

专题篇

● 应对高考学习策略丛书

2006 辽宁高考

大演习

GAOKAODAYANXI

辽宁省实验中学教育研究室
辽宁省教育科学规划“十五”科研课题—— 编著
《示范高中减负高效的学习策略研究》课题组

数学 (中)

辽宁大学出版社

● 应对高考学习策略丛书 ●

2006 辽宁高考大演习·专题篇

数 学(中)

辽宁省实验中学 教育研究室
辽宁省教育科学规划“十五”科研课题—— 编著
《示范高中减负高效的学习策略研究》课题组

辽宁省教育科学规划“十五”科研课题
《示范高中减负高效的学习策略研究》课题组成员:

赵雪江 康文玉 王丽萍
佟新颖 李晓鸥 崔丽娟
杜志伟 耿云凤 张 引
王 慧 周 然

本 册 编 著:佟新颖

辽宁大学出版社

专题篇学习提要

普通高等学校招生考试改革工作,正处于改革的中期,改革的主要内容有两个方面。

一方面是随着教材的改革,高考试题的形式、内容发生很大的变化。自2002年起,全国绝大部分省区都开始使用新的课程标准。也就是说,自2005年起,全国绝大部分省区都开始使用所谓“新”教材的高考试题。而“新”教材的考试说明,明确地把“有助于中学实施素质教育和对学生创新意识、实践能力的培养,与素质教育特别是培养和选拔创新人才相适应”为高考试题命题的指导思想。而且,教育部的高考考试大纲不再具体要求各科目的试卷形式、试卷结构,以及学科内各教学部分所占的比例。

另一方面是高考试题命题组织形式的改革,自2004年起逐步实现分省命题。这既有利于各省根据自己的实际情况控制本省高考试题的难度,更有利于对高考试题的形式、内容的尝试和探索,进而更强烈的推动改革的第一方面的进行。各省均把“平稳过渡、循序渐进、稳中求变、稳中求新”作为命题的指导性原则,在命题中突出强调求变求新。

由于数学学科的基础性作用和自身的特点,高考数学试题理所应当走在了高考试题改革探索的最前沿。

2005年全国各地高考试题,突出地体现出了一个“新”字。较多的新颖题的出现,使大多数的考生措手不及、顾此失彼。事实上,在高考试题中所出现的任何新题,都是从考生所学过的基本知识、基本方法出发的,正所谓“题在书外,理在书中”,都是考生依据所学的基本知识、基本方法可以解决的。(当然,数学的基本方法并没有完全都包含在教材中。)这就要求考生对所学的基本知识、基本方法,能够在深刻透彻理解的基础上,实现灵活运用才能答好高考试卷,得到较高的成绩。

在目前高三数学教学内容、教学进度下,考生进行数学复习的时间是非常紧张的。这就要求考生在数学复习的过程中首先要解决的就是复习的策略和效率问题。在深刻透彻理解所学的基本知识、基本方法的基础上,做一定量的有难度、灵活性强的题目,是赢得好的学习成绩所必需的。

本书是在近几年的各地同步练习题、各地模拟试题、各地高考题中,尤其是在近两年各省高考题中精选出的那些综合性较强、背景新颖,思路缜密灵活,难度较大并且能够促使考生思考的优秀题目。针对“新”教材的特点,本书特别编撰、收录了一些关于“新”教学内容的灵活新颖的题目。突出对基本知识、基本方法的深刻理解和灵活运用,配合高三数学总复习第二轮复习使用,着力培养和提高高三年级学生的数学能力。

佟新颖
2005.8

目 录

专题一 函数和不等式	1
学习策略	1
专题测试(一)	2
专题测试(二)	5
专题测试(三)	10
专题二 数列、数列极限和数学归纳法	22
学习策略	22
专题测试(一)	23
专题测试(二)	27
专题测试(三)	31
专题三 三角函数部分	43
学习策略	43
专题测试(一)	44
专题测试(二)	48
专题四 平面向量和解析几何部分	53
学习策略	53
专题测试(一)	54
专题测试(二)	59
专题五 立体几何部分	70
学习策略	70
专题测试(一)	70
专题测试(二)	76
专题六 排列组合、二项式定理和概率统计部分	87
学习策略	87
专题测试(一)	87
专题测试(二)	92
参考答案	96



