全国高等师范院校

电化教育课教师进修班讲义

幻灯技术基础

黄宝文　杨改学　编

西北师范学院电化教育中心

一九八二年

目　录

第一章　幻灯机的光学基础

第一节　费马原理

反射定律与折射定律被包括在一个更普遍的费马原理之内。费马原理说：光线由一点进行至另外一点，所取的光程最短（或最长）。

第1　反射定律

图1—1—1中，MN为一个平面镜，物点P发出一光线遵从反射定律（即入射角等于反射角，入射线、法线、与反射线三者在同一纸面内。）在入射点A反射至Q，其进行路程PAQ可以等值P_1AQ代替，P_1是P的像。设由P点发出的另一条光线，入射于镜面上的A'点，且经平面镜反射后，反射线$A'Q$也可通过Q点，则此反射线必定不附合于反射定律。连P_1A和P_1A'，则得到$\triangle P_1A'Q$，于是可知：

$$P_1AQ < P_1A' + A'Q$$

即是　$PA + AQ < P_1A' + A'Q$

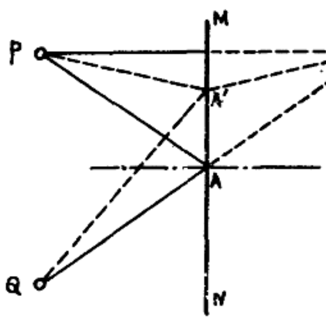

图　1—1—1

但光路PAQ遵从反射定律，故知遵循反射定律的光路为最短，亦即遵循反射定律的光程，光所行走的光程为最短。

第2　折射定律

设有一条光线由介质（Ⅰ）中的A点，射至介质（Ⅱ）中的B点上，如图1—1—2所示，在ⅠⅡ两个介质中的光速为V_1和V_2（折射率为μ_1和μ_2）。求光线由A进行B所需的时间t。在未知折射定律时，我们不能确定光程APB，也即是说，我们只知OE，而不知道OE被P所分成的两线段x和y的比值。

光从A进行到B所需要的时间t为：

$$t = \frac{AP}{V_1} + \frac{PB}{V_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{y^2 + b^2}}{V_2}$$

如果t为最小，则：

$$\delta t = \frac{x\,dx}{V_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{y\,dy}{V_2\sqrt{y^2 + b^2}} = 0$$

但是知道　$x + y = OE =$ 常数

所以我们有：$dx + dy = 0$，即　$dx = -dy$

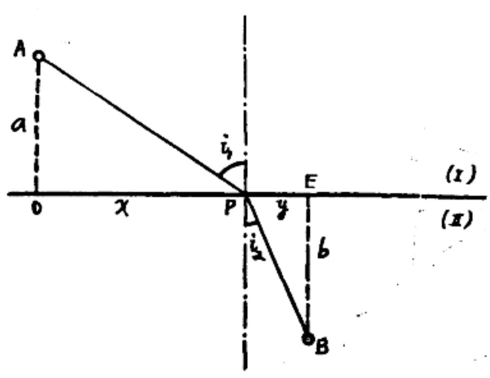

图　1—1—2

4．计算光线与轴（或称曲率半径）的夹角时，令轴（或曲率半径）经小于$\frac{\pi}{2}$的角转至光线方向，若旋转方向与反时针方向相同，则为正，反之，则为负。（轴与曲率半径间的夹角，以轴为准）

