天气预报问题的近似计算方法

中国科学院
大气物理研究所二室

天气预报问题的近似计算方法

[瑞 典] H、克悦斯
[美国] J. 奥利格尔
著

内容提要

本书系根据世界气象组织(WMO)全球大气研究计划(GARP)出版的第十号丛书1973年版译出，原书名为《Methods for the Approximate Solution of Time dependent Problems》。为使书名通俗，特以《天气预报问题的近似计算方法》为中译本书名。原书是为气象、海洋工作者所写。书中着重讨论天气预报动力方程（主要是双曲型非线性方程组）的初值问题和初值——边值问题计算方法，但对有限区域天气预报的边值条件给法、大气边界层计算、海洋预报中的粗细格网套用、锋面预报中的间断解计算问题也都有论述，此外，还讨论了交展开求解的谱方法，非线性计算不稳定性，以及较近期的发展等。这些计算问题，实际上是现时数值预报和统计动力预报中的基本的共同问题。

本书可供气象、海洋预报员，大专院校气象、海洋专业师生和科技教学工作者参考。

本书是王宗皓等同志于1974年8月翻译的，目的是为我国当前普遍开展的数值预报和统计动力预报工作，提供一本较新的参考材料，错误之处，请指正。

目　录

序　言

在这本专著中，我们讨论随时间变化的微分方程的近似解法，而且限于对动力气象和海洋物理学中的时间变化方程有用的求解方法。因此，讨论的重点放在双曲型微分方程的近似解法。这些方法的发展与气象学和海洋物理学有密切的关系，继续探索这类问题的有效解法是重要的课题。这类问题的研究，在概念上和深入程度上，一直在不断发展，而且近年来若干数值模式已成为许多气象部门制作日常天气预报的一种工具。因此，处理大型计算问题，使之经济而又迅速地工作，其必要性比以往任何时候更大。

书中通过模型方程的研究，发展了许多概念，进行了许多分析。我们发现一些计算难点，是线性作用，而且可以通过能够详细讨论的简化问题，来研究这些计算上的难点。我们重视模型化办法的作用。大型非线性模式，在实践上不可能进行深入严格的分析，容易把计算困难的原因找错，得出一些不正确的结论把研究方向引错。过去发生过许多这样的事例。这不是说，模型化办法没有它固有的缺陷。但在许多情况下，选择模式方程，以及对复杂问题推测一些论断，也需应用模型化办法。而且对分割出一些现象进行分析，模型化办法也是一种重要的工具。

书中对微分方程的理论，及方程的逼近理论，进行了比较讨论。这对发展差分逼近方程的理论是非常必要的。但是差分方程理论上需要的一些结果相当难推导，不得不作些概要性的比较讨论。

第一章至六章，通过常微分方程差分逼近式的研究，引导出差分格式的稳定性和收敛性等概念。分析了几种差分格式的计标结果。这六章是本书的观点、概念和方法的引论。叙述的方式是从比较容易的问题开始，一直到最困难的问题，反复讨论。

第七章至十四章，讨论柯西问题，也就是初值问题。这是全球天气预报以及气候问题的有关计标理论问题。线性方程柯西问题的理论，基本上是完整的，它的各种逼近式容易分析和处理。在这几章中，我们先讨论常系数线性方程，然后讨论变系数方程，最后讨论非线性问题。目的在于把比较复杂的方程尽可能简化为比较简单的方程。

第十五章至十八章，讨论初值——边值问题，这是洋流问题和局地天气预报问题的有关计标理论。这方面的理论，比前几章中的问题更加困难，直到近几年才形成较为完整的理论。叙述方式也是由简单问题讨论到复杂问题。

在第十九章中，应用前面各章中发展的理论，研究浅水波方程。目的在于对气象部门和海洋部门，在原理的应用方面提

供一些好例子。

第二十章讨论有限差分格网和格网加密的一些问题。前面各章讨论过的一些解法，自然要在不光滑解的加密格点上，继续讨论。这里讨论了格网加密办法适用的场合，应用了初值——边值问题的理论，对这种加密办法进行了分析。

