

数学复习题解

(复旦大学 附中原编)

上海市五十四中
安徽省砀山中学

说 明

本题解系上海市复旦大学附中为其学生编写，目的是弥补上海市的数学复习提纲的不足之用。后经上海市第五十四中学数学教研组推荐，由上海市第五十四中学与安徽省砀山中学联合翻印，并由砀中数学组同志负责校对，在校对中对某些不合理的习题（如原编第12题为已知 $4ab=4a^2+9b^2$ 且 $a>0$ ，

$b>0$ ，求证 $\lg \frac{2a+3a}{4} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$ ，实际上不存在这样的

a 、 b ，因为 $4a^2-4ab+9b^2=0$ ，解得 $a = \frac{4b \pm \sqrt{-128b^2}}{8}$

我们就改为现在的12题）加以修改，另外解答太简的增加些步骤，使之较明确，对解答不妥的也作了些修改。但由于水平有限又系业余时间校对、修改，仍不免有错，甚至原对的反而改错，特此在这里向原编者与读者表示欠意，并请予以原谅，及时加以指正。

上海市第五十四中学数学组
安徽省砀山中学 数学组

1979. 1. 14

1. 已知 $x > 0$, $y > 0$

$$\text{且 } \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 3\sqrt{y}(\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$$

(1) 求 $\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值; (2) 求 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y}$ 的值

2. 如果 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}})$ ($a > 0$, $b > 0$), 求

$$\frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \text{ 的值.}$$

3. 计算 $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

4. 化简 $\sqrt{3 + 2\sqrt{5 + 12\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}}$

5. 化简 $\frac{1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} + \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3}{(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{7} + 3)}$

6. 化简 $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x + 1}}$
($x \geq -1$)

7. 化简 $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$ ($x \geq 1$).

8. 如果 $(2x - 1)(2 - x) > 0$,
化简 $2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |2x - 1|$.

9. 证明 $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1$.

10. (1) 如果最简根式 $\sqrt[n^2 + 3n]{2a + b}$ 和 $\sqrt[n + 15]{3a - b}$
是同次根式, 求 n 的值.

(2) 如果最简根式 $\sqrt[3a + 2]{2a + b}$ 和 $\sqrt[7 + 3b - a]{3a - b}$

是同类根式，求 a 、 b 的值。

11. 已知 $\log_2 a = 4 + \log_4 b^2$ 且 $b > 0$ ，求 $\frac{2}{a+2} \frac{a+b}{b}$ 的值。

12. 已知 $24ab = 4a^2 + 9b^2$ 且 $a > 0$ ， $b > 0$ ，

求证 $\lg \frac{2a+3b}{6} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$ 。

13. 若方程 $4x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ 有虚根，且 a 为实数。化简 $\sqrt{4a^2 - 12a + 9} + \sqrt{a^2 - 12a + 36}$ 。

14. 求 $\lg(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})$ 之值。

15. 求 $|(0.01)^{-\frac{1}{2}} + 2 \lg 2| + \sqrt{4(\lg 2)^2 - \lg 16 + 1} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ 的值。

116. 有三数之和为 0，求证：它们的立方和等于其连乘积的 3 倍。

17. 设 x ， y ， z 为各不相等的三数。

求证：
$$\left(\frac{1}{y-z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z-x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x-y}\right)^2 = \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y}\right)^2$$

18. 如果 $abc = 1$ ，求证：

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

19. 四个连续自然数的积与 1 的和是完全平方数。

20. 如果 a ， b ， c ， d 都是实数且适合式子

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcb,$$

求证：以 a ， b ， c ， d 为四边的四边形是菱形。

21. 若三角形三边 a 、 b 、 c 、适合等式

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2,$$

问这三角形是什么形状?

22. 若 a, b, c 都是实数, 且 $\left(-c^3 + \frac{1}{c} - a\right)^2$

$$+ \left(c + \frac{1}{c} - b\right)^2 = 0, \text{ 则 } b(b^2 - 3) = a.$$

23. 求证: 对于任意实数 x , $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$ 均非负数.

24. 有六位数 $1abcde$ 乘以 3 后变为 $abcde1$, 求这数.

