

一九八〇年中学生复习资料

# 数学

(三)

无锡市  
教师进修学院  
图书馆

赠 请 排 评 交 换

益阳行署 教学研究站 编印  
数学教研室

一九七九年十月

# 目 录

## 平面几何部分

|     |           |     |
|-----|-----------|-----|
| 第一章 | 基础知识..... | 1   |
| 第二章 | 三角形.....  | 14  |
| 第三章 | 四边形.....  | 42  |
| 第四章 | 相似形.....  | 56  |
| 第五章 | 圆.....    | 72  |
| 第六章 | 轨迹.....   | 119 |
| 第七章 | 面积.....   | 126 |

## 立体几何部分

|     |             |     |
|-----|-------------|-----|
| 第一章 | 直线与平面.....  | 141 |
| 第二章 | 简单的几何体..... | 159 |

## 平面解析几何

|     |              |     |
|-----|--------------|-----|
| 第一章 | 平面直角坐标系..... | 179 |
| 第二章 | 曲线和方程.....   | 201 |
| 第三章 | 直线.....      | 211 |
| 第四章 | 圆锥曲线.....    | 240 |
| 第五章 | 坐标变换.....    | 294 |
| 第六章 | 极坐标.....     | 324 |
| 第七章 | 参数方程.....    | 337 |

江南大学图书馆



91298029

# 平面几何部分

## 第一章 基础知识

### 一、基本概念

#### (一) 几何图形

只研究一个物体的形状、大小而不研究其他性质的时候，我们把这个物体叫做几何体。简称体。体是由面围成的。面和面相交于线，线和线相交于点。

点、线、面、体或若干个点、线、面、体组合在一起叫做几何图形。

#### (二) 线段 射线 直线

用直尺把两点连结起来就得到线段。线段有两个端点。

线段向一方无限延伸就形成射线。射线只有一个端点。

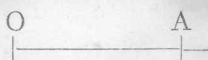
线段向两方无限延伸就形成直线。直线没有端点。

线段、射线、直线的表示法如图 2—1：

(图 2-1)

线段: 

直线: 

射线: 

### (三) 相交线与平行线

1. 角 以一点为公共端点的两条射线所组成的图形叫做角，这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边。如图 2-2。

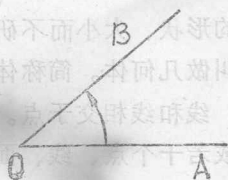


图 2-2 角 (二)

角也可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的。

## 关于角的一些概念

### ①各种大小的角。



周角



平角



直角

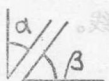


钝角



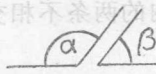
锐角

### ②数量相关的两角。



互余角

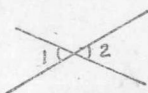
$$(\alpha + \beta = 90^\circ)$$



互补角

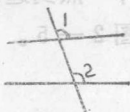
$$(\alpha + \beta = 180^\circ)$$

### ③位置相关的两角。



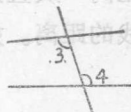
对顶角

$$(\angle 1 \text{ 和 } \angle 2)$$



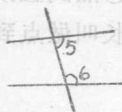
同位角

$$(\angle 1 \text{ 和 } \angle 2)$$



内错角

$$(\angle 3 \text{ 和 } \angle 4)$$



同旁内角

$$(\angle 5 \text{ 和 } \angle 6)$$

## 2. 垂线和斜线

两条相交直线成直角，叫做互相垂直，其中的一条叫做另一条的垂线，它们的交点叫做垂足。如图 2—3（甲）。

两条直线相交不成直角，其中一条叫做另一条的斜线，它们的交点叫做斜足。如图 2—3（乙）。义宝（一）

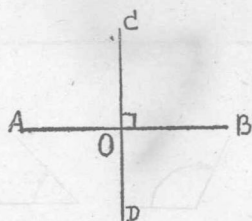


图 2—3 (甲)

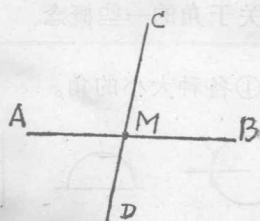


图 2—3 (乙)

### 3. 平行线

在同一平面内的两条不相交的直线叫做平行线。

### 4. 距离

① 两点间的距离 连结两点线段的长度叫两点间距离。

如图 2—4。

② 点到直线的距离 从直线外一点到这条直线的垂线段的长叫做点到直线的距离。如图 2—5。

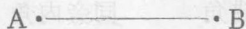


图 2—4

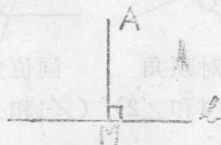


图 2—5

## 二、命题

叙述一个判断的句子叫做命题。几何命题有如下几种：

(一) 定义 规定一个名词或术语的意义的命题叫做定

义。如上面关于角、垂线、平行线等概念的规定都是定义。

(二)公理 由人类长期实践所证实,不用推理的方法加以证明而作为证明其他命题的根据的命题叫做公理。常用的公理有下面一些:

### 1.等量公理

①等量加等量,和相等。

②等量减等量,差相等。

③等量的同倍量相等。

④等量的同分量相等。

⑤在等式或不等式中,一个量可以用它的等量来代替(等量代换)。

### 2.不等量公理

①不等量加上或者减去等量,原来大的仍大。

②不等量乘以或者除以同一个正数,原来大的仍大。

③不等量加不等量,大量的和大于小量的和。

④等量减不等量,减去大的,差反而小。

⑤第一量大于第二量,第二量大于第三量,则第一量大于第三量。

⑥全量大于它的任一部分。

### 3.几何公理

(1)直线的性质:①经过两点有一条直线,并且只有一条直线。②两条直线相交只有一个交点。

(2)线段的性质:在所有连结两点的线中线段最短。

(3)垂线的性质:①经过一点,有且只有一条直线垂直于已知直线。②从直线外一点到这条直线的所有线段中,垂直线段最短。

4. 平行公理 经过直线外一点，而且只有一条直线和这条直线平行。

(三) 定理。用推理的方法证明是正确的命题叫做定理。下面几个定理是常用的基本定理：

① 直角都相等。

② 等角（或同角）的余角相等。

③ 等角（或同角）的补角相等。

④ 对顶角相等。

(四) 推论 由公理或定理直接推导出来的定理叫推论。

### 三、平行线的性质与判定

#### (一) 平行线的性质

两条平行线被第三条直线所截，那么

1. 同位角相等；（公理）

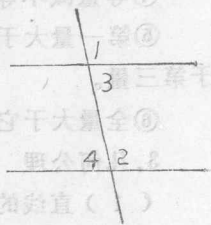
2. 内错角相等；

3. 同旁内角互补。

如图 2—6。若  $l_1 \parallel l_2$ ，则有

$$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ.$$



#### (二) 平行线的判定

两条直线被第三条直线所截，

1. 如果同位角相等，那么这两条直线平行。（公理）

2. 如果内错角相等，那么这两条直线平行。

3. 如果同旁内角互补，那么这两条直线平行。

图 2—6

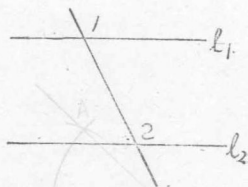
如图 2—7

### (三) 推论

1. 同平行于第三直线的两直线平行。

2. 同垂直于第三直线的两直线平行。

3. 如果一条直线和两平行线中的一条垂直，那么这条直线必和另一条直线垂直。



若  $\angle 1 = \angle 2$ ,  
则  $l_1 \parallel l_2$ ;

### 四、基本作图

1. 作一条线段等于已知线段。如图 2—8 (甲)。

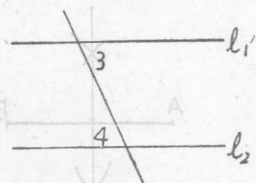
2. 作一个角等于已知角。如图 2—8 (乙)。

3. 作已知线段的垂直平分线 (中垂线)。如图 2—8 (丙)。

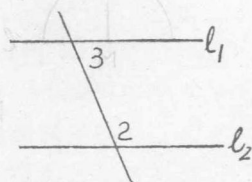
4. 作已知角的平分线。如图 2—8 (丁)。

5. 过已知点作已知直线的垂线。如图 2—8 (戊)。

6. 过已知点作已知直线的平行线。如图 2—8 (己)。



若  $\angle 3 = \angle 4$ ,  
则  $l_1' \parallel l_2$ ;



若  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$  则  $l_1 \parallel l_2$

图 2—7

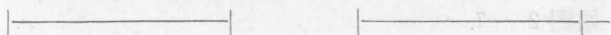


图 2—8 (甲)

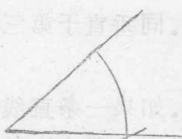
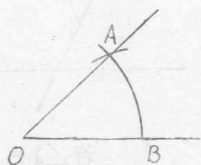


图 2—8 (乙)

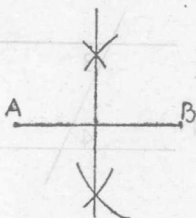


图 2—8 (丙)