间断解的问题放在第二十一章中讨论，这里也应用初值——边值问题的理论。

书中大部分结论给出证明或者给出证明的提要。对一些需要复杂方法才能证明的结论，略下未证，只指出足够的参考文献。书中给出的许多例子，是使得理论阐述及其应用somewhat容易懂。

第一章

常微分方程的差分逼近式

常微分方程的差分格式，可以当作常微分方程组的差分方法以便求解来讨论。而常微分方程组的有关性质可以用下列单个方程来阐述：

$$Ly \equiv dy/dt - \lambda y = a e^{\alpha t}, \quad y(0) = y_0. \quad (1.1)$$

其系数为常数。为了简单起见，我们只讨论非共振（调和）的情形：$\alpha \neq \lambda$。由是(1.1)的解可以给成

$$y(t) = y_I(t) + y_H(t) \qquad (1.2)$$

而且

$$y_H(t) = \left[y_0 - a(\alpha - \lambda)^{-1}\right] e^{\lambda t},$$

$$y_I(t) = a(\alpha - \lambda)^{-1} e^{\alpha t},$$

照例，将 $y_I(t)$ 称为强迫解，$y_H(t)$ 称为瞬变解。对于我们所讨论到的许多实际应用问题，(1.1)的解对时间为一致有界的，故可假定

$$\text{实部}\ \lambda \leq 0, \quad \text{实部}\ \alpha \leq 0 \qquad (1.3)$$

我们用多步法解上述问题。定义时间步长 $k > 0$，格网点 t_ν 和格点函数 v_ν：

$$t_\nu = \nu k, \quad v_\nu = v(t_\nu)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \cdots \qquad (1.4)$$

用下式近似(1.1)

$$L_h v_n=\sum_{j=-1}^{p}\gamma_j v_{n-j}-\lambda h\sum_{j=-1}^{p}\beta_j v_{n-j}=hg_n. \quad (1.5)$$

式中γ_j是常数，$\beta_j=\beta_j(h)$可以与h有关，g_n是$a e^{\alpha t_n}$的近似式，假定$\gamma_{-1}\neq 0$。 (1.5)

对充分小的h，可以写成下列形式

$$v_{n+1}=-(\gamma_{-1}-\lambda h\beta_{-1})^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{p}\gamma_j v_{n-j}-\lambda h\sum_{j=0}^{p}\beta_j v_{n-j}-hg_n\right\}$$

由此可见，若$p+1$个初值

$$v_0,v_1,\cdots,v_p \quad (1.6)$$

为已知，则可对全部$n\geq p+1$计算出v_n，微分方程初值$y(0)=y_0$只提供我们一个值，对$p>0$需要特定的办法来确定出其它一些值，实际上有两种方式能到此点：

(1) 用特定的一步法($p=0$时的多步法)计算$v_1,\cdots,v_p$，用$v_0=y(0)$，注意这时不要损失精确度，后面我们再讨论这个问题。

(2) 由微分方程(1.1)可以得出

$$dy/dt\big|_{t=0}=\lambda y(0)+a,$$

$$d^2y/dt^2\big|_{t=0}=\lambda^2 y(0)+\lambda a+a\alpha,$$

$$\vdots$$

于是由太洛展开式得

$$y(\delta)=y(0)+\delta y^{(1)}(0)+\frac{\delta^2}{2}y^{(2)}(0)+\cdots\cdots+\frac{\delta^\gamma}{\gamma!}y^{(\gamma)}(0)$$

$$+O(\delta^{\gamma+1})$$

$$=y(0)+\delta(\lambda y(0)+a)+\frac{\delta^2}{2}(\lambda^2 y(0)+\lambda a+a\alpha)+$$

$$\cdots\cdots+O(\delta^{\gamma+1}) \qquad (1.7)$$

这样，选取 $\delta=jk$，用 V_j 代替 $y(\delta)$，略去 $O(\delta^{\gamma+1})$ 项，可以计算 V_j，$j=0、1,2,\cdots\cdots,p$。