25. 已知 $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 1834 = 3.2634$,

求 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ 的值.

26. 已知 $\lg 64 = a$, 求 $x = \log_{25} 50$.

27. 已知 $\log_{12} 27 = a$, 求证 $\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$

28. 已知 $\lg x$ 的尾数与 $\lg \frac{31}{4}$ 的尾数相同, $\lg x$ 的首数与 $\lg \sqrt{10.34}$ 的首数相同, 不查表求 x .

29. 如果 $b^2 + c^2 = a^2$ 且 a, b, c 都为正数, 求证

$$\frac{a+b+c}{c+a-b} = \frac{a+b-c}{b+c-a}.$$

30. 已知 $\frac{a}{c} = \sin \theta$ $\frac{b}{c} = \cos \theta$

$$(c+b)^{c-b} = (c-b)^{c+b} = a^a$$

$$(c > 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

求证: (1) $(\ln a)^2 = \ln(c+b) \ln(c-b)$,
(2) $b = 0$.

31. 已知: $\frac{x}{y+z} = a$, $\frac{y}{z+x} = b$, $\frac{z}{x+y} = c$ 且

$$x + y + z \neq 0,$$

求证: $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1.$

32. 已知: $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{a-2b+c}$

且 a, b, c, x, y, z 均不为零,

求证: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{x-z} = \frac{c}{x-2y+z}.$

33. 已知: a 为整数, $a > 1$, 求证: $a^4 + 4$ 不是质数.

34. 解下列各方程:

(1) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 6$

(2) $x^4 + (x-4)^4 = 626$

(3) $(b-a)x^2 + (a-c)x + (c-b) = 0$

(4) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$

(5) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35-2x$

(6) $\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x-2} + \sqrt{x+7} - 6\sqrt{x-2} = 1$

(7) $x^{x^3} = 3$ (8) $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x \quad (x > 0)$

(9) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

(10) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x = 4$

(11) $|x+3| + |x| - |5-x| = 6$

(12) $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$

(13) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

(14) $\sqrt{1 + \lg \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 - \lg \operatorname{tg} x} = 2$

$$(15) \quad x^{\lg^2 x + \lg x^3 + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$$

$$(16) \quad (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{\sin x} + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{\sin x} = \frac{10}{3}$$

35. 解下列各方程组:

$$(1) \quad \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) - 2xy = 18 \\ (x+y)^2 - xy = 19 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} xy + x + y = 1 \\ yz + y + z = 5 \\ zx + z + x = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (b+c)(y+z) - ax = b-c \\ (c+a)(z+x) - by = c-a \\ (a+b)(x+y) - cz = a-b \end{cases}$$

$$(a+b+c \neq 0)$$

$$(4) \quad \begin{cases} x^2 = 6 + (y-z)^2 \\ y^2 = 2 + (z-x)^2 \\ z^2 = 3 + (x-y)^2 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5 \\ |x+1| = 4y-4 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \log_x [\log_2 (\log_x y)] = 0 \\ \log_y 9 = 1 \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 10^{xy} = 10^x \cdot 10^y \\ \lg(2x+1) + \lg(y-2) = 1 \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} x^{x+y} = y^{60} \\ y^{x+y} = x^{15} \end{cases}$$

36. 求复数 $\frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2 + \sqrt{x^4 + y^4}}i}$ 的模数 (x, y 为实数)

37. 若 $|x| - x = 1 + 2i$, 求 x .

38. 计算 $A = \frac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2m}}$ 其中 m 和 n 都是自然数.

39. 如果 $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ 求证 $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos\theta$

40. 从下列关系求 x, y 的实数值

$$(x+y)2i - \frac{9}{i} - x = -y + 5(x+y)i - 1$$

41. 求下列方程组的实数解:

$$\begin{cases} x - i = yi \\ x - i^2 = 2a - y \end{cases} \quad (a \text{ 为复数参数})$$

42. 求证: $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^n = -1$

其中 n 是不等于 3 的倍数的整数.

43. 化 $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ ($0 \leq \alpha < \pi$) 成三角函数式.