专题一 函数和不等式

学习策略

【方向指南】

函数和不等式是高中数学的核心内容。

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型,函数思想贯穿于高中数学课程的始终。不等关系较等值关系更加普遍地存在,而且不等关系的引进有助于理解把握客观事物的变化规律。所以函数的内容和思想、不等式的证明和求解自然成为历年高考所要考察、检测的重要内容。

在近几年的高考试题中,有关函数与不等式的试题占有相当大的比例,平均达到40%左右。每套试卷都会涉及到函数部分的多方面内容,试题中既包含较简单的基础题,也包含难度较大的综合题。

在“能力立意”的背景下,在“稳中求变求新”的命题原则下,函数与不等式因其较强的系统性和灵活性,自然成为高考命题的热点、试卷中的难点。可以说,有关函数与不等式的试题的解答对于每一位考生都是非常重要的,对于那些希望将数学成绩提升到高水平的考生来说更是决定性的。

【问题展板与方法指导】

集合是很抽象的概念,有关集合的较难问题或者采用列举法将其元素直接体现出来,或者使用图示将其表示出来。

函数思想是最重要的数学思想,函数化是研究变量的重要方法。

对于一个函数的研究,通常是从该函数的解析式出发,按照“定义域→周期性→奇偶性→单调性→值域→图象”的步骤来考察。

不等式的证明,体现出数学思维的条理性、严密性,和高度的灵活性,常常是整套试卷的最大难点。

值得注意的是,不等式的性质、证明、求解与函数的性质,尤其是函数单调性、函数的导数的本质联系。

【心理贴士】

用铁门把过去和未来隔断,生活在完全独立的今天里,因为今天是为明天所作的最好的准备。

专题测试(一)

一、选择题

1. 定义集合 A, B 的一种运算: $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, \text{其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A * B$ 中的所有元素数字之和为()

- A. 9 B. 14 C. 18 D. 21

2. 设数集 $M = \{x | m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$, $N = \{x | n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

3. 函数 $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - x - 1}$ 的值域是()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
 C. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

4. $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}}$ 的值属于区间()

- A. $(-3, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$

5. 若 $x \log_2 4 = 1$, 则 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$ 的值是()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

6. 若 $y = \log_a(2 - ax)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是()

- A. $0 < a < \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} < a < 1$ C. $1 < a < 2$ D. $a > 2$

7. 如果函数 $f(x) = \frac{a \cdot 3^x + 4 - a}{4(3^x - 1)}$ 为奇函数, 则 a 的值为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 若指数函数 $y = f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(2, -1)$, 则此指数函数是()

- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B. $y = 2^x$ C. $y = 3^x$ D. $y = 10^x$

9. 设 $\varphi(x)$ 为奇函数, $f(x) = x^3 - \varphi(x) - 2$, 若 $f\left(\log_a \frac{1}{a}\right) = 2$, 则 $f(1)$ 的值为()

- A. -2 B. -4 C. -6 D. -8

10. 函数 $y = 1 - \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$) 的反函数为()

- A. $y = (x-1)^2 + 1$ ($x \leq 1$) B. $y = (x-1)^2 + 1$ ($x \geq 1$)
 C. $y = (x-1)^2 - 1$ ($x \leq 1$) D. $y = (x-1)^2 - 1$ ($x \geq 1$)



11. 关于函数 $f(x) = \lg \frac{x^2+1}{|x|}$ ($x \neq 0, x \in \mathbf{R}$) 有下列命题: ①函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称; ②当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是增函数, 当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 是减函数; ③函数 $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$; ④当 $x > 1$ 时 $f(x)$ 没有反函数, 其中正确命题的序号是()

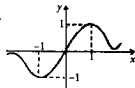
A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ②④