自然也可以用（1.7）构造一个确定 $V_1,\cdots\cdots,V_p$ 的一步法，要做到这点，只需用 k 代替 δ，用 $V_{\nu+1}$ 代 $y(\delta)$，V_ν 代 $y(0)$，$ae^{\alpha\nu k}$ 代 a，略去 $O(\delta^{\gamma+1})=O(k^{\gamma+1})$ 项等。这样得出

$$V_{\nu+1}=V_\nu+k(\lambda V_\nu+ae^{\alpha\nu k})$$

$$+\frac{k^2}{2}\left[\lambda^2 V_\nu+(\lambda+a\alpha)e^{\alpha\nu k}\right]+\cdots\cdots(1.8)$$

公式（1.7）和（1.8）有相同的精确度。对两者而言均有

$$\left|y(\nu k)-V_\nu\right|\leq Ck^\gamma \max_{0<t<\nu k}\left|d^{\gamma+1}y/dt^{\gamma+1}\right|+O(k^{\gamma+1})$$

但一般地，公式（1.8）的最佳常数C较小。

我们来定义差分逼近式的稳定性。讨论下列齐次差分方程

$$L_k V=\sum_{j=-1}^{p}\gamma_j V_{\nu-j}-\lambda k\sum_{j=-1}^{p}\beta_j V_{\nu-j}=0 \qquad (1.9)$$

对全部初值 $V_0,\cdots\cdots,V_p$ 有

定义1.1　差分方程（1.5）是稳定的，是指存在常数 δ 和

K，均与k和初值$V_0,\cdots,V_p$无关，使得(1.9)的解满足估计式

$$\|V_\nu\| \le Ke^{\sigma\nu k}\|V_p\|,$$

$$\|V_\nu\|^2=\sum_{j=0}^{p}|V_{\nu-j}|^2 \tag{1.10}$$

对全部$t=t_\nu\ge pk$和充分小的k成立。

设$y(t)$是微分方程(1.1)的解，代进差分方程中，得到截断误差S_ν：

$$L_k y_\nu-kg_\nu=\sum_{j=-1}^{p}\gamma_j V_{\nu-j}-\lambda k\sum_{j=-1}^{p}\beta_j y_{\nu-j}-kg_\nu$$

$$=kS_\nu \tag{1.11}$$

定义1.2 逼近式(1.5)为q阶精确度是指：存在一个函数$d(t)$，在每个时间间隔上一致有界；并有一个常数C使得对全部k成立：

$$|kS_\nu|=|L_k y_\nu-kg_\nu|\le d(t_\nu)k^{q+1},\quad t_\nu=\nu k, \tag{1.12}$$

$$|y_j-V_j|\le C_j k^{q},\quad j=0,1,2,\cdots,p \tag{1.13}$$

若$q>0$，则称逼近式为相容的。

我们给出差分近似式的一个主要定理(Dahl—quist(1965))。

定理1.1 设y是微分方程的解并成立(1.2)式，V是差分逼近式的解并成立不等式(1.10)和(1.13)，则对全部$t=t_\nu$得出

$$\|y(t)-v(t)\| \le K k^{p}\Big\{ C\sqrt{(p+1)}\, e^{\sigma(t-pk)} + |(\alpha_{-1}-\lambda k\beta_{-1})^{-1}| \max_{0\le\tau\le t} d(\tau)\,\psi(t,\sigma)\Big\} \quad (1.14)$$

式中

$$\psi(t,\sigma)=\begin{cases} \frac{1}{\sigma}e^{\sigma t} & 当\ \sigma>0 \\ t & 当\ \sigma=0 \\ \frac{k}{1-e^{\sigma k}} & 当\ \sigma<0 \end{cases}$$

$$C=\max_j |c_j|$$

从(1.4)式推知稳定性和相容性，意味着在每个有限的时间间隔上成立收敛性。注意，估计式(1.14)不仅当$k\to 0$成立，而且对每个固定的k也成立。这点很重要，因为在实际计算时，对误差的渐近估计并不感兴趣，而对计算中用到的k，所产生的误差估计有兴趣。

我们不再详细讨论估计式(1.14)，一般不难估计截断误差，特别当解充分光滑时能做到。展开 y_{n-j} 成泰勒级数

$$y_{n-j}=y_n-jk\,dy/dt\big|_{t=t_n}+\frac{(jk)^2}{2}d^2y/dt^2\big|_{t=t_n}+\cdots$$

