

重力固体潮的调和分析

北京大学地球物理系 重力进修班编
国家地震局武汉地震大队

一九七九年五月

一、前 言

1966年邢台地震以后，为了监视震情、预报地震，国家地震局陆续在北安河、密云等地建立了十几个重力固体潮台站。十几年来积累了大量的观测资料。分析、研究它们与强震在时间上的对应关系，对研究震源物理、探索预报地震的途径无疑是非常重要的。

为了提高重力固体潮的观测和分析水平，国家地震局委托北京大学地球物理系和武汉地震大队于1978年2月—10月在北京大学办了一期重力进修班。重力进修班对重力固体潮的理论、观测和分析方法进行了系统的学习，并在此基础上对到目前为止各个重力固体潮台站有代表性的半年左右的观测资料进行了系统的分析处理。为了交流经验，探索利用重力固体潮观测结果预报地震的方法，我们将有关重力固体潮的理论和分析方法以及各个台站的初步分析结果汇总如下，供重力固体潮台站观测和分析人员以及其他地震工作者参考。

参加进修班教学工作的有武汉地震大队的李瑞浩同志、国家地震局地质所的朱涵云同志、北京地震队的华昌才同志、北京大学的吴庆鹏同志和于淑筠同志。进修班的全体学员参加了计算工作。总结的全文由吴庆鹏同志执笔，附图和计算的结尾工作由上海地震办公室的周家庆同志、河北地震局的赵世玖同志和天津市地震局的韩润泉同志等完成。

目 录

一、前言	1
二、重力固体潮	1
1. 起潮力和起潮力位	1
2. 起潮力位的拉普拉斯展开	3
3. 起潮力位的杜德森展开, 潮汐波	8
4. 重力固体潮	13
5. 勒甫数 h 、 k	17
6. 重力潮汐因子	18
附录: 重力固体潮理论值的计算	19
三、重力固体潮观测资料的调和分析	23
1. 坐标组合理论	23
2. 零点飘移的计算方法	27
3. 勒卡拉兹调和分析方法	31
4. 维涅第科夫调和分析方法	50
四、北安河、密云等重力固体潮台站观测资料的调和分析	59
1. 台站布局	59
2. 调和分析结果	59
五、初步结论	130
六、附录	132
1. 利用郎曼公式计算重力固体潮理论值的程序	132
2. 勒卡拉兹调和分析方法的计算程序	138
3. 维涅第科夫调和分析方法的计算程序	155

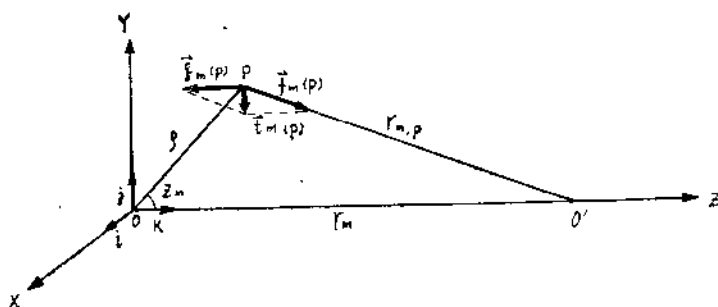


图 2-2

此处

k = 引力常数

M = 月亮的质量 7.3537×10^{25} 克

$r_m = 00'$

这样，月亮在 p 点的引力 $\vec{f}_m(p)$ 和地球的平动在地球内部形成的惯性离心力 $\vec{q}_m(p)$ 的矢量和 $\vec{t}_m(p)$ 称为月亮在 p 点的起潮力，即

$$\vec{t}_m(p) = \vec{f}_m(p) + \vec{q}_m(p) \quad (2-4)$$

考虑到

$$\vec{f}_m(p) = \nabla_p u_m(p) \quad (2-5)$$

此处

$u_m(p)$ = 月亮在 p 点的引力位

$$u_m(p) = k \frac{M}{r_{m,p}} \quad (2-6)$$

而

$$\vec{q}_m(p) = \nabla_p Q_m(p) \quad (2-7)$$

此处

$Q_m(p)$ = 地球平动在 p 点产生的惯性离心力位

$$Q_m(p) = -k \frac{M}{r_m^2} Z \quad (2-8)$$

Z = p 点的坐标

$Z = \rho \cos Z_m$

ρ = p 至地球质心 0 的距离

Z_m = 月亮对 p 点的天顶距

因而有

$$\begin{aligned} \vec{t}_m(p) &= \nabla_p [u_m(p) + Q_m(p)] \\ &= \nabla_p T_m(p) \end{aligned} \quad (2-9)$$

