中学数学参考资料

1979年

数学竞赛题解集

南通师专数学科编

一 九 七 九 年
数学竞赛题解集

南通师范专科学校数学科编

目　　录

全国第一试

一、求证：$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)\sin(\frac{2\pi}{3}+\theta)$

证明：原式右边 $= 4\sin\theta\{-\frac{1}{2}[\cos(\pi+2\theta)-\cos(-\frac{\pi}{3})]\}$

$$= -2\sin\theta(-\cos 2\theta - \frac{1}{2})$$
$$= 2\sin\theta\cos 2\theta + \sin\theta$$
$$= 2\sin\theta(1-2\sin^2\theta) + \sin\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$= \sin 3\theta = \text{左边。}$$

二、已知双曲线的两条渐近线方程为$x+y=0$，$x-y=0$，两个顶点间的距离为2，试求此双曲线方程。

解：由双曲线的渐近线方程可知，这双曲线的中心在原点，实轴在坐标轴上，且$a:b=1$.由两顶点间的距离为2，可知$a=1$.由$a:b=1$，得$b=1$. 所以，双曲线方程为

$$x^2-y^2=1\text{或}y^2-x^2=1\text{。}$$

三、在△ABC中，∠A为钝角，求作一个面积最小的圆把△ABC完全盖住。

解：以∠A的对边BC为直径作圆，此圆即为所求作。

(图略)

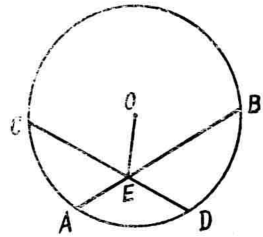
证明：∠A为钝角，则A点必在所作圆内，即此圆把△ABC完全盖住；

直径是圆中最长的弦，因此以短于BC的长为直径的圆必不能完全盖住△ABC。

所以，以BC为直径的圆是能完全盖住△ABC的所有圆中面积最小的。

四、圆内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分。

证明：设非直径的两弦AB与CD相交于E。连结OE。



如果AB与CD互相平分，则

AE = EB，CE = ED。

∵ AE = EB，∴OE⊥AB。

∵ CE = ED，∴OE⊥CD。

但在同一平面内，经过一点有两条直线垂直已知直线是不可能的，所以，弦AB与CD不能互相平分。

五、解方程组：

$$\begin{cases} x-y+z=1 & (1) \\ y-z+u=2 & (2) \\ z-u+v=3 & (3) \\ u-v+x=4 & (4) \\ v-x+y=5 & (5) \end{cases}$$

解：(1)+(2)+(3)+(4)+(5) 得 $x+y+z+u+v=15$ (6)

(1)+(2) 得 $x+u=3$ (7)

(2)+(3) 得 $y+v=5$ (8)

(3)+(4) 得 $z+x=7$ (9)

(4)+(5) 得 $u+y=9$ (10)

(6)－(7)－(8) 得$z=7$，将$z=7$代入(9)得$x=0$。

以$x=0$代入(7)，得$u=3$。以$u=3$代入(10)得$y=6$。

以$y=6$代入(8)，得$v=-1$。

$$\therefore \text{原方程组的解为}\begin{cases} x=0, \\ y=6, \\ z=7, \\ u=3, \\ v=-1. \end{cases}$$

六、解方程：$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$。

解：$5x^2-1-x\sqrt{5x^2-1}+x-1=0$

$$(\sqrt{5x^2-1}-1)[\sqrt{5x^2-1}-(x-1)]=0$$

由$\sqrt{5x^2-1}-1=0$，得$x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$

由$\sqrt{5x^2-1}-(x-1)=0$　得　$2x^2+x-1=0$

解此方程得 $x=\frac{1}{2}$，$x=-1$。

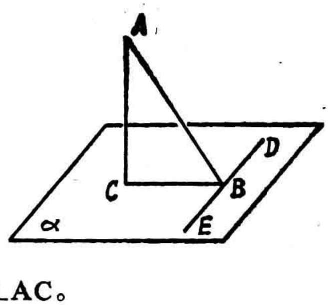
检验可知 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$是原方程的根，

$$x=\frac{1}{2}\text{和}x=-1\text{是增根。}$$

七、写出并证明立体几何中的“三垂线定理”。

三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那末它也和这条斜线垂直。

已知：如图，AC、AB分别是平面α的垂线和斜线，CB是AB在平面α内的射影，DE在平面α内，且DE⊥BC。



求证：DE⊥AB。

证明：∵ AC⊥平面α，DE在平面α内，　　∴ DE⊥AC。

又∵ $DE\perp BC$， ∴ $DE\perp$平面ABC， ∴ $DE\perp AB$.