44. 已知 $|x - 2| < 3$, 解方程

$$|x - 3| + |x - 5| + |x + 1| = 8$$

45. 已知 $f(x-1) = x^2 - 4x$ 解方程 $f(x+1) = 0$.

46. 设实数 x, y 满足方程 $(2x-1)^2 + (y-8)^2 = 0$, 求 $\log_8 xy$ 的值.

47. 设三个未知数 x, y, z 适合以下的方程 $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}$, 求 $x^3+y^3+z^3$ 之值.

48. 解方程 $\log_3 x + (\log_3 x)^2 + (\log_3 x)^3 + \cdots = \frac{1}{2}$

49. 解方程 $n^2 + \log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{2}}}}}_{n \text{ 次}} = 90$

50. 试求方程 $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}}$ 的正根, 并证明只有一个正根.
51. 求 $\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$ 的实数解.
52. 设 a, b, c, d 为互不相等的四个整数, n 是方程 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 9$ 的整数根, 则 $4n = a + b + c + d$.
53. m 是什么实数时, 方程 $m(x-3) + 3 = m^2x$ 的解不小于 2?
54. m 是什么实数时, 方程 $(1-m^2)x^2 + 2mx - 1 = 0$ 的两个根都在 0 和 1 之间?
55. 求实数 m 的值, 使方程 $8x^2 - (m-1)x + m-7 = 0$,
(1) 有两个相等的实数根; (2) 两个根是相反的数;
(3) 有一根是零.
56. 已知 a, b, c 是三角形的三边, 求证下面的方程的根是虚根 $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$.
57. 为了使方程 $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ 的二根在 -2 和 4 之间, 问 m 应在什么范围内?
58. 如果 α, δ 是方程 $2x^2 - 6x - 3 = 0$ 的根, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 成等差数列, 试作以 β, γ 为根的一元二次方程.
59. K 是什么整数时, 方程 $(K^2-1)x^2 - 6(3K-1)x + 72 = 0$ 有两个不相同的正整数根?
60. 当 m 是什么实数时, 方程 $x^2 + (m+2)x + (m+5) = 0$ 的两个根都是正数?
61. 试求实数 K 的值, 对任何有理数 m , 方程 $x^2 - 4mx + 4x + 3m^2 - 2m + K = 0$ 的根均为有理数.

62. A, B, C 为不相等的实数, 证明三个一元二次方程
 $Ax^2 + 2Bx + C = 0$, $Bx^2 + 2Cx + A = 0$,
 $Cx^2 + 2Ax + B = 0$ 不可能都得到等根.
63. 已知一元二次方程 $x^2 - 2x + \lg(a^2 - 2a) = 0$, 问 a 为何值时, 此方程有一正根和一负根.
64. 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根为 r 和 s , 且它们都不等于 0, 求以 $r^2 + \frac{1}{s^2}$ 和 $s^2 + \frac{1}{r^2}$ 为根的方程.
65. 如果方程 $x^2 + ax + b = 0$ 与 $x^2 + px + q = 0$ 有一公共根, 求以它们的相异根为根的一元二次方程.
66. 当 a, b, c 为实数根时, 求证方程 $x^2 - (a+b)x + (ab-c^2) = 0$ 有两个实数根, 并求出这两个根相等的条件.
67. 试证 m 为任一实数时, 方程 $(x-1)(x-3) + m(x-2)(x-4) = 0$ 有两实根.
68. 已知方程 $x^2 - 2x + \lg(2k^2 - k) = 0$ 有两个不相等的实数根, 求 k 的取值范围.
69. 一个三角形的两边的长分别是 5 cm 和 3 cm , 它们的夹角的余弦为方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根, 求这个三角形的面积.
70. 如果 a, b, c 表示一个直角三角形 ABC 的三边, 且 c 是斜边, 又三角形 ABC 的内切圆分别切 BC, CA, AB 于 D, E, F 三点, 那末 BD 和 AE 是方程 $2x^2 - 2cx + ab = 0$ 的两个根.
71. a 和 b 为何值时, 方程组
- $$\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 9x + ay = b \end{cases}$$
- 为无解? 又何时方程组为不定解?