此处

$$T_m(p) = u_m(p) + Q_m(p) \quad (2-10)$$

即月亮在 p 点的引力位 $u_m(p)$ 和地球平动在 p 点形成的惯性离心力位 $Q_m(p)$ 的和 $T_m(p)$ 称为

月亮在 p 点的起潮力位。

同理, 太阳在地球内部任一点 p 的起潮力 $\vec{t}_s(p)$ 等于太阳在 p 点的引力 $\vec{f}_s(p)$ 和由于地球绕太阳旋转在地球内部形成的惯性离心力 $\vec{q}_s(p)$ 的矢量和, 即

$$\vec{t}_s(p) = \vec{f}_s(p) + \vec{q}_s(p) \quad (2-11)$$

考虑到

$$\vec{f}_s(p) = \nabla_p u_s(p) \quad (2-12)$$

$$\vec{q}_s(p) = \nabla_p Q_s(p) \quad (2-13)$$

此处

$u_s(p)$ = 太阳在 p 点的引力位

$Q_s(p)$ = 地球绕太阳旋转在 p 点产生的离心力位

$$u_s(p) = k \frac{s}{r_{s,p}} \quad (2-14)$$

$$Q_s(p) = -k \frac{s}{r_s^2} \rho \cos Z_s \quad (2-15)$$

此处

s = 太阳的质量 1.993×10^{33} 克

$r_{s,p}$ = 太阳的质心到 p 点的距离

ρ = p 至地球质心的距离

Z_s = 太阳对 p 点的天顶距

r_s = 太阳质心到地球质心的距离

这样, 太阳在地球内部任一点 p 的引力位 $u_s(p)$ 和地球绕太阳旋转在地球内部形成的惯性离心力位 $Q_s(p)$ 和 $T_s(p)$ 称为太阳在 p 点的起潮力位, 即

$$T_s(p) = u_s(p) + Q_s(p) \quad (2-16)$$

地球内部任一点 p 的起潮力位 $T(p)$ 等于月亮在 p 点的起潮力位 $T_m(p)$ 和太阳在 p 点的起潮力位 $T_s(p)$ 的和, 即

$$T(p) = T_m(p) + T_s(p) \quad (2-17)$$

2. 起潮力位的拉普拉斯展开

(1) 起潮力位的级数展开

首先讨论月亮在 p 点的起潮力位 $T_m(p)$ 。由于地球的自转和月亮的质心 O' 绕月地系统公共质心 G 的旋转, 月亮质心 O' 到 p 点的距离 $r_{m,p}$ 、月亮质心 O' 到地球质心 O 的距离 r_m 和月亮对 p 点的天顶距 Z_m 都是时间 t 的函数。因此月亮在 p 点的起潮力位 $T_m(p)$ 不只是 p 点在地球内部的位置的函数, 而且是时间 t 的函数。现在讨论月亮的起潮力位 $T_m(p)$ 在地球内部的空间分布特点及其随着时间的变化规律。

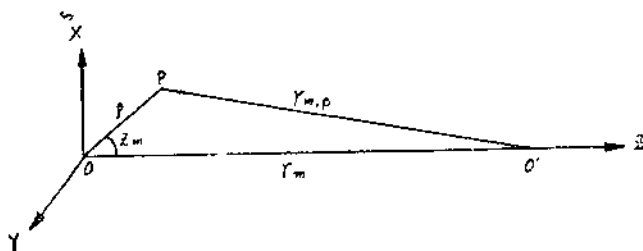


图 2-3

如图 (2-3) 所示, O 为地球的质心, O' 为月亮的质心, p 为地球内部任一点, 则有

$$\frac{1}{r_{m,p}} = (r_m^2 + \rho^2 - 2r_m \rho \cos Z_m)^{-\frac{1}{2}} \quad (2-18)$$

考虑到 $\rho/r_m \leq R/r_m$, 而 $R/r_m \approx 1/60$, 所以可以把 $1/r_{m,p}$ 展开成 ρ/r_m 的级数, 即

$$\frac{1}{r_{m,p}} = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^n p_n(\cos Z_m) \quad (2-19)$$

此处

$$\left. \begin{aligned} p_n(\cos Z) &= \cos Z \text{ 的 } n \text{ 次勒让德多项式} \\ p_0(\cos Z) &= 1 \\ p_1(\cos Z_m) &= \cos Z_m \\ p_2(\cos Z_m) &= \frac{3}{2} \cos^2 Z_m - \frac{1}{2} \\ p_3(\cos Z_m) &= \frac{5}{2} \cos^3 Z_m - \frac{3}{2} \cos Z_m \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

这样, 根据 (2-20) 式, 月亮在 p 点的起潮力位 $T_m(p)$ 可以写成

$$\begin{aligned} T_m(p) &= k \frac{M}{r_{m,p}} - k \frac{M}{r_m^2} \rho \cos Z_m \\ &= k \frac{M}{r_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^n p_n(\cos Z_m) - \frac{\rho}{r_m} \cos Z_m \right] \\ &= k \frac{M}{r_m} \left[1 + \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^2 p_2(\cos Z_m) + \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^3 p_3(\cos Z_m) + \dots \right] \end{aligned} \quad (2-21)$$

