·內部发行·

数学系講义

福里埃級数

北京电視大学数学系編

1961年9月

第十五章　福里埃級数

§1. 总的說明目的和要求

过去大家学过了冪級数和函数的太乐展开，形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的无限和称为冪級数，关于它的基本問題是：①在 x 的什么范圍內級数收歛，而在此范圍以外級数是发散的？即求級数的收歛区域；②在收歛域上，級数的和是怎样的一个函数？这个函数有些什么性質？如何求其微商和积分等；③反之，一个函数在什么条件下，在什么区域中，可以表示为（展成）一个冪級数，此冪級数的系数如何确定？

在这里，最基本的思想是用一种最簡单的函数——多項式，去逼近任意的函数。

过去对这些問題已給出了大体的解答，在求解微分方程和一些近似計算中，我們已經看到冪級数的巨大作用。它是一种很有力的工具。

但是从級数的形式看来，冪級数仅是一种特殊的形式，此外，还有許多其他亦很有用的特殊形式，作为它們的共同点，还有关于函数級数的一般理論。

在这里，我們只講另一种应用十分广泛的特殊形式的級数，即通常的所謂“福氏級数”（三角級数）其形状如：

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+$$

$$+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

福里埃級数正如冪級数一样，在物理学和現代工程技術中非常有

用，並且不断地在发展。

在自然界和人类的生产实践中，时常会遇到一种周而复始的运动——周期运动，如天文中行星的运轉，电磁学、无綫电电子学、热学、声学等等中关于波的传播、力学系統中的振动，机械中如飛輪的旋轉和活塞的往复运动，自动控制系統的分析以至于量子力学的研究中，都会遇到物質的周期性的运动，为了研究这种运动，就发展了福氏級数的理論。

一般的周期运动都可用福氏級数来表示，这种表示的基本之点是把复雜的运动分析成簡单运动的合成，从而可以揭露运动的某些重要性質。在求解偏微分方程时，亦常設未知函数为三角級数的形式。

关于福氏級数的基本問題和前面講的冪級数的基本問題相似。

福氏級数的理論主要是：关于如何把一个函数按問題的要求展开为各种形式的三角級数，並計算相应的系数問題；关于一个函数在什么条件下可展开为福氏級数，卽它的福氏級数收斂，且收斂到給定的函数的問題；关于福氏級数收斂的特性（与冪級数不同，三角級数的收斂性更重要的在于整体性）；非周期函数的福氏展开問題；进一步把三角函数系推广到一般的正交系，研究函数的广义福氏級数及有关的收斂性問題；以及福氏級数的应用等。

由于各种条件的限制，在这里只能講前面几个問題，卽从一些最簡单而基本的物理事实来說明福氏級数的来源，引进的必要性，然后引进福氏級数，說明如何把一个函数展成福氏級数，进而討論福氏級数的收斂性，函数及其福氏級数間的关系，証明基本定理。关于福氏級数收斂的特性及广义福氏級数的問題我們只能作簡单的介紹，最后講非周期函数的福氏展开問題，举几个例子說明作福氏展开的意义和应用。

希望大家在学习中抓住这条綫索，並很好地了解这种考慮和分析方法，掌握把一个函数按各种要求展成需要形式的三角級数的技巧，並弄清关于福氏級数收斂的一些特性，弄清基本定理的条件和結論。

至于福氏級数的一些深入的理論和多方面的应用，大家如感到需要，可参閱有关的参考書。

§2. 关于福氏級数的一些准备知識

1. 周期函数

經历一定的时間 T 后即恢复原状的現象，称为周期現象，T 称为此周期現象的周期，蒸汽机所作的穩定运动是一周期性运动，在經历了一定的轉数后又重新經过原來的位置，电学中的交流电亦是一种周期現象。