12. 设函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象如图所示, 则 a, b, c 的大小关系是()

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$ 

13. “ $a+b > 2c$ ”的一个充分条件是()

A. $a > c$ 或 $b > c$ B. $a > c$ 且 $b < c$ C. $a > c$ 且 $b > c$ D. $a > c$ 或 $b < c$

14. 不等式 $|x+1|(2x-1) \geq 0$ 的解集为()

A. $\{x | x \geq \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\}$ C. $\{x | x = -1 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{2}\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$

15. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+3}{3x^2+1} = 2$, 则 a 等于()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

16. $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ ($-2 < x < 2$) ()

A. 极大值为 5, 极小值为 -27

B. 极大值为 5, 极小值为 -11

C. 极大值为 5, 无极小值

D. 极小值为 -27, 无极大值

17. 函数 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, 5)$ 上的单调递增区间为()

A. $(0, 5)$ B. $(1, 5)$ C. $(\frac{1}{e}, 5)$ D. $(0, \frac{1}{e})$

二、填空题

1. $M = \{a, a+d, a+2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, 若 $M = N$, 则 $q =$ _____.

2. $P = \{x | x = 20p - 16q, p, q \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{y | y = 12m + 8n, m, n \in \mathbf{Z}\}$, $R = \{z | z = 4k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 P, Q, R 间的关系是_____.

3. 若 $A = \{1, 2\}$ 则由 A 到 A 的映射有_____个, 其中满足 $f[f(x)] = x$ 的映射有_____个.

4. $P = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $Q = \{x | 2x^2 - ax + 2 = 0\}$, 若 $P \cup Q = P$, 则 a 的取值范围是_____.

5. 集合 P 有 8 个元素, Q 也有 8 个元素, 全集 I 有 18 个元素, $P \cap Q \neq \emptyset$, $C_I(P \cup Q)$ 有 x 个元素, 那么 x 的取值范围是_____.

6. 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = a+1\}$, $N = \{(x, y) | (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则 $a =$ _____.

7. $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 则 p 的取值范围是_____.



8. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域为 A , 函数 $f[f(x)]$ 定义域是 B , 则 A, B 的关系是_____.
9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f(1-x) = 2x$, 则 $f(x) =$ _____.
10. 若 $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, 定义 $M_n^x = x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)$, 例如: $M_{-5}^2 = (-5)(-4)(-3)(-2)(-1) = 120$, 则函数 $f(x) = xM_{x-9}^{19}$ 的奇偶性是_____.
11. 函数 $f(x) = \ln(ax^2 + 3x + a)$ 的值域是实数集, 则 a 的取值范围是_____.
12. 函数 $f(x) = 4x^2 - 2(p-2)x - 2p^2 - p + 1$ 在区间 $[-1, 1]$ 内存在点 c , 使得 $f(c) > 0$, 则实数 p 的取值范围是_____.

三、解答题

1. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - (a^2 + 1)x + a > 0$ ($a \neq 0$)
2. (I) 已知 $|a| < 1, |b| < 1$, 求证: $\left| \frac{1-ab}{a-b} \right| > 1$;
- (II) 求实数 λ 的取值范围, 使不等式 $\left| \frac{1-ab\lambda}{a-b} \right| > 1$ 对满足 $|a| < 1, |b| < 1$ 的一切实数 a, b 恒成立.
3. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > b > c$), $f(1) = 0, g(x) = ax + b$
- (I) 求证: 函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象有两个交点;
- (II) 求证: $-2 < \frac{c}{a} < -\frac{1}{2}$;
- (III) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点 A, B 在 x 轴上的射影为 A_1, B_1 , 求 $|A_1 B_1|$ 的取值范围;
- (IV) 求证: 当 $x \leq -\sqrt{3}$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$.



4. 已知 $f(x) = \lg(x+1)$, $g(x) = 2\lg(2x+t)$, ($t \in \mathbf{R}$, 是参数)

(I) 当 $t = -1$ 时, 解不等式 $f(x) \leq g(x)$;

(II) 如果当 $x \in [0, 1]$ 时 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求参数 t 的取值范围.