5．曲率中心被视为受光点。

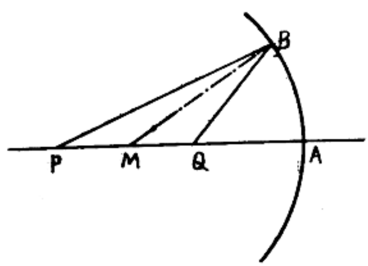

图 1－2－2

第2 球面镜成像公式

设Σ为一凹面镜，M是它的曲率中心，以r表示曲率半径，AM为主轴，在主轴上置一光点P，以u表示物距，P点既然为一光点，它所发出的光，当然应射向空间的任一方向，即从P发出的光线，应是射向四面八方的，这些许许多多的光线中，定有一光线PB射到凹面镜Σ上于B点，光线PB遵从反射定律而在B处反射，其反射线BQ交主轴AM于Q点，Q距A的距离以v表示。当然，Q点的意义以后会清楚。由平面几何学的简单定律容易知道，以下的关系式应当成立（因$\angle PBM=\angle QBM$）

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{MP}{MQ}$$

这个关系式所以能成立，是由于反射定律，因为，我们在此处用了反射角等于入射角的关系。

我们观察物体所发出的抵达凹面镜上的光线，若假定是近轴光线，（否则我们以后将会知道，非近轴光线是不能造成清晰的像的）为此，我们可以认为：

$$BP=AP \qquad BQ=AQ$$

将此代入上边的关系，则：

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{MP}{MQ}=\frac{AP-AM}{AM-AQ}$$

如果再考虑到光学符号，则：

$$AP=(-u) \qquad AQ=(+v) \qquad AM=(+r)$$

将这些关系代入到上边的关系式中，则：

$$\frac{(-u)}{(+v)}=\frac{(-u)-(+r)}{(+r)-(+v)}$$

$$-ur+uv=-uv-vr$$

$$ur-vr=2uv$$

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{2}{r} \qquad (1-2-1)$$

设BP与AM的夹角为w，从直观上来看，v与r、u、w有关，在r与u为一定的条件下，（即凹镜的曲率中心和光点所在的位置为一定的条件下）v好象与w有关（在大孔径的条件下也确如此）即是说，从P点发出的光线经凹面镜反射后的反射线与主轴的支点Q应该与入射光线的方向有关，即是说从P点发出的光线不同，虽然P的位置固定，Q点也应有所不同。

但是，在（1—2—1）中我们明白地看出，v与ω无关，即是说Q的位置与从P发出的光线的方向毫无关系，这样从P发出的凡是能射达到凹面镜上的光线，经镜面反射后，都能交在同一点的Q上。这样我们就称Q为P的象。又因为光线确实交在Q上，故又称Q为实像。"v"所表示的，如前所述，是顶点到像的距离，故称为像距。这样（1—2—1）所表示的就是物与像间的关系，当然，我们也不应忘记（1—2—1）式成立的基础与条件，应该是近轴光线，如非为近轴光线则（1—2—1）式也将不成立。

上面所讨论的是凹面镜的情况，下面我们来讨论凸面镜的情况，如图1—2—3，P为主轴上的一个光点（或物点），PB为光点所发出的一条光线，PB射抵凸面镜Σ于B上，在B点依反射定律而反射，反射光线设为BQ'，BQ'的延长线与主轴交在Q点。M为面镜Σ的曲率中心。u、v、r表示AP、AQ和AM的距离，如果考虑到光学符号则应有：

$AP=(-u)\quad AQ=(-v)$

$AM=(-r)$

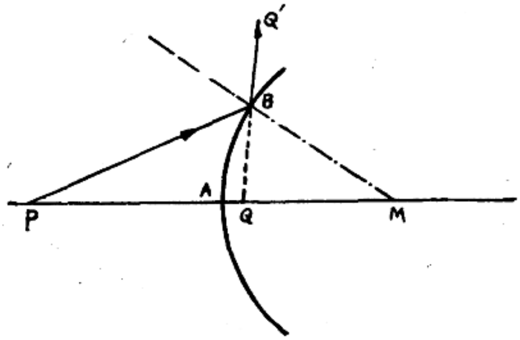

图 1—2—3

依平面几何学的简单关系知：

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{MP}{MQ}$$

由P发出射抵到凸面镜Σ上的光线，也为近轴光线，这样就有：

$$BP=AP\qquad BQ=AQ$$

为此：

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{MP}{MQ}=\frac{AM+AP}{AM-AQ}$$