考虑到 $1/r_m$ 与 p 点在地球内部的位置无关, 因而

$$\nabla_p \frac{1}{r_m} = 0$$

因此, 若不考虑常数项, 则 (2-21) 式可以写成

$$T_m(p) = k \frac{M}{r_m} \left[\left(\frac{\rho}{r_m} \right)^2 p_2(\cos Z_m) + \left(\frac{\rho}{r_m} \right)^3 p_3(\cos Z_m) + \dots \right] \quad (2-22)$$

因为 $\rho/r_m \leq 1/60.3$, 所以 (2-22) 式中的第一项占总起潮力位的 98% 以上, 因此若只考虑二阶勒让德多项式 $p_2(\cos Z)$, 则 $T_m(p)$ 为

$$\begin{aligned} T_m(p) &= k \frac{M \rho^2}{r_m^3} p_2(\cos Z_m) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k M \rho^2}{r_m^3} (3 \cos^2 Z_m - 1) \end{aligned} \quad (2-23)$$

同理, 太阳在 p 点的起潮力位 $T_s(p)$ 可以写成

$$T_s(p) = \frac{1}{2} \frac{kS\rho^2}{r_s^3} (3\cos^2 Z_s - 1) \quad (2-24)$$

(2) 杜德森常数

杜德森引入一个常数 G

$$G = \frac{3}{4} k \frac{MR^2}{C_m^3} \quad (2-25)$$

此处

R = 地球的平均半径 6371公里

C_m = 月心 O' 至地心的平均距离 $C_m = 60.3R$

将 k 、 M 、 R 和 C_m 的数值代入 (2-25) 式中去, 得

$$G = 26206 \text{ 厘米}^2/\text{秒}^2 \quad (2-26)$$

G 为杜德森常数。此时 (2-23) 式可以写成

$$T_m(p) = \frac{2}{3} G \left(\frac{C}{r_m} \right)^3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (3\cos^2 Z_m - 1) \quad (2-27)$$

用 G_s 表示

$$G_s = \frac{3}{4} k \frac{S}{C_s^3} R^2 \quad (2-28)$$

此处

C_s = 地球至太阳的平均距离

此时

$$G_s = \left(\frac{C}{C_s} \right)^3 \frac{S}{M} G \quad (2-29)$$

考虑到

$$\frac{R}{C_s} = \frac{1}{23400}$$

将 C_m 、 C_s 、 S 和 M 的数值代入上式, 得

$$G_m = 0.46051 G \quad (2-30)$$

这样, (2-24) 式可以写成

$$T_s(p) = \frac{2}{3} G_s \left(\frac{C_s}{r_s} \right)^3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 (3\cos^2 Z_s - 1) \quad (2-31)$$

(3) 拉普拉斯三种潮

在月亮和太阳的起潮力位的表达式 (2-27) 和 (2-31)

中, C_m 、 C_s 是时间 t 的函数,

而 Z_m 和 Z_s 则是 p 点在地球内部的位置和时间 t 的函数。

现在讨论起潮力位在地球内部的空间分布特点及地球上任一点的起潮力位随着时间的变化规律。为此, 选取天球坐标。如图2-4所示, C 为北天极, p 为 p 点的天顶, M 为某一瞬时月亮在天球上的位置, 则在球面三角形 CPM 中, 有

$$\cos Z_m = \sin \varphi \sin \delta_m + \cos \varphi \cos \delta_m \cos H_m \quad (2-32)$$

此处

φ = p 点的纬度

δ_m = 月亮的赤纬

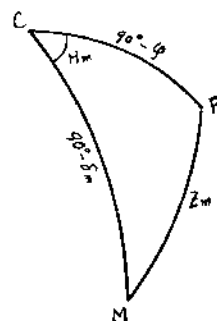


图 2-4

H_m = 月亮对 p 点的时角

根据球函数加法定理

$$p_n(\cos Z_m) = p_n(\sin \varphi) p_n(\sin \delta_m) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} p_n^m(\sin \varphi) p_n^m(\sin \delta_m) \cos mH_m \quad (2-33)$$

有

$$p_2(\cos Z_m) = p_2(\sin \varphi) p_2(\sin \delta_m) + 2 \sum_{m=1}^2 \frac{(2-m)!}{(2+m)!} p_2^m(\sin \varphi) p_2^m(\sin \delta_m) \cos mH_m$$