5. 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ①对任意 $x, y \in (-1, 1)$ 都有 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$; ②当 $x \in (-1, 0)$ 时, 有 $f(x) > 0$.

(I) 判定 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的奇偶性, 并说明理由;

(II) 判定 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上的单调性, 并给出证明;

(III) 求证: $f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{1}{11}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ ($n \in \mathbf{N}$).

6. 已知函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $x \in (-\infty, 1]$

(I) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(II) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

(III) 求出该函数的值域.

专题测试(二)

一、选择题

1. 设集合 A 和集合 B 都有实数集 \mathbf{R} , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 x 映射到集合 B 中的元素 $x^3 - x + 1$, 则在映射 f 下, 象 1 的原象所成的集合是()

A. $\{1\}$

B. $\{-1\}$

C. $\{1, -1\}$

D. $\{1, 0, -1\}$

2. 对于函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) 作 $x = h(t)$ 的代换, 则总不改变函数 $f(x)$ 的值域的



代换是()

- A. $h(t) = 10^t$ B. $h(t) = t^2$ C. $h(t) = \log_5 t$ D. $h(t) = \sin t$

3. 设 $0 < x < 1$, 则函数 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ 的最小值为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

4. 已知 $x^{100} = 10^{-1}x^3$, 那么 x 的值为()

- A. $\frac{1}{10}$ B. 10 C. 100 D. 10 或 100

5. 函数 $y = \frac{\lg(1-x^2)}{|x+3|-3}$ 是()

- A. 奇函数不是偶函数 B. 偶函数不是奇函数
C. 奇函数又是偶函数 D. 非奇非偶函数

6. 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1) = 2f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 则 $f(-1.5)$ 的值是()

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{15}{4}$

7. 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数, $y = f^{-1}(x+1)$ 与 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2)$ ($x > 0$), 则 $g(\sqrt{2})$ 等于()

- A. 1 B. -1 C. 3 D. -3

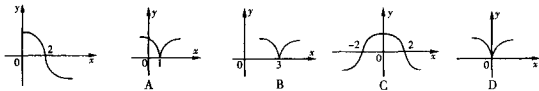
8. 已知函数 $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$, 函数 $g(x)$ 的图象与函数 $y = f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(-1)$ 的值是()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. $-\frac{3}{2}$ D. -3

9. 当 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $x^2 < \log_a(x+1)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, 2)$ D. $(1, 2]$

10. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 那么, 函数 $y = |f(x+1)|$ 的图象是()



11. $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负的实根的充要条件是()

- A. $0 < a \leq 1$ B. $a < 1$ C. $a \leq 1$ D. $0 < a \leq 1$ 或 $a < 0$

12. 关于 x 的方程 $|x| = kx + 1$ 有负根而无正根, 则实数 k 的取值范围是()

- A. $k \geq 1$ B. $2 \leq k \leq 1$ C. $-1 < k \leq 1$ D. $k > -1$

13. 若实数 a, b, c 满足 $|a-c| < |b|$, 则下面不等式中成立的是()

- A. $|a| > |b| - |c|$ B. $|a| < |b| + |c|$
C. $a > c - b$ D. $a < b + c$



14. 对函数 $f(x), x \in [a, b]$ 及 $g(x), x \in [a, b]$ 若任意 $x \in [a, b]$ 总有 $\left| \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{10}$,

我们就称 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 替代. 下面给出的函数中, 能替代 $f(x) = \sqrt{x}, x \in [4, 16]$ 的是()

A. $g(x) = \frac{1}{5}(x+6), x \in [4, 16]$ B. $g(x) = x^2 + 16, x \in [4, 16]$

C. $g(x) = x+6, x \in [4, 16]$ D. $g(x) = 2x+6, x \in [4, 16]$

15. 由等式 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$ 定义映射 $f: (a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow (b_1, b_2, b_3, b_4)$, 则 $f(4, 3, 2, 1) =$ ()

