高师函授教材

13

解析几何习题解

第二册

辽宁教育学院
铁岭地区教育学院 编

解析几何习题解

（第二册）

目 录

第七章　空间直角坐标系及向量代数初步

1　在空间直角坐标系中，作出下列各点：

（1）$A(3,\ 4,\ 5)$；

（2）$B(-2,-1,-1)$；

（3）$C(3,\ 3,\ -3)$；

（4）$D(-3,-3,3)$．

〔解〕　在直角坐标系中，A，B，C，D各点的位置是：

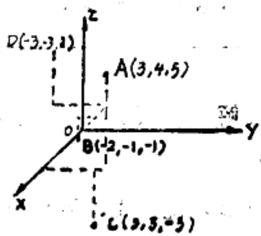

图7-1

2　指出下列各点的位置：

（a）$(1,0,0)$；（b）$(0,2,0)$；（c）$(0,0,2)$；

（d）$(3,\ 0,\ 2)$；（e）$(0,\ 0,\ 0)$

〔解〕 （a）$\because y=0$，$z=0$，故在 x 轴上；

（b）$\because x=0$，$z=0$，故在 y 轴上；

（c）$\because x=0$，$y=0$，故在 z 轴上；

（d）$\because y=0$，故在 xoz 坐标面上；

（e）$\because x=y=z=0$，故为坐标原点。

3 坐标满足下列条件之一的点，位于哪几个卦限：

（1）$x=y$；（2）$x=y=z$；

（3）$yz>0$；（4）$xyz<0$。

〔解〕 （1）位于Ⅰ，Ⅲ，Ⅴ，Ⅶ卦限（z 轴在内）；

（2）位于Ⅰ，Ⅶ卦限（原点在内）；

（3）位于Ⅰ，Ⅱ卦限或者Ⅶ Ⅷ卦限；

（4）当 $x<0$，$y<0$，$z<0$ 时位于Ⅶ卦限；

或者当 $x<0$，$y>0$，$z>0$ 时位于Ⅱ卦限；

或者当 $x>0$，$y<0$，$z>0$ 时位于Ⅳ卦限；

或者当 $x>0$，$y>0$，$z<0$ 时位于Ⅴ卦限。

4　一立方体其底面的中心位于原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，已知其棱长为 a，求它各顶点的坐标。

〔解〕　如图，根据题设，棱长为 a 的立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，各顶点坐标如下：

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ 0\right)$、

$B\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0\right)$、

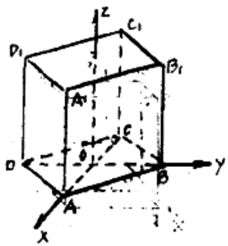

图7-2

$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ 0\right)$、

$D\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0\right)$、

$A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ a\right)$、　$B_1\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ a\right)$、

$C_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0,\ a\right)$、　$D_1\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ a\right)$。