考虑到

$$p_2(\sin \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}$$

$$p_2(\sin \delta_m) = \frac{3}{2} \sin^2 \delta_m - \frac{1}{2}$$

$$p_2^1(\sin \varphi) = 3 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$p_2^1(\sin \delta_m) = 3 \cos \delta_m \sin \delta_m$$

$$p_2^2(\sin \varphi) = 3 \cos^2 \varphi$$

$$p_2^2(\sin \delta_m) = 3 \cos^2 \delta_m$$

因而有

$$p_2(\cos Z_m) = \frac{3}{4} \left[\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m + \sin^2 \varphi \sin 2\delta_m \cos H_m + (1 - 3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right) \right]$$

因而，若只考虑二阶勒让德级数，则有

$$T_{22}(p) = G \left(\frac{C_m}{r_m} \right)^3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left[\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m + \sin^2 \varphi \sin 2\delta_m \cos H_m + (1 - 3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta_m \right) \right] \quad (2-34)$$

同理，太阳在 p 点的起潮力位为

$$T_{s2}(p) = G_s \left(\frac{C_s}{r_s} \right)^3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \left[\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos 2H_s + \sin^2 \varphi \sin 2\delta_s \cos H_s + (1 - 3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta_s \right) \right] \quad (2-35)$$

此处

H_s = 太阳对 p 点的时角

δ_s = 太阳的赤纬

A. 半日潮

(2-34)、(2-35) 式中第一项

$$\cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \quad (2-36)$$

$$\cos 2\varphi \cos 2\delta_s \cos 2H_s \quad (2-37)$$

对应的起潮力位，周期约为半日，与它们有关的潮汐现象称为半日潮。(2-36)式中的 H_m 是月亮对 p 点的时角，对地面上任一点 p 而言，它的平均速度为 $360^\circ/\text{太阴日}$ ，因而 $2H_m$ 的角速度为 $180^\circ/\text{太阴日}$ ，所以 $\cos 2H_m$ 的平均周期为半太阴日。与(2-36)相对应的潮汐现象称为月亮的半日潮。同样，因为 $2H_s$ 的平均角速度为 $360^\circ/\text{半日}$ ，所以 $\cos 2H_s$ 的平均周期为半日，与其相对应的潮汐现象称为太阳的半日潮。

对地面点而言，当太阳的时角 H_s 和月亮的时角 H_m 满足下列关系时

$$2H_m = \pm 90^\circ \text{ 或 } \pm 270^\circ \text{ 时即当 } H_m = \pm 45^\circ \text{ 或 } H_m = \pm 135^\circ \text{ 时}$$

$$2H_s = \pm 90^\circ \text{ 或 } \pm 270^\circ \text{ 时即当 } H_s = \pm 45^\circ \text{ 或 } H_s = \pm 135^\circ \text{ 时}$$

地面上这些点的起潮力位等于零。如图2-5所示，阴影区的起潮力位为负，而其邻区的起潮力位为正。即地面上时角等于 45° 、 -135° 和 -45° 、 135° 的两条大圆将地面分成正负相间的四个区。半日潮的振幅在赤道上最大，两极为零。

B. 日潮

(2-34)、(2-35)式中第二项

$$\sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m \quad (2-38)$$

$$\sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s \quad (2-39)$$

对应的起潮力位，周期为一日，与它们相对应的潮汐现象称为日潮。讨论 $\delta > 0$ 和 $\delta_s > 0$ 的情况。由(2-38)、(2-39)式可知，当 $H_m = \pm 90^\circ$ ， $H_s = \pm 90^\circ$ 时，地面上各点的起潮力位等于零，即

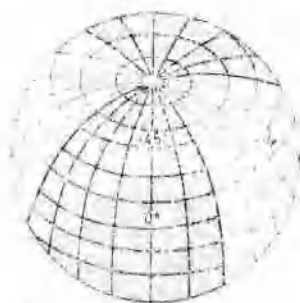
$$\text{当 } |H_m| < 90^\circ \text{ 时 } \cos H_m > 0$$

$$|H_s| < 90^\circ \text{ 时 } \cos H_s > 0$$

$$\text{当 } |H_m| > 90^\circ \text{ 时 } \cos H_m < 0$$

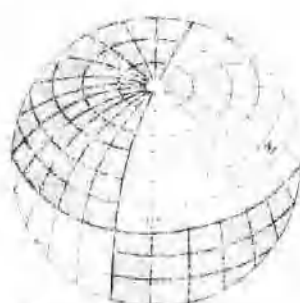
$$|H_s| > 90^\circ \text{ 时 } \cos H_s < 0$$

也就是说，时角等于 $\pm 90^\circ$ 的大圆弧将地面分成两部份，一部分 $\cos H_m > 0$ ，另一部分 $\cos H_m < 0$ 。



(a)

图 2-5



(b)

图 2-6

日潮的振幅与地面点的纬度有关。当 $\varphi > 0$ 时， $\sin 2\varphi > 0$ ； $\varphi < 0$ 时， $\sin 2\varphi < 0$ 。也就是说，赤道将地球分成南北两部份，在北半球 $\sin 2\varphi > 0$ ，在南半球 $\sin 2\varphi < 0$ 。因此，如图2-6所示，赤道和时角等于 $\pm 90^\circ$ 的大圆将地球表面分成正负相间的四个区域，阴影区的起潮力