A. 10 B. 7 C. -1 D. 0

16. 设 a, b, u 都是正实数, 且 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} = 1$, 则使得 $a+b \geq u$ 恒成立的 u 的范围是 ()

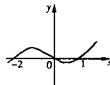
A. (0, 16] B. (0, 12] C. (0, 10] D. (0, 8]

17. 实系数方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 的一个根大于 0 且小于 1, 另一个根大于 1 且小于 2, 则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是()

A. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

18. 函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图所示, 则()

A. $a > 0, b > 0, c > 0$ B. $a > 0, b > 0, c < 0$
C. $a < 0, b < 0, c > 0$ D. $a < 0, b < 0, c < 0$



19. 下列极限中, 其值等于 2 的是()

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 2}{3n^2 + 4}$

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + 2}{3n^2 + 4}$

C. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4x+7}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} \right)$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n}{1+2+4+\dots+2^n}$

20. 已知 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + a$ (a 是常数) 在 $[-2, 2]$ 上有最大值是 3, 那么在 $[-2, 2]$ 上 $f(x)$ 的最小值是()

A. -5 B. -11 C. -29 D. -37

二、填空题

1. $P = \{x | x = 3m + 1, m \in \mathbb{N}\}, Q = \{y | y = 5n + 1, n \in \mathbb{N}\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.

2. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}, B = \{x | x^2 + 4x + p < 0\}$; 若 $B \subseteq A$, 则 p 的取值范围是 _____.

3. 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 共有 k 个子集 $A_i (i=1, 2, \dots, k)$, 记集合 A_i 的元素之和为 $S_i (i=1, 2, \dots, k)$, 则 $S_1 + S_2 + \dots + S_k =$ _____.

4. 设数集 $M = \left\{x | m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\right\}, N = \left\{x | n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\right\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 若把 $b-a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是 _____.

5. 若记非空集合 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$, 则 $M - (M - N) =$ _____.

6. 若集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \cup A_2 = A$, 则称 (A_1, A_2) 为集合 A 的一种分拆, 并规定: 当且仅当



$A_1 = A_2$ 时, (A_1, A_2) 与 (A_2, A_1) 为集合 A 的同一种分拆, 则集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的不同种分拆种数是_____.

7. 已知不恒为零的函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 满足 $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x-y}{2}\right)$, 则函数 $f(x)$ 的奇偶性是_____.

8. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是奇函数和偶函数, 且 $f(x) + g(x) = x\sqrt{5-x^2} + x^2$, 则 $f(x) =$ _____, $g(x) =$ _____.

9. 设 $n \in \mathbf{N}$, 则 $|n-1| + |n-2| + \dots + |n-99| + |n-100|$ 的最小值是_____.

10. 函数 $f(x) = (x-2)^2 + 1$ 的定义域和值域都是 $[a, b]$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

11. 若 x, y 满足 $3x^2 + 2y^2 = 6x$, 则 $x^2 + y^2$ 的取值范围是_____.

12. 函数 $f(x) = \frac{ax+9}{x+a}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

1. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ($a > 0, b \in \mathbf{R}$), 设方程 $f(x) = x$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

(I) 如果 $x_1 < 2 < x_2 < 4$, 设函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = x_0$, 求证 $x_0 > -1$;

(II) 如果 $0 < x_1 < 2$, 且 $f(x) = x$ 的两实根相差为 2, 求实数 b 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\frac{7x}{x^2 + x + 1}$

(I) 求当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;

(II) 试确定函数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) 的单调增区间, 并证明你的结论;

(III) 若 $x_1 \geq 2$, 且 $x_2 \geq 2$

证明: $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$.

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 且 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$, 如果 $f(x)$ 为奇函数, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = 3^x$.

(I) 求 $f\left(\frac{2001}{4}\right)$;



(II) 当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, 求 $f(x)$.

(III) 是否存在这样的正整数 k , 使得当 $2k + \frac{1}{2} < x < 2k + 1$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时, $\log_3 f(x) > x^2 - kx - 2k$ 有解.

