1}(V);\ V\in\mathbf{V}]$是$S$的一个开覆盖. 由于$S$是紧的, 存在有限子覆盖

$$\{f^{-1}(V_1),\cdots,f^{-1}(V_k)\}.$$

由于f是全射的, $f(f^{-1}(V_j))=V_j$, $j=1,\cdots,k$. 再由于$\bigcup_{j=1}^k f^{-1}(V_j)=S$所以