与所考慮的周期現象有关的各种量，在經过时間 T 后复取原值，因此，这些量是时間 t 的周期函数：

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

周期函数即是周期現象的数学表現形式，t 可以看成一般的自变量，上式說明对任意 t，在变經一个周期 T 以后，其函数值总相等。如交流电压与电流强度，蒸汽机的蒸汽压力、某些机件运动的速度和加速度等。都是这种周期量，又如最常用的正弦函数、余弦函数是周期函数，其周期为 2π，而正切函数則是周期为 π 的函数。

顯然，对周期为 T 的函数 $\varphi(t)$ 亦有

$$\varphi(t)=\varphi(t+T)=\varphi(t+2T)=\varphi(t+nT).$$

(n 是整数)。

在以后常用的周期函数的一个性質是：函数在一个周期上的积分为一常量，与此周期的起始点无关，即

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \int_a^{a+T} \varphi(t)dt. \qquad (a\text{ 为任意常数）。}$$

証：事实上，利用积分的性質，有

$$\int_a^{a+T} \varphi(t)dt = \int_a^T \varphi(t)dt + \int_T^{a+T} \varphi(t)dt$$

$$= \int_a^T \varphi(t)dt + \int_0^a \varphi(t+T)dt$$

$$= \int_a^T \varphi(t)dt + \int_0^a \varphi(t)dt$$

$$= \int_0^T \varphi(t)dt。$$

这个性質在几何上即表示下列二塊面积相等：

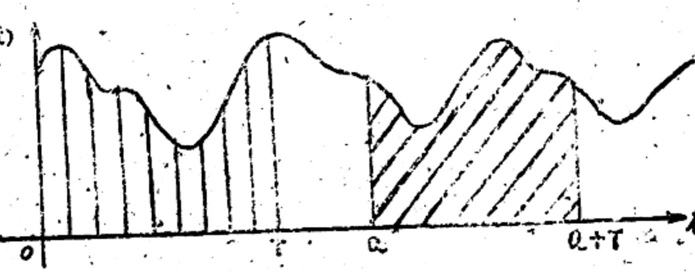
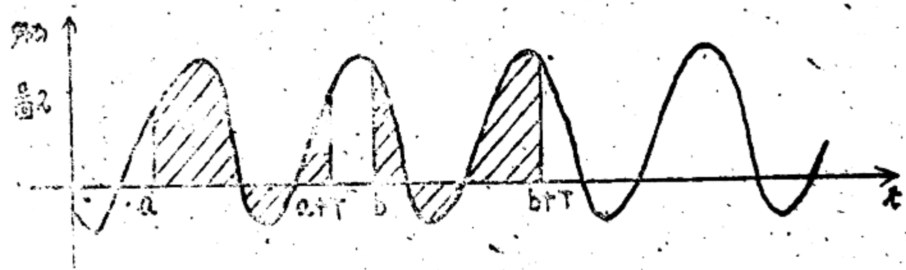


图1

从直观上看來，这是顯然的



一般地說，对任意的 a, b 有

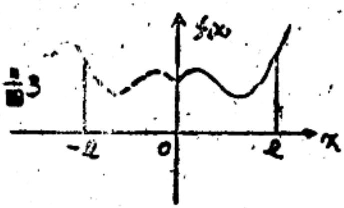
$$\underline{\int_a^{a+T} \varphi(t)dt = \int_b^{b+T} \varphi(t)dt}$$

2、 奇函数和偶函数

定义：如果对于任意的 x，都有

$$f(x)=f(-x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数



如 x^2，$\cos x$ 等是：由定义，偶函数的图形关于 y 轴对称。

如果把积分解释为面积，则当 $f(x)$ 为偶函数时，对于任意的数 l，总有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

利用积分性質，亦可直接証明

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$=\int_{l}^{0} f(-x)d(-x)+\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$=-\int_{l}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{l} f(x)dx=2\int_{0}^{l} f(x)dx$$