并且若(1.12)成立，将(1.11)的左边展成以k^{p+1}阶项开始的k的幂级数。对于我们涉及到的一些应用问题，微分方程的解以及其导数，对全部时间一致有界，因此在(1.14)式中可用常数δ代替$d(t)$，这时只当$\sigma<0$时，对于$0\le t<\infty$为一致收敛，而且若有大的阻尼，即大的$|$实部$\lambda|$，常数d很小。

若$\sigma=0$，则误差随时间线性增长，经过充分大的时间间隔之后，不能保证精确度。当$\sigma>0$，逼近式对相当小的的时间间隔才能应用。而且减小k也没有什么帮助，除非$|\sigma|\leq Const\cdot k$。若实部$\lambda\leq 0$，只当$\sigma\leq 0$时，差分逼近式是可用的。初值误差的影响为$Kk^{8}\sqrt{(p+1)}\,e^{\sigma(t-pk)}$。因此需要寻求计算开始值的特殊方法，使得精确度满足不等式（1.13），C必须与α同量级。对此有个例外情况：若瞬变解不考虑，且$\sigma<0$，则在充分长时间之后，初值误差没有影响。

容易确立方程（1.9）的稳定性，因为这时能明显地解出

$$V_{\nu}=\sum\lambda_j \kappa_j^{\nu}$$

此处κ_j是特征方程

$$\sum_{\nu=-1}^{p}(\gamma_{\nu}-\lambda k\beta_{\nu})\cdot\kappa^{p-\nu}=0$$

的解。在下一章，将给出应用这种方法的若干例子。

第二章　常微分方程的几种简单差分逼近式

本章我们讨论求解微分方程（1.1）的四种简单差分逼近式：

$$V_{\nu+1}=(1+\lambda k)V_{\nu}+k\alpha e^{\alpha\nu k}，（尤拉方法）\qquad(2.1)$$

$$(1-\lambda k)V_{\nu+1}=V_{\nu}+k\alpha e^{\alpha\nu k}，（后向方法）\qquad(2.2)$$

$$(1-\tfrac{1}{2}\lambda k)V_{\nu+1}=(1+\tfrac{1}{2}\lambda k)V_{\nu}+k\alpha e^{\alpha(\nu+\frac{1}{2})k}$$

（中点法则）　(2.3)

$$V_{\nu+1}=V_{\nu-1}+2\lambda kV_{\nu}+2k\alpha e^{\alpha\nu k}$$

（蛙跳方法）　(2.4)

方程（2.1）—（2.3）的解由初值条件

$$V_0 = y_0 \qquad (2.5)$$

唯一确定，对于（2.4）式必须给出 V_1，由太洛展式得到

$$V_1 = y_0 + k\,dy/dt\big|_{t=0} = (1+\lambda k)\,y_0 + a k \qquad (2.6)$$

设 $|\lambda k| << 1$，亦即强迫函数是光滑的。我们来讨论几种比较一般的情况，

（1）设 $|\lambda k| << 1$ 并且积分区间很小，由定理1.1得知这种情况是平凡的；

（2）设 $|\lambda k| << 1$ 并且是大时间区间，此时随λ的大小 $|$实部$\lambda|$ 非常重要，

（3）设 $|\lambda k| \sim O(1)$，这时应该区别两种场合：

（a）设 $-$实部 $\lambda >> 1$，则瞬变解减小很快，强迫解变得重要。这是典型的控制问题。

（b）设 $|$实部 $\lambda k| << 1$（比如实部 $\lambda = 0$，而 $|\mathrm{Im}\,\lambda k| \sim O(1)$）这时瞬变解 $y_H(t)$ 振动很快，$y_H(t)$ 又变得不重要，只需要计算强迫解。