将AP，AQ与AM的值代入进去，则：

$$\frac{(-u)}{(-v)}=\frac{(-r)+(-u)}{(-r)-(-v)}$$

$$(-ur)+uv=-rv-uv$$

$$ur-rv=2uv$$

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{2}{r}\qquad (1—2—1')$$

这就是凸面镜的成像公式。v即然表示像距，和凹面镜所讨论的一样，可知Q就是像点，与凹面镜情况下所不同的，此处Q并非光线的真正交点，而是光线延长线的交点，故称Q为虚像。

从（1—2—1）和（1—2—1'）看来，对于凹面镜和凸面镜的物镜关系，都是用同一关系式来表示。但在计算实际问题时，所代入的数值（u，v，r的数值）根据具体情况，还要考虑到光学符号。

现在我们来研究两个特殊的物点与像点。

第一，点光源置于镜前的无穷远处，即：$u=(-\infty)$，代入到（1—2—1）中

去，则：

$$\frac{1}{v}=\frac{2}{r}$$

此时的特殊像点为第二主焦点，也简称为第二焦点，以F'表示第二焦点。F'与A间的距离$AF'=f'$称第二主焦距，也简称为第二焦距，这样：

$$f'=\frac{r}{2} \qquad (1-2-2)$$

可以看出f'与r为同号，如对于凹面镜来讲$r=$“+”则$f'=$“+”，即F'和曲率中心皆在镜的前方（不要忘记F'是一个像点），对于凸面镜，$r=$“−”，则$f'=$“−”，即F'和M皆在镜的后方。

第二，如将物点置于镜前的某个位置，它所成的像如果在无穷远处，则称此物点所在的特殊位置为第一主焦点或简称之第一焦点，即：$v=\infty$，代入物像公式中，则：

$$-\frac{1}{u}=\frac{2}{r} \qquad u=-\frac{r}{2}$$

以f表示第一焦距，以F表示第一焦点，则得到：

$$f=-\frac{r}{2} \qquad (1-2-2')$$

对于面镜来讲（凸面镜或者凹面镜）F的实际位置应当和F'在一起，当然不应忘记F是特殊物点，而F'是一特殊像点。

将（1—2—2）代到（1—2—1）中去，则得到物像的普遍关系式

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f'} \qquad (1-2-3)$$

第3　实像与虚像

实物的像若成于镜面的前方，说明诸反射光线，反射后确实交于像点，这个像就是实像。此时的像距$AQ=$“+”。实物的像若成于镜面的后方，说明诸反射光线并非实在地交在像点，而像点只不过是诸反射光线延长线的交点。为此，这个像就是一个虚像。此时像距$AQ=$“−”，这样我们就得到判断像的虚实的简单关系：

$$\text{实物}\ (u=\text{“}-\text{”})\longrightarrow\begin{cases} v=\text{“}+\text{”}\ \text{为实像}\\ v=\text{“}-\text{”}\ \text{为虚像}\end{cases}$$

像，究竟是“虚”还是“实”，当然可以凭借仪器来检验，但也可以用一些简单的方法，如用一张白纸和一块毛玻璃，将一张白纸放在像点处，如确实看到白纸上有一光点出现，那么，这个像就是一个实像；否则为一虚像。

实像位置的判断固然可以用一张白纸，但虚像既然在白纸上又不能实在地结一光点，那么虚像的位置又将如何判定呢？这里介绍一个判断虚像的方法（当然也可以用来判断实像），即所谓视差法，图1—2—4中的P_1和P_2为两个物体，E_0为人的眼睛（比如闭起左目只用右目看），当P_1、P_2和E_0在同一直线上，则从E_0看来就无法判定谁前谁后，因为P_1和P_2在同一直线上。要解决P_1和P_2的前后问题，观察者必须作左右的移动才可以，如果E_0移到E_1的位置，则观察者在此处一定会感到，P_1在左，