定义：如对于任意的 x，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数。

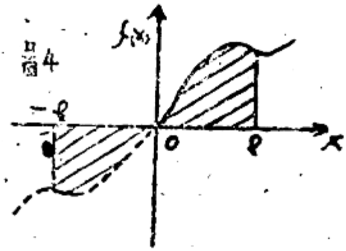
如 x^3，$\sin x$ 等是。

显然，奇函数的图形关于原点对称。並且因为

$$f(-0)=-f(0)$$

故 $f(0)=0$，图形通过原点。

图4



如果注意积分在几何上表示面积的代数和（x 轴上面的面积为正，下面的面积为负），则当 $f(x)$ 为奇函数时，对任意的 l 恒有

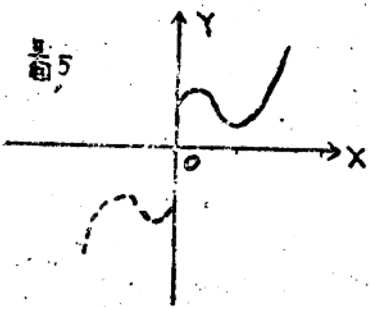
$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=0.$$

（讀者可自己証明）。

亦有时候，$f(x)$ 仅仅在 $x>0$ 时有定义，为了扩展到 y 轴的左边去，使之成为奇函数，就用

$$f(-x)=-f(x);$$

图5



来确定函数 $x<0$ 在时的值，这时，函数在 $x=0$ 点可能没有意义（如 $f(0)\neq 0$），曲綫經过 y 轴时有跳跃，不过，函数在 $(-l, l)$ 上的积分仍然为 0。

由定义，容易断定：二个奇函数或二个偶函数之积是偶函数，而一个奇函数与一个偶函数之积则为奇函数（讀者自己証明）。

因此，如 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)\sin nx$ 为奇函数，而 $f(x)\cos nx$ 为奇函数，故

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin nx dx = 0. \\ \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos nx dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\cos nx dx. \end{cases}$$

反之，如 $f(x)$ 是奇函数，则有

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin nx dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\cos nx dx. \\ \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos nx dx = 0. \end{cases}$$

3. 三角函数的一个特性（“正交性”）。

函数系

$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$

叫做基本三角函数系，所有这些函数都有共同的周期 2π（虽然 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 有更小的周期 $\frac{2\pi}{n}$）。

把向量代数中关于向量的数量积和正交的概念推广到一般的函数中來。

定义：函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的数量积定义为下列积分：

$$(\varphi, \psi) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\psi(x)dx.$$

则当

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

时，就説 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上是正交的（几何上的正交表示垂直，但对于函数的正交性並不表示圖形上有什么类似垂直性的意思，这种推广純是形式的，不过可以帮助我們了解一些看來不易理解的东西）。

容易証明：在区間 $(-\pi, \pi)$ 上，有

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0\end{aligned}\right\}(n\neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\pi\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\pi\end{aligned}\right\}(n\neq 0).$$

利用三角公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

加以証明

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=0\end{aligned}\right\}(n\neq m).$$