5　已知长方体三个棱的长为2，7，8，若以它的对称中心为原点，以平行于上述三个棱的直线依次为x轴，y轴和z轴，求长方体各顶点的坐标。

〔解〕如图，根据题设，所求长方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的各顶点坐标分别为：

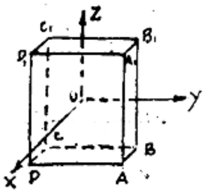

图7-3

$$A\left(1，\frac{7}{2}，-4\right)、$$

$$B\left(-1，\frac{7}{2}，-4\right)、$$

$$C\left(-1，-\frac{7}{2}，-4\right)、$$

$$D\left(1，-\frac{7}{2}，-4\right)、$$

$$A_1\left(1、\frac{7}{2}，4\right)、\quad B_1\left(-1，\frac{7}{2}，4\right)、$$

$$C_1\left(-1，-\frac{7}{2}，4\right)、\ D_1\left(1，-\frac{7}{2}，4\right).$$

6　分别求点$P(x, y, z)$关于y轴、z轴、xoy平面、zox平面对称点的坐标。

〔解〕　∵对称于y轴，故x坐标和z坐标取相反值，

即　$P_1(-x, y, -z)$；

∵　对称于z轴，故x坐标和y坐标取相反值，

即　$P_2(-x, -y, z)$；

∵　对称于xoy平面，故z坐标取相反值，

即　$P_3(x, y, -z)$；

∵　对称于zox平面，故y坐标取相反值，

即　$P_4(x, -y, z)$。

7　求点$P(2, -3, 4)$关于原点，各坐标轴，各坐标面的对称点的坐标。

〔解〕已知点$P(2, -3, 4)$，

∵　关于原点对称，故坐标同时均取相反值，

即　$P_1(-2, 3, -4)$；

∵　对称于x轴，故y坐标和z坐标取相反值，

即　$P_2(2, 3, -4)$。

∵ 对称于y轴，故x坐标和z坐标取相反值，

即 $P_3(-2, -3, -4)$；

∵ 对称于z轴，故x坐标和y坐标取相反值，

即 $P_4(-2, 3, 4)$；

∵ 对称于xoy平面，故z坐标取相反值，

即 $P_5=(2, -3, -4)$；

∵ 对称于xoz平面，故y坐标取相反值，

即 $P_6(2, 3, 4)$；

∵ 对称于yoz平面，故x坐标取相反值，

即 $P_7(-2, -3, 4)$。

8 设$P(x, y, z)$为空间的一点，求点P在各坐标轴上，各坐标面上的垂足的坐标。

〔解〕 设$P(x, y, z)$为空间的一点，

在x轴、y轴和z轴上的垂足坐标分别为$(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$和$(0, 0, z)$；

在xoy，xoz和yoz坐标面上的垂足的坐标分别为

$(x, y, 0)$，$(x, 0, z)$和$(0, y, z)$。

9　以气象台为标准，已知一气球在空间的位置是：向南300米，向东200米，距地面500米，试建立空间直角坐标系，标出气球的位置点。

〔解〕　设直角坐标系原点为气象站的位置，取向南，向东和向上方向分别x，y和z轴的正方向，用点M表示气球的位置。则根据题意，知坐标面xoy为地面，且

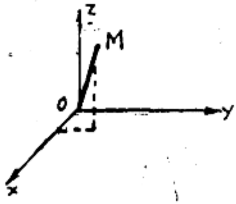

图7-4

$x=300$米，$y=200$米，
$z=500$米，气球位置如图。

10　设$ABCDEF$为正六边形，O是它的中心，在向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{DE}$ $\overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{FA}$中，有哪几个是相等的。

〔解〕　如图，设$ABCDEF$为正六边形，O是它的中心，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}$；$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OE}$；$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OF}$；$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}$；$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{OB}$，

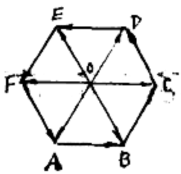

图7-5

11 以从一点引出的三个非共面的向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱作平行六面体。试用$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$表示平行六面体内的四条对角线。

〔解〕 如图，平行六面体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，$\overrightarrow{DB_1}$、$\overrightarrow{BD_1}$、$\overrightarrow{AC_1}$和$\overrightarrow{CA_1}$为它的四条对角线。则有：

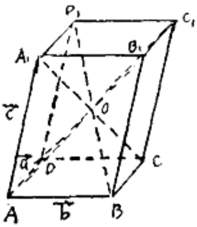

图7-6

$$\overrightarrow{DB_1}=\vec{b}-\vec{a}+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{BD_1}=\vec{c}-(\vec{b}-\vec{a})=\vec{c}+\vec{a}-\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CA_1}=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}.$$

12 设$ABCDEF$为正六边形，如果取下列向量作为$\vec{a}$和$\vec{b}$：

（1）$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AF}$；

（2）$\vec{a}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{b}=\overrightarrow{DE}$；

（3）$\vec{a}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{b}=\overrightarrow{DF}$，

试用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FA}$。

〔解〕如图：

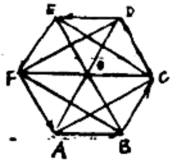

图7-7

（1）$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$，
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$，
$\overrightarrow{EF}=-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$，
$\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=-\vec{b}$。

（2）$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DE}=-\vec{b}$
$\overrightarrow{BC}=a-(-\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$。
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{b}$，$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}$
$=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{CD}=-\vec{a}-2\vec{b}$

（3）向量 $a=AC$；$b=DF$，共线，a，b 不能表示与它们不共线的向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FA}$。

13　试用几何方法证明： $$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}$$

〔证〕以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 0，其中 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}$$

$$\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}$$

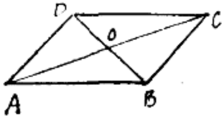

图7-8

$\therefore\quad \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$

即 $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}$。

> 14 设 $AB=a-2c$， $BC=3b+c$，$CD=5a+6b-8c$。（a、b、c不共面），求连接四边形$ABCD$两对角线中点的向量。

〔**解**〕 设E、F分别是四边形$ABCD$的二对角线$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$的对角线之中点。