P_2在右，即：

$$E_1 \longrightarrow \begin{cases} P_1\text{在左} \\ P_2\text{在右} \end{cases}$$

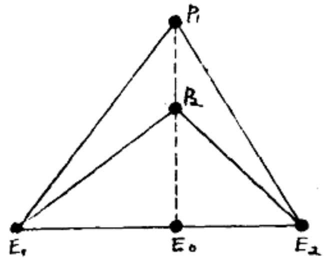

图 1—2—4

如果观察者E_0移到E_2处，则在此处一定会感到，P_1在右，P_2在左，即：

$$E_2 \longrightarrow \begin{cases} E_1\text{在右} \\ P_2\text{在左} \end{cases}$$

假如观察者移动的方向是自左向右，这样我们就得到以下的关系：E_0自左向右移动

$$（\text{从}E_1\text{到}E_2）\longrightarrow \begin{cases} P_1\text{在自左向右移动} \\ P_2\text{在自右向左移动} \end{cases}$$

从图1—2—4看出，P_1是远方物体，P_2是近处物体，如此我们就得到结论：当观察者移动时，在观察者看来远方和近处物体都在移动，不过移动方向正相反，远方物体移动的方向与观察者移动的方向相同，近处物体移动的方向与观察者移动的方向相反；反之，与观察者移动方向相同的物体必在远处，与观察者移动方向相反的物体必在近处。这就是视差法。

用视差法就可以判定虚像的位置。用视差法测定虚像的位置是用一长针插在球面镜Σ之后，使此长针（用A表示）与虚像(用B表示)和观察者的眼睛E_0在同一直线上。观察者的眼睛移动，将发现A在B之后或在B之前，再更动A的位置，一直到观察者看不到A与B间的相对位置时为止，此时A与B即在同一位置，量得A的位置，也就量得了B的位置。

这种视差现像在日常生活中也不少见，设若我们坐在急驶的列车中，凭窗远眺，将看到远处的山峰，好像在与我们赛跑，跟踪我们向前驶，它们也在向前奔，可是近处的禾苗，树木和电线杆，则避开我们匆匆地向后跑。

第4　球面镜的放大率

如图1—2—5a，作凸面镜上任一点A'的副轴MA'并延长之，再以曲率中心M为圆心，分别以MP和MQ为半径(P为点物，Q为点像)作圆弧，各交副轴于P'和Q'，因孔径甚小，故$\widehat{PP'}$和$\widehat{QQ'}$皆可视为与主轴MA垂直的线段，这样Q'即为P'的像，而QQ'

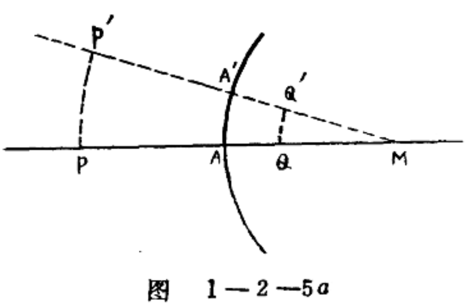

图 1—2—5a

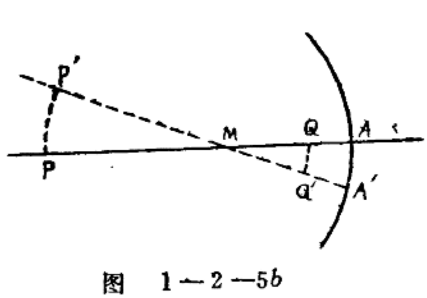

图 1—2—5b

即为PP'的像，如用u和v分别表示物距和像距，r表示曲率半径，则（1—2—1）式，不只对物点就是对物体而言，也是成立的。对图1—2—5b的凹面镜情况进行同样的讨论，结果也是一样的。