4. 设曲线 $y = \frac{ax^3}{3} + \frac{1}{2}bx^2 + cx$ 在点 x 处的切线斜率为 $k(x)$, 且 $k(-1) = 0$, 对一切实数 x , 不等式 $x \leq k(x) \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ ($a \neq 0$) 恒成立.

(I) 求 $k(1)$ 的值;

(II) 求函数 $k(x)$ 的表达式;

(III) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k(i)} > \frac{2n}{n+2}$

5. 已知三次函数 $f(x) = x(x-a)(x-b)$ ($0 < a < b$)

(I) 当 $f(x)$ 取得极值时 $x = s$ 和 $x = t$ ($s < t$), 求证: $0 < s < a < t < b$;

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

6. 已知 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 在 $[0, 2]$ 上是减函数, 且方程 $f(x) = 0$ 有三个根, 它们分别为 $\alpha, 2, \beta$.

(I) 求 c 的值;

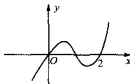
(II) 求证: $f(1) \geq 2$;

(III) 求 $|\alpha - \beta|$ 的取值范围.

专题测试(三)

一、选择题

1. 设全集为 \mathbf{R} , $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x | |x - 5| < a\}$ (a 为常数), 且 $11 \in B$, 则 ()
- A. $\complement_{\mathbf{R}}A \cup B = \mathbf{R}$ B. $A \cup \complement_{\mathbf{R}}B = \mathbf{R}$ C. $\complement_{\mathbf{R}}A \cup \complement_{\mathbf{R}}B = \mathbf{R}$ D. $A \cup B = \mathbf{R}$
2. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 M 与 N 的关系是 ()
- A. $M \supseteq N$ B. $M \subseteq N$ C. $M \subsetneq N$ D. $M = N$
3. 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 " $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ " 是 " $M = N$ " _____ 的条件 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要
4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ -x+2, & x > 1 \end{cases}$ 是 ()
- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 既奇又偶函数
5. 函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数的充要条件是 ()
- A. $a = 0$ B. $b = 0$ C. $a = 0$ 且 $b = 0$ D. $a = 0$ 或 $b = 0$
6. 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图象如图, 则 b 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
7. 若函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = \lg(x+1)$ 的图象绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 则 $f(x) =$ ()
- A. $f(x) = 10^{-x} - 1$ B. $f(x) = 10^{-x} + 1$
C. $f(x) = 10^x - 1$ D. $f(x) = 10^x + 1$





8. 在 $P(1,1), Q(1,2), M(2,3)$ 和 $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 四点中, 函数 $y = a^x$ 的图象与其反函数的图象的公共点只可能是()

- A. P B. Q C. M D. N

9. 函数 $y = 3^{x^2-1} (-1 \leq x < 0)$ 的反函数是()

- A. $y = \sqrt{1 + \log_3 x} (x \geq \frac{1}{3})$ B. $y = -\sqrt{1 + \log_3 x} (x \geq \frac{1}{3})$
 C. $y = \sqrt{1 + \log_3 x} (\frac{1}{3} < x \leq 1)$ D. $y = -\sqrt{1 + \log_3 x} (\frac{1}{3} < x \leq 1)$

10. 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x+1}-1) (x > 0)$ 的反函数 $f^{-1}(x) = ()$

- A. $f^{-1}(x) = e^{2x} + 2e^x (x \in \mathbf{R})$ B. $f^{-1}(x) = e^{2x} - 2e^x (x \in \mathbf{R})$
 C. $f^{-1}(x) = e^{2x} + 2e^x (x \in \mathbf{R}^+)$ D. $f^{-1}(x) = e^{2x} - 2e^x (x \in \mathbf{R}^+)$

11. 函数 $f(x) = ax^2 + x + 1$ 有极值的充要条件是()