位为负，其邻区的起潮力位为正。

C. 长周期潮

(2-34)、(2-35) 式中的第三项

$$(1-3\sin^2\varphi)(1-3\sin^2\delta_s) \tag{2-40}$$

$$(1-3\sin^2\varphi)(1-3\sin^2\delta_s) \tag{2-41}$$

对应的起潮力位，周期为半月和半年，所以与它们相对应的潮汐现象称为长周期潮。如图2-7所示， $\varphi=\pm 35^{\circ}16'$ 的纬度线将地球表面分成三个带，起潮力位在赤道附近为正，在两极为负。

3. 起潮力位的杜德森展开，潮汐波

若只考虑二阶球面函数，月亮和太阳在地球上任一点 P 的起潮力位分别由 (2-34) 式、(2-35) 式表示。在 (2-34) 式、(2-35) 式中， C_m 、 δ 、 H 、 C_s 、 δ_s 和 H_s 都是时间 t 的函数。1921 年英国人杜德森根据布朗的月亮理论，引入了六个天文参数 t 、 s 、 h 、 P 、 N' 、 P_s ，将起潮力位展开成振幅与时间无关的谐波的总和。起潮力位的杜德森展开是潮汐波调和分析的理论根据，现将起潮力位的杜德森展开分述如下。

杜德森引入的六个天文参数分别表示

- t = 以角度表示的平月亮地方时
- s = 月亮的平黄经
- h = 太阳的平黄经
- P = 月亮近地点的平黄经
- $N' = -N$ 、 N = 月亮升交点的平黄经
- P_s = 地球近日点的平黄经

这六个天文参数的时速和周期如表2-1所示

图 2-7

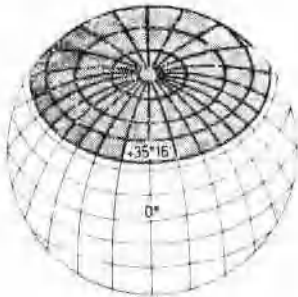


表 2-1

参 数	时 速	周 期	
$t = \theta - h$	$15^{\circ}.000000$	1.000000	(平太阳日)
$\theta = t + h$	$15^{\circ}.0410686$	0.997270	(平太阳日)
$\tau = \theta - s$	$14^{\circ}.4920521$	1.035050	(平太阳日)
s	$0^{\circ}.5490165$	27.321582	(平太阳日)
h	$0^{\circ}.0420686$	365.242199	(平太阳日)
P	$0^{\circ}.0046418$	8.847 年	(月亮平近地点的周期)
N'	$0^{\circ}.0022064$	18.613 年	(月亮升交点的周期)
P_s	$0^{\circ}.000020$	20940 年	(地球近日点旋转周期)

而它们的数值按下式计算

$$\left. \begin{aligned} s &= 270^\circ.43659 + 481267^\circ.89057T + 0^\circ.00198T^2 + 0^\circ.000001T^3 \\ h &= 279^\circ.69668 + 36000^\circ.76892T + 0^\circ.00030T^2 \\ P &= 334^\circ.32956 + 4069^\circ.03403T - 0^\circ.01032T^2 - 0^\circ.00001T^3 \\ N &= 259^\circ.18328 - 1934^\circ.14201T + 0.00208T^2 + 0^\circ.000002T^3 = -N' \\ P_s &= 281^\circ.22083 + 1^\circ.71902T + 0^\circ.00045T^2 + 0.000003T^3 \\ \tau &= 15^\circ t + h - s + L \end{aligned} \right\} \quad (2-42)$$

此处

t = 世界时

L = 观测点的经度，东经为正。

(1) 幅角数

月心至地心的距离 C_m 、月亮的黄经 λ_m 、黄纬 β_m 、太阳至地心的距离 C_s 、太阳的黄经 λ_s 都是时间 t 的函数。它们可以展成幅角为上述六个天文参数的线性组和谐的谐波的和，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_m}{r_m} &= 1 + \sum Kabcdef \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\ \lambda_m &= s + \sum Kabcdef \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\ \beta_m &= \sum Kabcdef \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\ \frac{C_s}{r_s} &= 1 + \sum Kabcdef \cos(a\tau + as + ch + dp + eN' + fp_s) \\ \lambda_s &= h + \sum Kabcdef \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