八、设△ABC三内角A、B、C成等差数列，三条对应边长a、b、c的倒数也成等差数列，试求A、B、C.

解： 设$A=B-\alpha$，B，$C=B+\alpha$，则

$$A+B+C=B+\alpha+B+B-\alpha=3B=180^\circ$$

∴ $B=60^\circ$，$A+C=120^\circ$，$A-C=2\alpha$.

由 a、b、c的倒数成等差数列，得

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. 即$\frac{a+c}{ac}=\frac{2}{b}$, $b(a+c)=2ac$.

由正弦定理得：$\sin B(\sin A+\sin C)=2\sin A\sin C$.

$$\sqrt{3}\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-[\cos(A+C)-\cos(A-C)],$$

$$\sqrt{3}\sin 60^\circ\cos\alpha=-(\cos 120^\circ-\cos 2\alpha),$$

$$\frac{3}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}+\cos 2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha-\frac{3}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}=0,$$

$$4\cos^2\alpha-3\cos\alpha-1=0$$

$$(4\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)=0$$

$\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，α为钝角，不合题意.

$\cos\alpha=1$， $\alpha=0$， 即$\frac{A-C}{2}=0$.

∴ $A=C$.

∴ $A=B=C=60^\circ$.

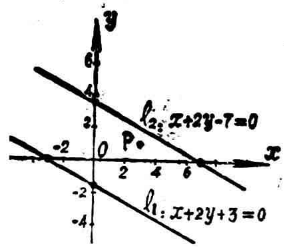
九、已知一点P（3，1），及两直线

l_1：$x+2y+3=0$； l_2：$x+2y-7=0$.

试求通过P点且与l_1、l_2相切的圆的方程.

解：$\because l_1$与l_2的斜率相等，

$\therefore l_1 /\!/ l_2$。



所以，所求圆的圆心在直线

$$x+2y-2=0$$

上，又两条直线l_1与l_2间的距离为$\frac{|-7|}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$。

所以，圆的半径为$\sqrt{5}$。

点(3，1)到圆心的距离为$\sqrt{5}$，设圆心坐标为(x, y)。

则得
$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5,\\ x+2y-2=0.\end{cases}$$

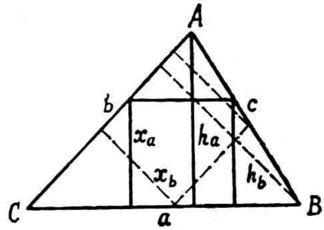
解得
$$\begin{cases}x=4,\\ y=-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\frac{4}{5},\\ y=\frac{3}{5}.\end{cases}$$

因此，所求圆的方程是 $(x-4)^2+(y+1)^2=5$，

或 $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5$。

十、已知锐角三角形的三边a、b、c满足不等式$a>b>c$，问四个顶点都在三角形边上的三个正方形哪个最大？证明你的结论。

解：设一边在a、b的正方形边长分别为 x_a、x_b，a、b上的高分别为 h_a、h_b。



$$\frac{x_a}{a}=\frac{h_a-x_a}{h_a}, x_a=\frac{ah_a}{a+h_a}=\frac{2\triangle}{a+h_a}.$$

（$\triangle$为$\triangle ABC$面积）

同理：$x_b=\frac{2\triangle}{b+h_b}$。

$$x_a - x_b = \frac{2\triangle}{a+h_a} - \frac{2\triangle}{b+h_b} = 2\triangle\frac{(b-a)+(h_b-h_a)}{(a+h_a)(b+h_b)}$$

$$= 2\triangle\frac{(b-a)+(a\sin c - b\sin c)}{(a+h_a)(b+h_b)}$$

$$= 2\triangle\frac{(a-b)\ (\sin c-1)}{(a+h_a)(b+h_b)}.$$

$\because$ c为锐角， $\therefore$ $\sin c-1<0$， 又 $a-b>0$，

$\therefore$ $x_a-x_b<0$ 同理：$x_b-x_c<0$

$\therefore$ $x_a<x_b<x_c$。 $\therefore$ 在最短边c上的内接正方形最大。

全国第二试

一、已知$f(x)=x^2-6x+5$。问满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x,y)在平面上的什么范围？并画图。