及

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$$

这些等式説明基本三角函数系在 $(-\pi,\ \pi)$ 上是正交的。

但是可証明：基本三角函数系在 $(0,\ \pi)$ 上是不正交的，例如

$$\int_{0}^{\pi}\sin 2x\cos 3x dx\neq 0.$$

然而，仅由余弦函数

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \cdots$$

或仅由正弦函数

$$\sin x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \sin nx,\ \cdots$$

所組成的部分系在 $(0,\ \pi)$ 上却都是正交系。

由此可见：正交系不仅与系中的函数有关，而且也与所考慮的区間有关。

顯然，在同一区間上，在一正交系中除去一部分函数后仍然是一个正交系。

通过变换，大家不难想到：函数系

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\cdots$$

是 $(-l,\ l)$ 上的正交系（讀者可自己驗証）。

当然，在其他的区間上还有一些别的正交系，在解决某些較复雜的問題时要用到。不过它們的应用不如上面提到的那么广泛，而且都較复雜。

§3. 簡 諧 振 动

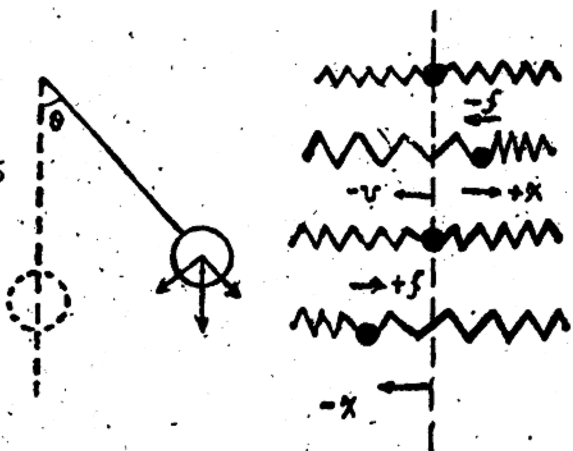
最簡单、最基本的周期运动是簡諧振动，这种运动之所以重要，不仅因其簡单，是一种較普遍存在的最基本的周期振动，而且，更因为复雜的周期运动可以用簡諧运动的合成来研究。

因此，我們一方面要很好掌握簡諧振动的方程，特征和各种物理性質，而且有必要研究一下若干个簡諧振动的合成。

1. 簡諧振动

联結在二个相同的彈簧中間的物体在平衡位置附近的振动，或单擺在垂直位置附近的振动都是簡諧振动。

圖 6



简諧振动的特点是：如以物体离开平衡位置的位移 x（在平擺中即为角度 θ）来确定其位置，在平衡位置处 $x=0$（或 $\theta=0$），則作用力与 x 成正比且指向平衡位置（在单擺的情形，当 θ 很小时，力与 θ 成正比），設比例系数为 k，則力

$$f=-kx.$$

負号表力的方向与位移方向相反。

由牛頓第二定律：質量为 m 的物体，其加速度 a 与所受的力 f 成正比，即

$$ma=f.$$

而加速度即位移对于时間的二价导数，故对简諧振动有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx.$$

設 $k/m=\omega^2$ 則方程变成

$$\ddot{x}=-\omega^2 x$$

其通解为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi).$$

其中 A 和 φ 为任意常数，可由运动的初始条件决定，A 称为振动的振幅，$\omega t+\varphi$ 称周相，φ 称初相，ω 称为振动的圆频率（或循环频率或固有频率），这个周期振动的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

振幅 A 表示物体离平衡位置的最大偏离(距离或角度)，初相 φ 指出物体在开始运动时的位置，因当 $t=0$ 时 $x=A\sin\varphi$ 周期 T 表示往复一次所需的时間，而 $\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\nu$ 表单位时間內振动的次数，称为普通频率。

当然，微分方程 $\ddot{x}=-\omega^2 x$ 的解亦可表成

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

的形式，不过这时的初相与正弦式的初相差$\frac{\pi}{2}$。

由此可见，简諧振动由其振幅，頻率和初相完全决定。特别，如不計初始位置，则振动的特征是振幅和頻率。由此可以确定振动曲綫的形状。

当 $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=0$ 时，諧振动的方程为一正弦函数 $y=\sin t$；而当 $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时则为一余弦函数 $y=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$，它的圖形可以由余弦曲綫向右移动$\frac{\pi}{2}$而得到，可见曲綫的形状完全由振幅和頻率來确定。

下面給出几个諧振动的圖形：

圖（1）圖表振幅为1，周期为 2π 的諧振动（$x=\sin t$）

圖（2）表振幅为1，周期为$\frac{2\pi}{3}$的諧振动（$x=\sin 3t$）

圖（3）表示的振动与圖（2）表示的相同，仅周相相差$\frac{\pi}{3}$，

$$\left[x=\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

圖（4）表示的振动振幅为2，周期为$\frac{2\pi}{3}$ $\left[x=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