72. a 是什么整数时, 方程组

$$\begin{cases} 3x + 7y = a \\ 2x + 5y = 30 \end{cases} \quad \text{的解是正数?}$$

73. m 是什么整数时, 方程组

$$\begin{cases} 4x + 3y = 60 \\ mx + (m+2)y = 60 \end{cases} \quad \text{的解符合 } x > y > 0 \text{ 的条件?}$$

74. 试求出所有边长都是整数同时周长的量数等于面积的量数的直角三角形.

75. 解下列各不等式

$$(1) \lg\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} + \lg\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} < \lg\left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$(2) x^{\log_a x} > \frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

$$(3) 10^{2\lg x} + 4x - \log_2 32 > 0$$

$$(4) (\lg_2 3 \cdot \lg_0 4)x - 10^{2\lg x} + \sqrt[3]{1-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{6+2\sqrt{5}} < 0$$

76. 已知 n 是自然数, 解不等式,

$$4 < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} < 5.$$

77. 已知 n 是自然数, 解不等式 $\left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| < \frac{1}{10}$.

78. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, $\cos \theta = \frac{x-1}{x-2}$, 求 x 的取值范围.

79. 设不等式 $\frac{2x^2 + 2Kx + K}{4x^2 + 6x + 3} < 1$ 对于任何实数 x 都成立, 求 K 的范围.

80. x 是什么实数时, $\lg\left(\frac{5x^2 - 10x + 3}{3x^2 - 7x + 2} - 1\right)$ 才有意义?

81. 比较 x^2 与 $1-x$ 的大小.

82. m, n 都是自然数, 比较 $m+n$ 及 mn 的大小.

83. 设 $a > b > 0$, 求证: $a^a b^b > a^b b^a$.

84. 比较 $\log_x x$ 与 $\log_x 3$ 的大小.

85. 设 a, b, c 为正数且 $a+b+c=1$ 证明: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

86. 设: $-1 < a < 1, -1 < b < 1$, 求证 $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

87. 如果 a, b, c 为一个三角形的三边, 那末 $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

88. 若 $a > b > 0$ 则 $\frac{a \sin x + b}{a \sin x - b}$ 不能介于 $\frac{a-b}{a+b}$ 和 $\frac{a+b}{a-b}$ 之间.

89. 试证明: 当变量 x 为实数值时, 函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ 的值不能大于 $\frac{3}{2}$ 与小于 $\frac{1}{2}$.

90. 假设 x, y, z 都是实数, 又知道它们满足

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2} \quad (a > 0),$$

试证 x, y, z 都不能是负数, 也都不能大于 $\frac{2}{3}a$.

91. 求证: $\frac{1}{\log_5 19} + \frac{2}{\log_3 19} + \frac{3}{\log_2 19} < 2$.

92. 设 $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, b_1, b_2, b_3, \dots b_n$ 皆为正数且 $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \frac{a_3}{b_3} \dots > \frac{a_n}{b_n}$,

求证: $\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} > \frac{a_n}{b_n}$

93. 设 $a^2 + b^2 = 7ab$ 且 $a > 0, b > 0$

求证: $\log_m \left[\frac{1}{3} (a+b) \right] = \frac{1}{2} (\log_m a + \log_m b)$
 ($m > 0$ $m \neq 1$)

94. 如果 a, b 是正数, 且 $a^b = b^a$ 求证: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

95. 求证 $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\log_a (x - \sqrt{x^2 - 1})$
 ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \geq 1$)

96. 如果 $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ 成等差数列, 且 $x \neq 1$,

证明 $n^2 = (kn)^{\log_k m}$

97. 有两个对数函数 $y_1 = \log_a (2x^2 - 3x + 1)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)
 和 $y_2 = \log_a (x^2 + 2x - 5)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 要使
 (1) $y_1 = y_2$; (2) $y_1 < y_2$; (3) $y_1 > y_2$; 求 x .

98. 有两个指数函数 $y_1 = a^{2x^2 - 3x + 1}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)
 和 $y_2 = a^{x^2 + 2x - 5}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 要使
 (1) $y_1 = y_2$; (2) $y_1 > y_2$; (3) $y_1 < y_2$, 求 x .