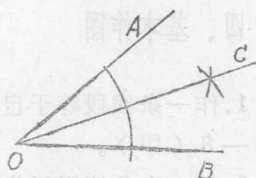


图 2—8 (丁)

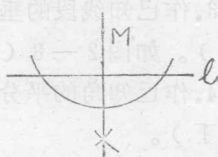
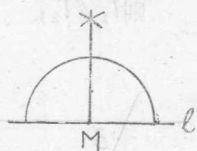


图 2—8 (戊)

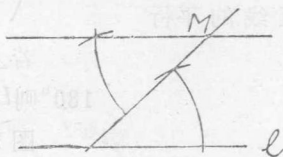


图 2—8 (己)

## 五、推理和证明

### (一) 推理

从已知的旧知识出发，通过实践、推想、验证，得到未知的新知识，这个过程叫做推理。

推理过程一般分为三段：

1. 大前提 对一般事情的判断。
2. 小前提 对和一般事情有联系的特殊事情的判断。
3. 结论 根据大小前提作出的判断。

这样的过程通常叫“三段论法”。

例如，命题“对顶角相等”的推理过程是：(如图 2—9) 1. 同角的补角相等。(大前提)

2.  $\angle AOC$  和  $\angle BOD$  都是  $\angle AOD$  的补角；(小前提)

3. 故  $\angle AOC = \angle BOD$ 。(结论)

这就是一个三段论法。

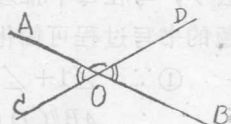


图 2—9

### (二) 定理的证明

一个定理的证明过程，通常是由若干个推理构成的。因此一个定理的证明，实际就是一串前后联贯的“三段论法”。

如图 2—10

已知：直线  $AB$ 、 $CD$  被  $EF$ 、 $GH$  所截，

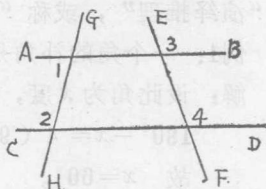


图 2—10

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

求证:  $\angle 3 = \angle 4$ 。

证明:

①同旁内角互补, 则两直线平行。

$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是同旁内角, 且 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

故  $AB \parallel CD$

②两直线平行, 则同位角相等。

$AB \parallel CD$ , 且 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 是同位角,

故  $\angle 3 = \angle 4$ 。

在实际书写过程中, 为了使证明过程的叙述简化, 我们通常把每个推理的大前提略去 (有时甚至把大、小前提都略去), 写在每个推理后面的括号内, 作为推理的根据。如上题的书写过程可简化为:

① $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , (已知)

$\therefore AB \parallel CD$  (同旁内角互补, 则两直线平行)。

② $\therefore \angle 3 = \angle 4$  (两线平行, 则同位角相等)。

建议同学们在第一、二章的证题练习中, 每个推理步骤都要写出推理根据。

【注】上面证题的这种“由一般到特殊”的推理方法叫做“演绎推理”, 或称“演绎法”。

例1: 一个角的补角是它的余角的4倍, 这个角是多少度?

解: 设此角为 $x$ 度, 则

$$180^\circ - x = 4(90^\circ - x)。$$

故  $x = 60^\circ$ 。

答: 这个角是 $60^\circ$ 。

例2: 如图2—11。

已知:  $\angle BED = \angle B + \angle D$ 。

求证:  $AB \parallel CD$ 。

证明: 过  $E$  作  $EF \parallel AB$ 。

$\therefore \angle 1 = \angle B$ 。(两直线平行, 内错角相等)

而  $\angle BED = \angle B + \angle D$   
(已知)

又  $\angle BED = \angle 1 + \angle 2$ (作图)

$\therefore \angle 2 = \angle D$ (等量代换)

$\therefore EF \parallel CD$ 。(内错角相等, 两直线平行)

故  $AB \parallel CD$ 。(平行于同一直线的两直线平行)

【注】添加辅助线的目的是创造条件使未知和已知联系起来, 从而找到解决问题的方法。在本题中, 还可以这样作辅助线:

① 延长  $BE$ , 交  $CD$  于  $F$ , (如图 2—12)。根据三角形外角的性质, 推出  $\angle B = \angle 1$ , 从而得到  $AB \parallel CD$ 。

② 连结  $BD$ 。(如图 2—13) 根据三角形内角和定理可推出  $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$ , 从而得到  $AB \parallel CD$ 。