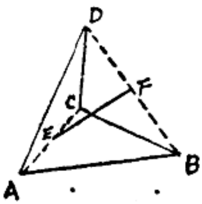

图7—9

知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{c}$

$\overrightarrow{BC}=3\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{CD}=5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$

则有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}-2\vec{c}+3\vec{b}+\vec{c}$

$=\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=3\vec{b}+\vec{c}+5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$

$=5\vec{a}+9\vec{b}-7\vec{c}$

所求之向量为

$$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$=-\frac{1}{2}(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})+\vec{a}-2\vec{c}+\frac{1}{2}$$

$$(5\vec{a}+9\vec{b}-7\vec{c})$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}-2\vec{c}$$

$$+\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}-\frac{7}{2}\vec{c}$$

$$=3\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{c}。$$

15　什么条件下，向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线？

〔解〕　设 $\lambda \neq 0$，若向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线，必有

$$\vec{a}+\vec{b}=\lambda(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\vec{a}-\lambda\vec{a}=-\vec{b}-\lambda\vec{b}$$

$$(1-\lambda)\vec{a}=-(1+\lambda)\vec{b}$$

即 $\vec{a}=-\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\vec{b}$

从而 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线

故当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线时向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 和 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线。

> 16 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 有公共起点，在什么条件下向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 平分向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 间的夹角？

〔解〕 （代数法）设向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 分向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 间的角为 θ_1 和 θ_2。

当 $\theta_1=\theta_2$ 时由余弦定理有：

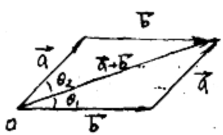

图7-10

$$\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{2|\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|}$$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|^2+|\vec{a}||\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^3=|\vec{a}|^2|\vec{b}|$$

$$+|\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{b}|^3$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|(|\vec{b}|-|\vec{a}|)+|\vec{a}+\vec{b}|^2(|\vec{a}|-|\vec{b}|)$$

$$+(|\vec{b}|-|\vec{a}|)(|\vec{b}|^2+|\vec{b}||\vec{a}|+|\vec{a}|^2)=0$$

$$(|\vec{a}|-|\vec{b}|)(-|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2$$

$$-|\vec{b}||\vec{a}|-|\vec{a}|^2)=0$$

即 $(|\vec{a}|-|\vec{b}|)[|\vec{a}+\vec{b}|^2-(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2]=0$

$\because$ $|\vec{a}+\vec{b}|^2-(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2\neq 0$

$\therefore$ $|\vec{a}|-|\vec{b}|=0$

故 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$时，向量$\vec{a}+\vec{b}$平分向量$\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角。

〔另解〕（几何法）设向量$\vec{a}+\vec{b}$分向量$\vec{a}$和$\vec{b}$间的角为θ_1和θ_2。

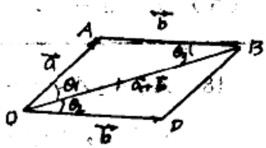

图7-11

$\because$ $\overrightarrow{OD}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\angle\theta_2=\angle\theta_3$

（即$\angle ABO$）

又若 $\theta_1=\theta_2$，则

$\triangle OAB$为等腰三角形，

即 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$，也就是$|\vec{a}|=|\vec{b}|$时向量$\vec{a}+\vec{b}$平分向量$\vec{a}$和$\vec{b}$间的夹角。

17 要使（1）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

（2）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（3）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

（4）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（5）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$

向量$\vec{a}$和$\vec{b}$应满足什么条件？

〔**解**〕（1）向量$\vec{a}$与$\vec{b}$应构成直角；

（2）向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}+\vec{b}$应共线；

（3）向量$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$应共线；

（4）向量$\vec{a}-\vec{b}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$应共线。

（5）向量$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$应共线。

18 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$是平面上的正多边形，$O$是中心，证明：

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$$

〔证〕　分两步来证明：

Ⅰ）当 n 是偶数时，

$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$……，$\overrightarrow{OA_n}$中的任一个向量都有其中的一个向量与之方向相反，模相等。

从而$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，……，$\overrightarrow{OA_n}$中有两两之和为零。

即　$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$

Ⅱ）当 n 是奇数时：

设　$n=2k+1$．其中$\vec{a}$是$\overrightarrow{OA_1}$的单位向量，则

$$\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_n}=2k\cos\frac{2\pi}{n}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_{n-1}}=2k\cos\frac{4\pi}{n}\vec{a}$$

…………………………………………

$$\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OA_{k+1}}=2k\cos\frac{2k\pi}{n}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OA_1}=k\vec{a}$$