杜德森将下述六个数

$$a \quad b+5 \quad c+5 \quad d+5 \quad e+5 \quad f+5$$

称为谐波的幅角数

(2) 月亮和地球的轨道参数

根据布朗月亮理论，月亮轨道的参数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_m}{r_m} &= 1 + \sum_1^{72} Kabcdef \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\ &= 1 + 0.0545 \cos(s-p) + \dots \\ \lambda_m &= s + \sum_1^{101} Kabcdef \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\ &= s + 0.1098 \sin(s-p) + \dots \\ \beta_m &= \sum_1^{76} Kabcdef \sin(a\tau + as + ch + dp + eN' + fp_s) \\ &= 0.0895 \sin(s-N) + 0.0049 \sin(2s-p-N) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

而太阳至地心的距离 r_s 和太阳的黄经 λ_s 可以写成

$$\begin{aligned}
 \frac{C_s}{r_s} &= 1 + \sum K a b c d e f \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\
 &= 1 + 0.016750 \cos(s - p) + \dots \\
 \lambda_s &= h + \sum K a b c d e f \sin(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \\
 &= h + 0.0033501 \sin(h - p_s) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2-45}$$

(3) 半日潮

现在讨论月亮和太阳的起潮力位(2-34)、
(2-35) 中第一项

$$\begin{aligned}
 G \left(-\frac{C_m}{r_m} \right)^3 \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \\
 0.46051 G \left(-\frac{C_s}{r_s} \right)^3 \cos^2 \varphi \cos^2 \delta_s \cos H_s
 \end{aligned}$$

所对应的潮汐波。其中 $G \cos^2 \varphi$ 只与观测点的
纬度有关，称为半日波的大地系数
在图2-8中

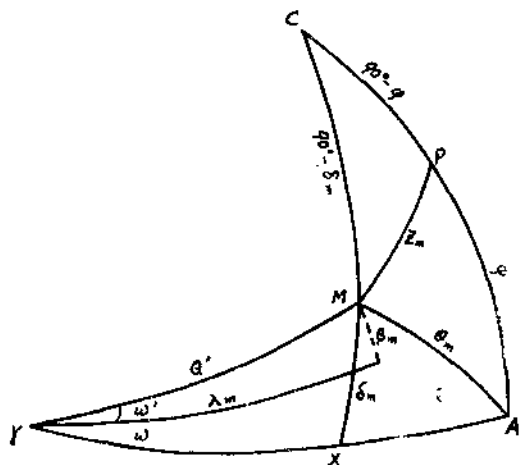


图 2-8

- C = 北天极
- P = P 点的天顶
- φ = P 点的纬度
- M = 月亮在天球上的位置
- H_m = 月亮对 P 点的时角
- δ_m = 月亮的赤纬
- β_m = 月亮的黄纬
- λ_m = 月亮的黄经
- γ = 春分点
- $x = \gamma A$ P 点的地方恒星时
- ω = 黄道与赤道的夹角 $23^\circ 27'$
- $\theta_m = MA$

有

$$\begin{aligned}
 \sin \delta_m &= \sin \theta' \sin(\omega + \omega') \\
 &= \sin \omega \sin \theta' \cos \omega' + \cos \omega \sin \theta' \sin \omega'
 \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
 \sin \theta' \cos \omega' &= \sin \lambda_m \cos \beta_m \\
 \sin \theta' \sin \omega' &= \sin \beta_m
 \end{aligned}$$

因有

$$\sin \delta_m = \sin \omega \sin \lambda_m \cos \beta_m + \cos \omega \sin \beta_m
 \tag{2-46}$$

由图2-8中的球面三角形 MCA ，有

$$\cos \theta_m = \cos \delta_m \cos H_m$$

同时, 由球面三角形 γMA , 有

$$\cos \theta_m = \cos \theta' \cos x + \sin \theta' \sin x \cos (\omega + \omega')$$

由于

$$\cos \theta' = \cos \beta_m \cos \lambda_m$$

所以有

$$\cos \theta_m = \cos x \cos \beta_m \cos \lambda_m + \sin x (\cos \omega \sin \lambda_m \cos \beta_m - \sin \omega \sin \beta_m) \quad (2-47)$$

而

$$x = r + s - 180^\circ \quad (2-48)$$

将 (2-44) 式中的 λ_m 、 β_m 代入 (2-46) 式、(2-47) 式中去即可得出 $\sin \delta_m$ 和 $\cos \theta_m$ 的表达式, 这些表达式是幅角为六个天文参数线性组合的谐波的总和。

在月亮的二阶球面函数中, 与时间有关的项为

$$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3 \cos^2 \delta_m \cos 2H_m \quad (2-49)$$

因为

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta_m \cos 2H_m &= \cos^2 \delta_m (2 \cos^2 H_m - 1) \\ &= 2 \cos^2 \theta - \cos^2 \delta_m \quad (2-50) \end{aligned}$$

将 $\cos \theta$ 和 $\cos \delta_m$ 的表达式代入上式, 并将所得结果及 $\left(\frac{C_m}{r_m}\right)$ 的表达式代入 (2-49) 式, 则