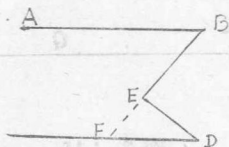


图 2—12

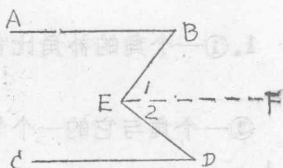


图 2—11

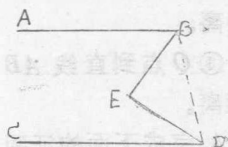


图 2—13

## 习 题 一

1. ①一个角的补角比它的余角的2倍还多 $20^\circ$ ，求这个角。

②一个角与它的一个邻补角以及一个对顶角的和是 $3\frac{1}{4}$ 直角。求这个角。

2. 如图2—14。

已知： $AD \parallel BC$ ， $CA$ 是 $\angle DCB$ 的平分线，且 $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle DCB = 50^\circ$ 。求 $\angle DAC$ 和 $\angle BAC$ 的度数。

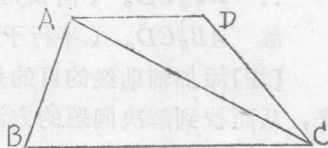


图 2—14

(本题要求只运用本章已介绍的公理和定理来推证计算)。

3. 如图2—15。

画出①、 $P$ 、 $Q$ 两点的距离。

②  $P$ 点到直线 $CD$ 的距离。

③  $Q$ 点到直线 $AB$ 的距离。

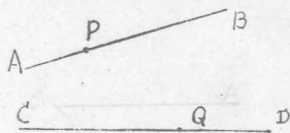


图 2—15

4. 完成下面的证明题。在证明过程中，要写出每个推理步骤的根据。

①如图 2—16。

已知：  $AB \parallel CD$ ， $EF$  交  $AB$  于  $E$ ，交  $CD$  于  $F$ ，且  $\angle 1 = \angle 2$ 。

求证：  $EG \parallel FK$ 。

②已知  $AB \parallel CD$ ，直线  $EF$  分别交  $AB$  于  $E$ 、交  $CD$  于  $F$ ， $EM$  是  $\angle BEF$  的平分线， $EN$  是  $\angle CFE$  的平分线。求证：  $EM \parallel FN$ 。

③两个邻补角的两条角平分线互相垂直

④两个对顶角的两条角平分线必重合成一直线。

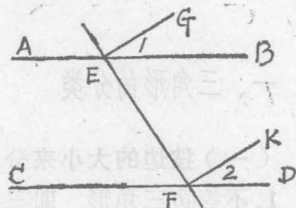


图 2—16

## 第二章 三角形

### 一、三角形的分类

#### (一) 按边的大小来分。

1. 不等边三角形 即三条边两两不等的三角形。
2. 等腰三角形 即三条边中有两边相等的三角形。
3. 等边三角形 即三条边都相等的三角形。

三角形  $\left\{ \begin{array}{l} \text{不等边三角形} \\ \text{等腰三角形} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{等边三角形} \\ \text{底腰不相等的等腰三角形} \end{array} \right.$

#### (二) 按角的大小来分

1. 锐角三角形 即三个角都是锐角的三角形。
2. 直角三角形 即有一个直角的三角形。
3. 钝角三角形 即有一个钝角的三角形。

三角形  $\left\{ \begin{array}{l} \text{直角三角形} \\ \text{斜三角形} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{锐角三角形} \\ \text{钝角三角形} \end{array} \right.$

### 二、三角形内角和定理

#### (一) 定理

三角形三个内角之和等于 $180^\circ$ 。

## （二）推论

1. 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和（外角定理）。

2. 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角。

## 三、三角形中的主要线段及五心

### （一）中位线

1. 定义 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线。

2. 性质 （三角形中位线定理）

三角形中位线平行于第三边，且等于第三边的一半。如图 2—17。

$DE$  是  $\triangle ABC$  的中位线。则

$$DE \parallel \frac{1}{2}BC.$$

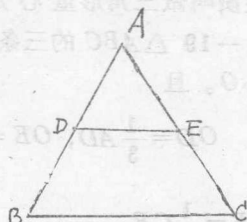


图 2—17

### （二）角平分线

1. 定义 三角形一个角的平分线和对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段，叫做三角形的角平分线。

2. 性质 三角形的三个角的平分线相交于一点，这点到三边的距离相等。我们称这点叫做三角形的内心。（即三角形内切圆圆心）如

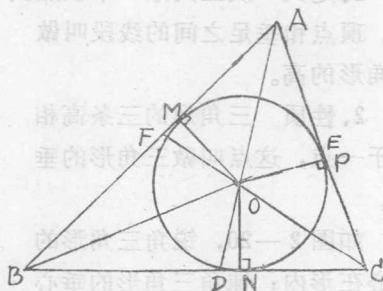


图 2—18