解：$f(x)=x^2-6x+5$，$f(y)=y^2-6y+5$。

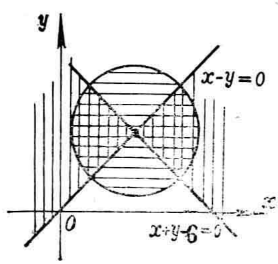
$f(x)+f(y)\leqslant 0$ 即 $x^2+y^2-6x-6y+10\leqslant 0$。

即 $(x-3)^2+(y-3)^2\leqslant(2\sqrt{2})^2$。 (1)

$f(x)-f(y)\geqslant 0$， 即 $x^2-y^2-6x+6y\geqslant 0$。

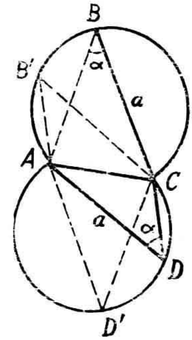
$(x-y)[(x+y)-6]\geqslant 0$ (2)

满足不等式(1)的点的范围是以点(3，3)为圆心，以$2\sqrt{2}$为半径的圆的内部(包括边界)；满足不等式(2)的点的范围是直线$x-y=0$与直线$x+y-6=0$的交角左、右区域(包括边界,如图)，这区域与满足不等式(1)的圆的公共部分,即所求数值范围〔图中方格部分(包括边界)〕。



二、命题“一对对边相等及一对对角相等的四边形必为平行四边形”对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形，满足已知条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法。

解：这个命题不能成立。假设一对对边的边长为 a，一对对角等于 α，则先在同一线段AC的两边作弓形角为 α 的两个弓形弧，然后以C点为中心，a 为半径画弧交于B、B′两点（只须 α 为锐角、$a>$AC便总会有两个交点）。同样，再以A点为中心，a为半径画弧与下面的弓形交于D、D′，则四边形ABCD满足命题之条件，但它不是平行四边形。同样AB′CD′也不是平行四边形。（AB′CD与ABCD′是平行四边形）。



证明：$\angle B=\angle D=\alpha$，$BC=AD=a$，所以满足题设条件，但$\angle CAD=\angle ACB'\neq\angle ACB$。所以ABCD不是平行四边形。

三、设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$。证明：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9.$$

又问α、β取什么值时等式成立？

解：原式左边

$$=\sec^2\alpha+\csc^2\alpha\csc^2\beta\sec^2\beta$$

$$=(1+tg^2\alpha)+(1+ctg^2\alpha)(1+ctg^2\beta)(1+tg^2\beta)$$

$$=(1+tg^2\alpha)+(1+ctg^2\alpha)[2+(tg^2\beta+ctg^2\beta)]$$

$$=1+tg^2\alpha+2+2ctg^2\alpha+(tg^2\beta+ctg^2\beta)$$
$$+ctg^2\alpha(tg^2\beta+ctg^2\beta)$$

$$= 1 + (tg\beta + ctg\beta)^2 + ctg^2\alpha(tg\beta + ctg\beta)^2 + tg^2\alpha$$

$$\geqslant 1 + 4 + 4ctg^2\alpha + tg^2\alpha \quad (\because tg\beta + ctg\beta \geqslant 2)$$

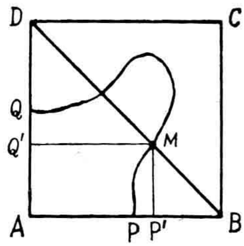
$$= 5 + 4(ctg^2\alpha + \frac{1}{4}tg^2\alpha)$$

$$= 5 + 4[(\frac{1}{2}tg\alpha)^2 + ctg^2\alpha]$$

$$\geqslant 5 + 4 = 9. \quad [\because (\frac{1}{2}tg\alpha)^2 + ctg^2\alpha \geqslant 1].$$

当 $\alpha = arctg\sqrt{2}$ 和 $\beta = \frac{\pi}{4}$ 时，等式成立。

四、在单位正方形的周界上任意两个点之间连一条曲线。如果它把正方形分成面积相等的两部分。证明这条曲线的长度不小于1。



证明： 设曲线PQ把正方形ABCD分成等积的两部分。

（1）如果P、Q两点分别在一对对边上，显然有曲线PQ的长 $\geqslant |AB| = 1$。

（2）如果P、Q两点分别在相邻两边上，设P在AB上，Q在AD上．假设曲线PQ和对角线BD没有任何公共点，这时PQ和顶点A围成的部分的面积小于△ABD的面积，即小于正方形的一半，与题设矛盾，因此曲线PQ和对角线BD必有公共点。设有一公共点为M。作 $MP' \perp AB$，$MQ' \perp AD$，则

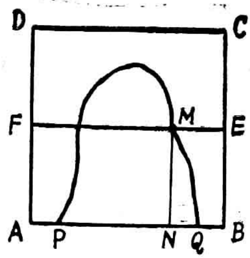
曲线PQ的长 = 曲线PM的长 + 曲线MQ的长

$\geqslant |P'M| + |MQ'| = |BP'| + |P'A| = |AB| = 1$.