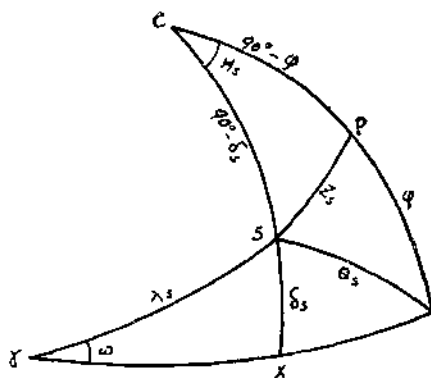


图 2-9

(2-49) 式展成幅角为上述六个天文参数线性组合的谐波的总和, 即

$$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3 \cos^2 \delta_m \cos 2H_m = \sum Kabcdef \cos (ar + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \quad (2-51)$$

(2-51) 式中的主要谐波的幅角数和系数 K 如表3-5所示
在图 2-9 中

s = 太阳在天球上的位置

δ_s = 太阳的赤纬

λ_s = 太阳的黄经

有

$$\sin \delta_s = \sin \lambda_s \sin \omega \quad (2-52)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_s &= \cos \delta_s \cos H_s \\ &= \cos \lambda_s \cos x + \sin \lambda_s \sin x \cos \omega \end{aligned} \quad (2-53)$$

在太阳的半日潮起潮力位的展开式中与时间有关的项为

$$0.46051 \left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3 \cos^2 \delta_s \cos 2H_s \quad (2-54)$$

考虑到

$$\cos^2 \delta_s \cos 2H_s = 2\cos^2 \theta_s - \cos^2 \delta_s \quad (2-55)$$

将 $\cos \theta_s$ 和 $\cos \delta_s$ 的表达式代入上式, 并将所得结果及 $\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3$ 的表达式代入 (2-54) 式, 则 (2-54) 式展成幅角为上述六个天文参数线组合的谐波的总和, 即

$$0.46051 \left(\frac{C_s}{r_s}\right) \cos^2 \delta_s \cos 2H_s = \sum Kabcdef \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \quad (2-56)$$

(2-56) 式中的主要谐波的幅角数和系数 K 如表 3-5 所示

月亮的主要半日波 M_2 、 N_2 和太阳的主要半日波 S_2 的幅角数、振幅、角速度和周期如表 2-2 所示

表 2-2

名 称	幅 角 数	幅 角	系 数	角 速 度	周 期
M_2	255555	2τ	0.90812	$28^\circ.98$	$12^h 25^m$
N_2	245655	$2\tau - s$	0.17387	$28^\circ.44$	$12^h 39^m$
s_2	273555	$2\tau + 2s - 2h$	0.42358	$30^\circ.00$	12^h

(4) 日潮

月亮和太阳的起潮力位 (2-34)、(2-35) 式的第二项

$$G \left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3 \sin 2\varphi \sin 2\delta_m \cos H_m$$

$$0.46051 G \left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3 \sin 2\varphi \sin 2\delta_s \cos H_s$$

所对应的潮汐波, 称为日潮。其中 $G \sin 2\varphi$ 只与观测点的纬度有关, 称为日潮的大地系数。

在月亮和太阳的起潮力位中 $\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3 \sin 2\delta_m \cos H_m$ 、 $\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3 \sin 2\delta_s \cos H_s$ 与时间有关, 考虑到

$$\begin{aligned} \sin 2\delta_m \cos H_m &= 2 \sin \delta_m \cos \delta_m \cos H_m \\ &= 2 \sin \delta_m \cos \theta_m \end{aligned} \quad (2-57)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\delta_s \cos H_s &= 2 \sin \delta_s \cos \delta_s \cos H_s \\ &= 2 \sin \delta_s \cos \theta_s \end{aligned} \quad (2-58)$$

将 (2-46) 式、(2-47) 式代入 (2-57) 式, 将 (2-52) 式、(2-53) 式代入 (2-58) 式, 并将所得结果及 $\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3$ 和 $\left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3$ 的表达式代入月亮和太阳的起潮力位日波表达式中去, 得

$$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3 \sin 2\delta_m \cos H_m = \sum Kabcdef \cos(a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s) \quad (2-59)$$

$$0.46051 \left(\frac{C_s}{r_s}\right)^3 \sin 2\delta_s \cos H_s = \sum Kbedf \cos(a\tau +$$

$$bs+ch+dp+eN'+fp_s) \quad (2-60)$$

(2-59) 式和 (2-60) 式是月亮和太阳的起潮力位的二阶球面函数中的日波分波, 其中主要分波如表3-5所示

主要日波 K_1 和 O_1 的幅角数、系数 K 、角速度、和周期如表2-3所示

表 2-3

名 称	幅 角 数	幅 角	系 数	角 速 度	周 期
K_1	165555	$\tau + s$	0.53050	$15^\circ.04$	$23^h 56^m$
O_1	145555	$\tau - s$	0.37689	$13^\circ.93$	$25^h 49^m$