99. 当 x 为何值时 $\sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg x}}}}}$ 才有意义

100. 如果 $A = \sqrt{2x + 7}$, $B = \sqrt{2 - x}$, $C = \sqrt{5 - x}$, x
 是什么实数值时, A, B, C 都有意义? 又 x 为什么实数
 值时, 等式 $A - B = C$ 成立?

101. 如果 $A = \lg \sqrt{x + 1}$, $B = \lg \sqrt{4 - x}$, $C = \lg \sqrt{x - 2}$,
 求使 A, B, C 都有意义的实数值的集合, 又 x 为什么值
 时, $A + B - C$ 的值等于 $_{25} \log_5 \sqrt{\lg 2}$?

102. 如果 a, b, c, x 都是实数, a, b, c 不为零, 且
 $(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a + c)x + b^2 + c^2 = 0$.

求证 a, b, c 成等比数列, 且它的公比是 x .

103. 如果一个直角三角形的三边之长成等差数列, 那么它们的比是 $3:4:5$, 试加以证明.

104. 已知 $21g(x-2y) = \lg x + \lg y$, 求 $x:y$.

105. 已知 $\log_a(x^2+1) + \log_a(y^2+4) = \log_a 8 + \log_a x + \log_a y$
($a > 0, a \neq 1$), 求 x, y 实数解.

106. 求证: $(\log_2 3 + \log_4 9 + \cdots + \log_{2^n} 3^n) \log_9 \sqrt[n]{32} = \frac{5}{2}$

107. 如果 $\log_2 x + \log_2(x - \frac{3}{8}) + 2^{\log_2 4} = 0$,

求 $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ 的和.

108. 求 $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \cdots + \frac{1}{x}$ 的和. ($x > 2$ 且为整数)

109. 求数列 $(x-y) + (\frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2}) + (\frac{y^4}{x^3} - \frac{y^5}{x^4}) + \cdots$
前 n 项之和.

110. 求数列 $(\frac{3}{7} + 1) + (\frac{9}{49} - \frac{1}{3}) + (\frac{27}{343} + \frac{1}{9}) + \cdots$
+ $[\frac{3^n}{7^n} + (-1)^{n-1}(\frac{1}{3^{n-1}})]$ 的和.

111. 如果 $|a-2| + \sqrt{2b+1} = 0$, 求无穷数列 $ab, b, \frac{b}{a}, \cdots$
的和.

112. 若 $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + Kx + L$ 能被 $6x^2 + 11x + 3$
整除, 求 K, L .

113. 若 $x^3 + 5x + c = (x-1)(x^2 + px + q)$ 成立, 求 p, q, c 的值.

114. 已知 $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$ 且 $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 求 a 的值.

115. 已知函数 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(a)$ ($a \neq 1$).

116. 求函数 $y = \lg(3-x) + \frac{\sqrt{(4-x)(x+2)}}{x+1}$ 的定义域

117. 已知函数 $y = \frac{\sqrt{(4-x)(x+3)}}{\sqrt[3]{1-\lg(x+2)}}$, 求自变量 x 的允许值范围.

118. x 为何值时, 函数

$$y = \sqrt[3]{6 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} + \sqrt{\log_{0.1} \frac{3x-2}{2x+1}}$$
 有意义?

119. 讨论 $y = \sqrt{(x-2)^2} + |x+3|$ 之值, 并绘出图象.

120. 若 x, y 为实数, 且 $x^2 + y^2 + 2xy + x - y$, 求证 x 的最大值为 $\frac{1}{8}$, y 的最小值为 $-\frac{1}{8}$.

121. 已知某二次三项式当 $x = \frac{1}{2}$ 时取得极值为 25, 这个二次三项式的两根的立方和等于 19, 求这个二次三项式.

122. 已知某二次三项式当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 取得极值为 $4\frac{1}{2}$, 这个二次三项式的两个根的倒数的平方和为 $1\frac{1}{4}$, 求这个二次三项式和它的两个根.

123. 若 $2x^2 + y^2 = 6x$, 求 $x^2 + y^2$ 的最大值.