- A. $a > 0$ B. $a \geq 0$ C. $a < 0$ D. $a \leq 0$

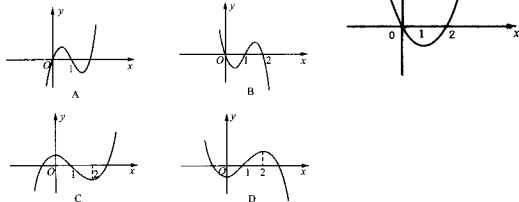
12. 设 $a > 0, f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为()

- A. $[0, \frac{1}{a}]$ B. $[0, \frac{1}{2a}]$ C. $[0, \frac{b}{2a}]$ D. $[0, \frac{b-1}{2a}]$

13. 设 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数和偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$ 且 $g(-3) = 0$, 则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集是()

- A. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, 0) \cup (0, 3)$
 C. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

14. 设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, $y = f'(x)$ 的图象如右图所示, 则 $y = f(x)$ 的图象最有可能是()



15. 已知 $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为()

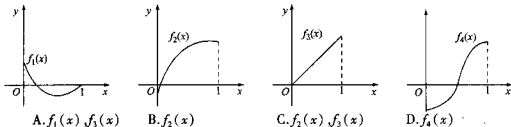
- A. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

16. 函数 $y = \frac{\ln x}{x} (x > 1)$, 可以猜想下列命题中的真命题只能是()



- A. $y = \frac{\lg x}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调函数
 B. $y = \frac{\lg x}{x}, x \in (1, +\infty)$ 的值域为 $(0, \frac{\lg 3}{3}]$
 C. $y = \frac{\lg x}{x}, x \in (1, +\infty)$ 有最小值
 D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0, n \in \mathbf{N}$

17. 如图所示, $f_i(x)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , 任意 $\lambda \in [0, 1], f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立” 的有 ()



18. 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P \\ -x, & x \in M \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 \mathbf{R} 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}, f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$, 给出下列四个判断: ①若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$; ②若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$; ③若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$; ④若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$.

其中正确判断有 ()

- A. ①② B. ③④ C. ①③ D. ②④

19. 设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$), 区间 $M = [a, b]$ ($a < b$), 集合 $N = \{y | y = f(x), x \in M\}$, 则使 $M = N$ 成立的实数对 (a, b) 有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数多个

20. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 \mathbf{R} 上的函数, 且方程 $x - f[g(x)] = 0$ 有实数解, 则 $g[f(x)]$ 不可能是 ()

- A. $x^2 + x - \frac{1}{5}$ B. $x^2 + x + \frac{1}{5}$ C. $x^2 - \frac{1}{5}$ D. $x^2 + \frac{1}{5}$

二、填空题

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ 则不等式 $x + (x+2) \cdot f(x+2) \leq 5$ 的解集是 _____.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) =$ _____.

3. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的方法, 可求得 $f(-5) + f(-4) + \dots + f(0) + \dots + f(5) + f(6) =$ _____.



4. 若存在常数 $p > 0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px) = f(x - \frac{p}{2})$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $f(x)$ 的一个正周期为_____.

5. 若直线 $y = 2a$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象有两个公共点, 则 a 的取值范围是_____.

6. 若函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y = \lg(x+1)$ 的图象关于直线 $x - y = 0$ 对称, 则 $f(x) =$ _____.

7. 关于函数 $f(x) = \sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$, 有下面四个结论: ① $f(x)$ 是奇函数; ② 当 $x > 2003$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$; ③ $f(x)$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$; ④ $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$.

其中正确结论是_____.

8. 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数, 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合, 设 $a > b > 0$, 给出下列不等式: ① $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$; ② $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$; ③ $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$; ④ $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$.

其中成立的是_____.

9. 若正数 a, b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是_____.

10. 若记号 “*” 表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a * b = \frac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符 “*” 和 “+”, 且对于任意 3 个实数 a, b, c 都能成立的一个等式可以是_____.

三、解答题

1. 已知 $c > 0$. 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 \mathbf{R} 单调递减. Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} . 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ ($a > 0$).

(I) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;

(II) 假设对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$, 不等式 $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.