（3）如果P、Q两点在同一条边AB上，BC和AD的中点分别是E，F。

假设曲线PQ和EF没有任何公共点，则曲线PQ和线段

PQ围成的面积显然小于正方形的一半，和题设矛盾。因此曲线PQ和EF必有公共点，设有一公共点为M，作MN⊥AB。则



曲线PQ的长

= 曲线PM的长 + 曲线MQ的长

$$\geqslant |MN| + |MN| = 1.$$

综合上面三种情况，可知原命题成立。

五、在正整数上定义一个函数$f(n)$如下：

当n为偶数时，$f(n)=\frac{n}{2}$；当n为奇数时，$f(n)=n+3$。

（1）证明：对任何一个正整数m，数列

$a_0=m$，$a_1=f(a_0)$，……，$a_n=f(a_{n-1})$，……中总有一项为1或3。

（2）在全部正整数中，哪些m使上述数列必然出现"3"？哪些m使上述数列必然出现"1"？

解：（1）如果$m=1$或$m=3$，则结论显然成立。

如果m为偶数，设$m=2^k l$（l为奇数），则$a_k=\frac{2^k l}{2^k}=l$。

如果$l=1$或$l=3$，则结论成立；如果l为1与3之外的奇数，$a_{k+1}=l+3$为偶数，再重复上面的过程，继续下去，数列

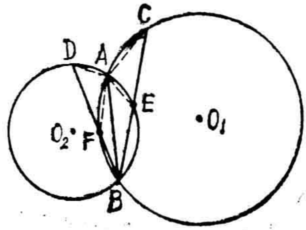
$$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots.$$

逐渐递减，最终必有一项为1或3。

（2）如果$m=3m_1$（m_1为正整数），则在上面的减递过程中，因数3不能约去，最后必然得3。如果m不是3的倍数，则在递减过程的最终必然得到最小正整数1。

六、如图：假设两圆O_1，O_2交于A、B。圆O_1的弦BC交

圆O_2于E。圆O_2的弦 BD交圆O_1于F。



证明：

(1) 若$\angle DBA=\angle CBA$，

则$DF=CE$。

(2) 若$DF=CE$

则$\angle DBA=\angle CBA$

证明：(1) $\because\ \angle DBA=\angle CBA$，

$\therefore\ \overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{AC}$。 $\therefore AF=AC$。

$\because$ AFBC是圆O_1的内接四边形，

$\therefore\ \angle AFD=\angle ACE$。

$\because$ AEBD是圆O_2的内接四边形，

$\therefore\ \angle FDA=\angle CEA$。

$\therefore\ \triangle AFD\cong\triangle ACE$。

$\therefore\ DF=CE$。

(2) 如果$DF=CE$，

$\because\ \angle AFD=\angle ACE$，$\angle FDA=\angle CEA$，

$\therefore\ \triangle AFD\cong\triangle ACE$。

$\therefore\ AF=AC$。

$\therefore\ \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AC}$。

$\therefore\ \angle DBA=\angle FBA=\angle CBA$。

七、某区学生若干名参加数学竞赛，每个学生得分都是整数，总分为8250。前三名的分数是88，85，80，最低分数是30。得同一分数的学生都不超过3人。问至少有多少学生得分不低于60(包括前三名)？

解：在人数一定的情况下，及格者(即不低于60分)的人数取最小值时，不及格者(即低于60分)的人数必取最大值。

∵不及格者最低分数为30，得同一分数的学生不超过3人

∴不及格的人数最多是 $3\times(59-30+1)=90$人

从而不及格者的总分最多是 $S_1=\frac{1}{2}\times90\times(59+30)=4005$

前三名学生的总分是 $S_2=88+85+80=253$

其他及格者的总分至少是 $S_3=8250-4005-253=3992$

及格分数应从79起顺次递减1，则递减n次后的分数是$79-n+1$。按题意有 $3992-\frac{n(79+79-n+1)}{2}\times3\geqslant o$