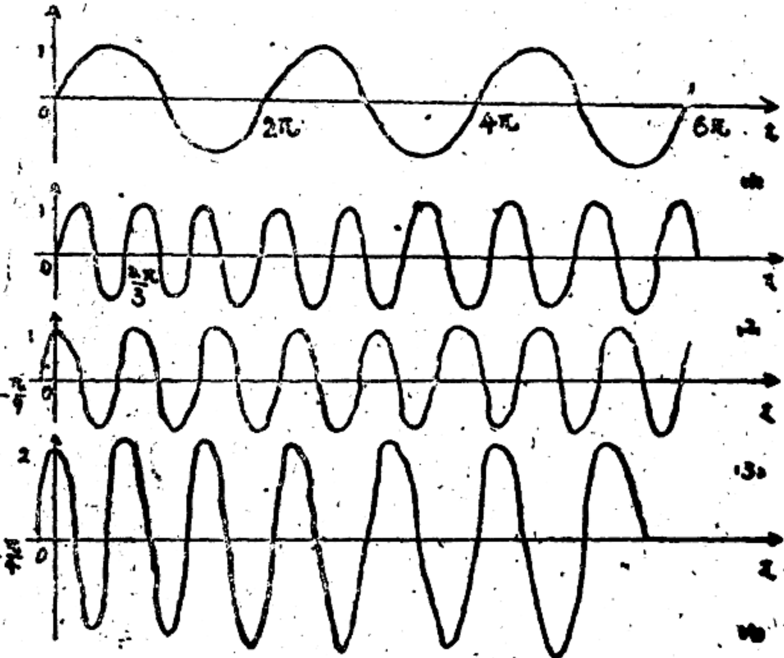


圖10

从这些圖可以看出振幅；周期，初相的意义。

利用三角公式，可以把振动的方程写成較对称的形式：

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A(\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi).$$

設

$$a=A\sin\varphi,\quad b=A\cos\varphi.$$

則振动的公式可表成

$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t.$$

反之，由这种形式表示的运动也一定是簡諧振动，其振幅和初相

为（频率即为 ω）

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$$

今后，简谐振动的方程都写成这种较对称的形式。如

$$x=2\sin\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos 3t+\sin 3t.$$

有时，要在方程中用周期 T 来代替圆频率：如設 $T=2l$，則

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{l}.$$

所以周期为 $T=2l$ 的諧振动的方程可写为

$$x=a\cos\frac{\pi t}{l}+b\sin\frac{\pi t}{l}.$$

2. 諧振动的速度、加速度和能量

設諧振动的方程为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi).$$

則运动的速度 v 和加速度 w 为

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi),$$

$$w=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)=-\omega^2x=-\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

可見 w 与位移 x 成正比，其方向指向平衡位置，这与物体所受的力有相同的性質。

对于初相 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 的諧振动 $x=A\cos\omega t=A\cos\frac{2\pi}{T}t$，在平衡位置时（此时 $t=\frac{T}{4}$ 或 $\frac{3T}{4}$），速度的絕对值 $|v|$ 为最大，

其值为$\frac{2\pi}{T}A$，在位移最大的点$\left(即\ t=0, \frac{T}{2}, T\ 或\ x=\pm A\right.$ 时$\left.\right)$速度 $v=0$。但加速度则与此相反．在平衡点处加速度 $w=0$．而在 $x=\pm A$ 时 $|w|$ 最大，其值为$\frac{4\pi^2}{T^2}A$．

质量为 m 的物体在力 $f=-kx$ 作用下作谐振动，振动的能量由二部分构成，其一是动能

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2,$$

另一是位能 E_p（它即为外力使物体产生位移 x 所作之功）

$$E_p=\left|\int_a^x f dx\right|=\int_0^x +kxdx=\frac{kx^2}{2}$$

以 $x=A\sin(\omega t+\varphi)$, $v=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$ 代入得

$$E_k=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi),$$

$$E_p=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi).$$

由此可见：在位移最大的位置（$x=\pm A$），位能达到最大值$\frac{kA^2}{2}$而动能为 0，而在平衡位置则相反，这时 E_k 达到最大值$\frac{mA^2\omega^2}{2}$，而 $E_p=0$。

总能量 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

$$+\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2 \quad (\because\ \omega^2=k/m,\ 或\ m\omega^2=k).$$