124. 周长为 l 的直角三角形在什么情况下斜边最短, 并求之.

125. 在 $\triangle ABC$ 中, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $C = 30^\circ$, 求 $a + b$ 的极大值.

126. 若 $\triangle ABC$ 是直角三角形, $\sin A \sin B \sin C$ 有没有极大值? 如果有的话, 极大值是多少?

127. 在小于半圆的扇形内作一个内接矩形, 求何时此矩形的面积最大? 又设扇形中心角为 120° , 半径为 2 米, 此内接矩形的面积最大值是多少?

128. 有成等比数列之三实数, 其和等于正常数 a , 试求其

积之极大值及极小值.

129. 三角形的两边之和为10, 夹角为 θ , 且

$10x^2 - 10x \cos \theta + 3 \cos \theta + 4 = 0$ 的两根相等, 求这个三角形面积的最大值.

130. 三角形两边之和为4 cm, 夹角为 60° ,

(1) 求周界的最小值; (2) 求面积的最大值; (3) 当面积最大时, 这个三角形是什么形状?

131. 正方形 $ABCD$ 的边长为1, 在正方形 $ABCD$ 内作内接正方形 $A'B'C'D'$, 试问正方形 $A'B'C'D'$ 的面积最小值是多少?

132. 有一水槽 (直三棱柱) 的直截面, 底部的夹角 $C = 120^\circ$, 宽 $AB = 2$ 米, 求这直截面是怎样的三角形时, 水槽的容量最多?

133. 屋顶的倾斜度是多少度时, 雨水从屋顶流下的时间最短? (摩擦力略去不计)

134. 某公社要建造一个横截面是等腰梯形的灌溉渠道, 根据流量和地形的条件确定渠道的深度是 h , 截面积是 s , 现在要在渠道的表面铺上一层水泥, 试问等腰梯形的尺寸怎样, 才能使所用的水泥量最少?

135. 在垂直的墙上贴一张画 AB , 看的人应当站在离墙多远的地方, 才能使看这画的视角 θ 最大?

136. 车工要把一个半径是 R 的铁球车削成圆柱形另件, 要使削去的铁屑最少, 那末这个圆柱形的另件的尺寸应该怎样?

137. 在已知的圆锥内作一个侧面积最大的内接圆柱, 这时圆柱的高应如何?

138. 已知 $ABCD$ 是一个有活动接头的四边形, 四边各等于

定长 a, b, c, d , 求证只有当它能内接于圆时, 才有最大的面积.

139. 如图(见后解答): 表示曲柄机械装置的图样, 连接杆 AC 的长是 l , 曲柄 AB 的长是 r , 若曲柄 AB 与轴 BC 成 α 角, 求 (1) 这时连杆与轴 BC 的夹角 β .

(2) 当 $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ 且 α 为 60° 时, β 是多少度? (3) α 为何值时, β 的值最大? (4) 若 $\alpha = 0^\circ$ 时, 滑子 C 的位置是 D , 求滑子当 $\alpha = x$, 滑子 C 与 D 的距离为 y 的函数式.

140. 已知矩形对角线的长为 a , 求它的周长最大值.

141. 求函数 $y = 3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x$ 的极值

142. 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 1, C = 60^\circ$ 求 $a + b$ 的极值

143. a, b, c 均为实数, 求 $y = a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x$ 的极值.

144. 求函数 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ 的极值.

145. 计算 $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ 之值.

146. 求证 $\cos^4 22.5^\circ + \cos^4 67.5^\circ + \cos^4 112.5^\circ + \cos^4 157.5^\circ$
 $= \frac{3}{2}$

147. 不用数值计算或查表, 求证

$$\frac{1}{1 + \sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ} + \frac{1}{\sin 45^\circ}$$

148. 已知 α, β, γ 都是正锐角, 它们的正切依次是

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8} \quad \text{求证 } \alpha + \beta + \gamma = 45^\circ.$$

149. 已知 $\operatorname{tg} \alpha$ 及 $\operatorname{tg} \beta$ 为 $x^2 + px + q = 0$ 的二根, 求
 $\sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)$