解得 $n\geqslant19$

及格分数已递减到 $79-19+1=61$(也就是说其他及格者为从61分至79分，每种分数各3人)这部分总分是

$$S_4=\frac{1}{2}\times19(61+79)\times3=3990$$

$$S_4-S_3=3992-3990=2$$

这2分是及格者的总分中的，但不可能把它施加给任何一个及格者，否则某一分数线上将出现4个人，∴只能施加给不及格者；若把它施加给得30分至57分的任何一个人时，也将在某一分数线上出现4个人，∴只能把它施加给两个得59分的各1分或一个得58分的使之变为60分。按题意，只有施加给得58分的，这样及格的总人数补上1人，故及格人数至少是 $19\times3+3+1=61$

注：以上解法是在不允许第四、五名学生的得分也是80分的情况下考虑的，如果允许第四、五名也可以是80分，那么那个“2分”可以施加给两个得79分的各1分或施加给一个得78分的，使之变为80分。这样及格的人数至少是60。

北京市第一试

一、求函数$y=lg(\sqrt{x^2-3x-10}-x-3)$的定义域

解：所求函数的定义域是下列不等式组的解

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-3x-10}-x-3>0 & (1)\\ x^2-3x-10\geqslant 0 & (2)\end{cases}$$

由(1) 得　$x<-\dfrac{19}{9}$

由(2) 得　$x\geqslant 5$ 或 $x\leqslant -2$

∴ 上述不等式组的解,即所求函数的定义域是$(-\infty,-\dfrac{19}{9})$

二、已知：x,y,z都是锐角，且满足等式

$$\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\frac{z}{2}$$

求证：　$x+y+z=\pi$

证明：由题设得：

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+1-2\sin^2\frac{z}{2}=1+2\sin\frac{z}{2}(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2})$$

$$\therefore\cos\frac{x-y}{2}(\cos\frac{x+y}{2}-\sin\frac{z}{2})+\sin\frac{z}{2}(\cos\frac{x+y}{2}-\sin\frac{z}{2})=0$$

$$\therefore(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{\pi-z}{2})\ (\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2})=0$$

$$\therefore 2\sin\frac{\pi-x-y-z}{4}\sin\frac{\pi-z+x+y}{4}(\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{z}{2})=0\quad(1)$$

$$\because 0<x<\frac{\pi}{2},\qquad 0<y<\frac{\pi}{2},\qquad 0<z<\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore -\frac{\pi}{8}<\frac{\pi-x-y-z}{4}<\frac{\pi}{4},\qquad \frac{\pi}{8}<\frac{\pi-z+x+y}{4}<\frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{4}, \qquad 0<\frac{z}{2}<\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore sin\frac{\pi-z+x+y}{4}\neq 0, \qquad cos\frac{x-y}{2}+sin\frac{z}{2}\neq 0$$

$\therefore$当且仅当 $sin\frac{\pi-x-y-z}{4}=0$ （1）式成立。

又知道 $-\frac{\pi}{8}<\frac{\pi-x-y-z}{4}<\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \frac{\pi-x-y-z}{4}=0$$

$$\therefore \quad x+y+z=\pi.$$

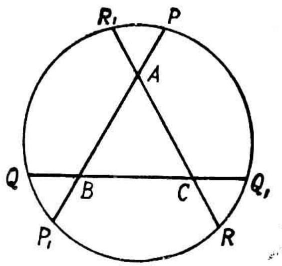
三、如图，圆的三条弦PP_1、QQ_1、RR_1两两相交，交点分别为A、B、C

已知：$AP=BQ=CR$，$AR_1=BP_1=CQ_1$

求证：△ABC是正三角形。

证明：令 $AP=BQ=CR=x$，$AR_1=BP_1=CQ_1=y$

$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$。



则 $\qquad x(c+y)=y(b+x)$

即 $\qquad xc=yb \qquad (1)$

同理可得 $\qquad xb=ya \qquad (2)$

$\qquad xa=yc \qquad (3)$

由(1)(2)(3)得 $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=\frac{a}{c}=\frac{y}{x}$

$$\therefore \quad \frac{c}{b}=\frac{b}{a}=\frac{a}{c}=\frac{c+b+a}{b+a+c}=1$$

$$\therefore \quad a=b=c.$$

$\therefore$ △ABC为正三角形。

四：在平面α内有正三角形A′BC，直线DE∥BC，且分别交A′B，A′C于D、E，沿DE将△A′DE掀起使与平面α