4. 重力固体潮

(1) 刚体地球的重力固体潮——重力固体潮理论值

若把地球看成刚体, 则月亮和太阳在地面上的起潮力 $\vec{t}(P)$ 在垂直方向上的投影称为刚体地球的重力固体潮或重力固体理论值。若给出地面的点的坐标, 则可以从理论上计算出该点在任意时间的重力固体潮理论值。计算重力固体潮理论值的方法见本章附录。

把地球看成半径为 R 的球体, 则地面上任一点 P 的重力固体潮理论值为

$$\Delta g(P) = \Delta g_m(P) + \Delta g_s(P) \quad (2-61)$$

$$\Delta g_m(P) = - \left. \frac{\partial T_m}{\partial \rho} (P) \right|_{\rho=R} \quad (2-62)$$

$$\Delta g_s(P) = - \left. \frac{\partial T_s}{\partial \rho} (P) \right|_{\rho=R} \quad (2-63)$$

此处

$\Delta g_m(P)$ = 月亮在 P 点产生的重力固体潮

$\Delta g_s(P)$ = 太阳在 P 点产生的重力固体潮

将月亮和太阳的起潮力位的表达式 (2-27) 式、(2-31) 式代入 (2-62) 式、(2-63) 式, 得

$$\Delta g_m(P) = - \frac{4}{3} \cdot \frac{G}{R} \left(\frac{C_m}{r_m} \right)^3 (3 \cos^2 Z_m - 1) \quad (2-64)$$

$$\Delta g_s(P) = - \frac{4}{3} \cdot \frac{G_s}{R} \left(\frac{C_s}{r_s} \right)^3 (3 \cos^2 Z_s - 1) \quad (2-65)$$

将杜德森常数 G , 地球的平均半径 $R = 6371 \text{ KM}$ 代入 (2-64) 式、(2-65) 式, 得

$$\Delta g_m(P) = -55 \left(\frac{C_m}{r_m} \right)^3 (3 \cos^2 Z_m - 1) \text{ 微伽} \quad (2-66)$$

$$\Delta g_s(P) = -25 \left(\frac{C_s}{r_s} \right)^3 (3 \cos^2 Z_s - 1) \text{ 微伽} \quad (2-67)$$

(2) 理论重力固体潮潮汐波

杜德森将起潮力位展开成振幅为常数, 幅角为六个天文参数线性组和谐波的和。因此理论重力固体潮亦可展成谐波的总和。用

C 表示

$$C = \frac{2G}{R} = 82.26 \text{ 微伽}$$

则与二阶球面函数半日波相对应的大地系数为

$$C_2 = C \cos^2 \varphi \text{ 微伽}$$

与二阶球面函数日波相对应的大地系数为

$$C_1 = C \sin 2\varphi \text{ 微伽}$$

这样, 理论重力固体潮可以写成

$$\Delta g(P) = \sum A_n(P) \cos\{a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp_s\} \quad (2-68)$$

此处

$A_n(P)$ = 某潮汐波的理论振幅

振幅超过0.2微伽的, 理论重力固体潮半日波有27个, 日波有52个, 其幅角、角速度与各个分波的系数如表3-5所示

主要半日波 M_2 、 S_2 、 N_2 和主要日波 K_1 、 O_1 、 P_1 的重力固体潮理论振幅如表 2-4 所示, 它们与纬度 φ 的关系如图2-10所示

表 2-4

名 称	幅 角 数	系 数	理 论 振 幅
M_2	255555	0.90812	$74.7 \cos^2 \varphi$
S_2	273555	0.42358	$34.8 \cos^2 \varphi$
N_2	245655	0.17387	$14.3 \cos^2 \varphi$
K_1	165545	0.53050	$43.6 \sin 2\varphi$
O_1	145555	0.37689	$31.0 \sin 2\varphi$

中国境内的重力固体潮主要半日波 M_2 、 S_2 、 N_2 和主要日波 K_1 、 O_1 的振幅等值线图如图2-11所示

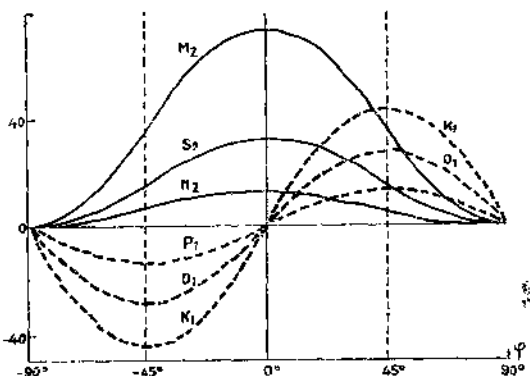


图 2-10