我们来对强迫函数为零即 $a=0$ 的情况，求出差分方程的显式解。齐次方程（2.1）—（2.4）的通解是

$$V_\nu^{(1)} = c_1 \kappa_1^{\nu} \quad 而\ \kappa_1 = 1+\lambda k = e^{\lambda k - \frac{1}{2}\lambda^2 k^2} + \cdots \qquad (2.1a)$$

$$V_\nu^{(2)} = c_2 \kappa_2^{\nu} \quad 而\ \kappa_2 = (1-\lambda k)^{-1} = e^{\lambda k + \frac{1}{2}\lambda^2 k^2} + \cdots \qquad (2.2a)$$

$$V_n^{(3)}=\tau_3\,\varkappa_3^n \quad 而\ \varkappa_3=\left(1+\frac{\lambda h}{2}\right)\left(1-\frac{\lambda h}{2}\right)^{-1}$$

$$=e^{\lambda h+\frac{1}{12}\lambda^3h^3}+\cdots \qquad (2.3a)$$

方程（2.4）是两步方法，因而它的通解能写成

$$V_n^{(4)}=\tau_4\varkappa_4^n+\tau_{41}\varkappa_{41}^n \qquad (2.4a)$$

式中$\varkappa_4$和$\varkappa_{41}$是特征方程

$$\varkappa^2-1+2\lambda h\varkappa=0$$

的解：

$$\varkappa_4=\lambda h+\sqrt{\lambda^2h^2+1}=e^{\lambda h-\frac{1}{6}\lambda^3h^3}+\cdots$$

$$\varkappa_{41}=\lambda h-\sqrt{\lambda^2h^2+1}=-e^{-\lambda h+\frac{1}{6}\lambda^3h^3}+\cdots$$

再确定常数系数τ_j，$j=1,2,3,4$，以及τ_{41}，使得$V_n^{(j)}$在$j=4$时满足初值条件（2.5）和（2.6），由（2.5）有

$$\tau_j=y_0,\ j=1,2,3$$

而τ_4和τ_{41}由

$$y_0=\tau_4+\tau_{41},$$

$$(1+\lambda h)y_0=\tau_4\varkappa_4+\tau_{41}\varkappa_{41}$$

确定为

$$\tau_4=1+\frac{1}{2}\lambda^2h^2+\cdots \text{和}\ \tau_{41}=-\frac{1}{2}\lambda^2h^2+\cdots$$

我们已经找到差分方程的显式解，需要将其与微分方程的解

$$y(t)=y_0e^{\lambda t}$$

进行比较，

情形1、　　对$t=t_n$，得到

$$|\tau_j x_j^n - y_0 e^{\lambda t}| = |y_0|\cdot|e^{\lambda t}|\cdot \begin{cases} \left|1-e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 kt+O(k^2)t}\right|, & j=1 \\ \left|1-e^{+\frac{1}{2}\lambda^2 kt+O(k^2)t}\right|, & j=2 \\ \left|1-e^{-\frac{1}{12}\lambda^3 kt+O(k^4)t}\right|, & j=3 \\ \left|1-\left[1+\frac{1}{2}\lambda^2 k^2+O(k^4)\right]\cdot e^{-\frac{1}{6}\lambda^3 k^2 t+O(k^4)t}\right|, & j=4 \end{cases} \quad (2.7)$$

而且

$$|\tau_{41} x_{41}^n| = \left|1-\frac{1}{2}\lambda^2 k^2+O(k^4)\right|\cdot\left|e^{-\lambda t+O(k^3)t}\right| \quad (2.8)$$

这样，就得所有四种方法的收敛性。当k充分小时，由中点法给出的解收敛最快，其次是蛙跳法和改进的尤拉法。前者为二阶精确度的方法，其余者都是一阶精确度的方法。

情形2，微分方程的解是一个指数衰减的。所以一个稳定的方法必定没有指数性增长的解。(2.8)式意味着

$$|x_{41}^n| \cong e^{|Real}$$，

因而当$Real\,\lambda<1$，则蛙跳方法不能用；参阅Dahl-quist(1956)的结果，后面我们将看出如何修改此方法，使得它不具有增长解。设

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$$

而且λ_j为实数；$\lambda_1\le 0$，对于尤拉方法我们有

$$|x_1^2| = 1-2|\lambda_1|k + k^2\lambda_1^2 + k^2\lambda_2^2$$

所以，当且仅当

$$k \le |\lambda_1|/(|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2)$$，