我们定义：

$$m（放大率）=\frac{y'（像之高）}{y（物之高）}$$

严格讲，此处的m仅为横向放大率。我们来计算一下凸面镜情况下的放大率，如图1—2—5a：

$$\frac{(+y')}{(+y)}=\frac{MQ}{MP}$$

$MQ=(-r)-(-v)$　　　　$MP=(-r)+(-u)$

代入上式，则：　$\dfrac{MQ}{MP}=\dfrac{-r+v}{-u-r}$

$$r=\frac{2uv}{u-v}\qquad\left(\because\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{2}{r}\right)$$

代入上式：

$$\frac{MQ}{MP}=\frac{-\frac{2uv}{u-v}+v}{-\frac{2uv}{u-v}-u}=\frac{-2uv-v^2+uv}{-2uv+uv-u^2}$$

$$=\frac{v(-u-v)}{u(-u-v)}=\frac{v}{u}$$

故，得到：　$m=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{v}{u}$　　（1-2-4）

我们再来讨论凹面镜情况下的放大率，由图1-2—5b知：

$$\frac{(-y')}{(+y)}=\frac{MQ}{MP}$$

$MQ=(+r)-(+v)$　　　　$MP=(-u)-(+r)$

则：　$\dfrac{MQ}{MP}=\dfrac{r-v}{-u-v}$　　　$r=\dfrac{2uv}{u-v}$

$$\left(也是从\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{2}{r}来\right)$$

代入之，则：

$$\frac{MQ}{MP}=\frac{r-v}{-u-r}=\frac{\frac{2uv}{u-v}-v}{-u-\frac{2uv}{u-v}}$$

$$=\frac{2uv-uv+v^2}{-u^2+uv-2uv}=-\frac{v}{u}$$

故也有如下的关系：

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{v}{u}\qquad（1—2—4'）$$

故无论对凹面镜还是凸面镜，都应毫无例外的满足（1—2—4）的关系。

第5　球镜成像作图法

若球镜的M和F'为已知，物体PP'的像可用图求之，图1—2—6a示出凹面镜的作图法，共分两步骤进行：

1、与轴平行的入射光线$P'B$反射后必过第二焦点。

2、过M点的入射光线$P'M$，反射后仍沿原方向射回。

如果是BF'和MP'二光线所决定的交点，即为P'的像Q'，作$Q'Q$垂直于轴，$Q'Q$就是物体$P'P$的像，从P'发出的光束，反射后必定会聚在Q'点，顶点A又名之光心，入射线透过光心时，如图中的PA称之为中央光线。

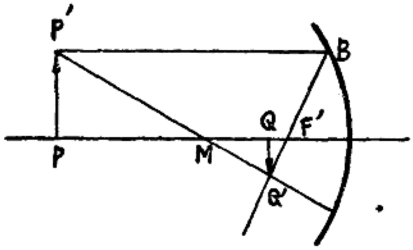

图1—2—6a

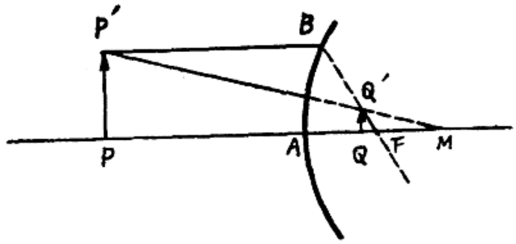

图1—2—6b

对于凸面镜可用相同的方法进行作图，凸面镜所造的像永为正立的虚像；凹镜成像时，则有时为正立的虚像，有时又为倒立的实像，这要视物所在的位置而定，见图1－2－6b

第5　我国古代学者墨翟对球面镜成像的贡献

第一，对凹面镜的贡献。墨经，经下第24条，有这样的叙述：“……景，一小而易，一大而正；说在中之外，内。”

如图1—2—7a，物体如在曲率中心之外侧，通过作图法我们看到，它的像应该是一个倒立的，但比原物体为小的像（是实像），墨经的“中”表示曲率中心到焦点的一段距离，在“中之外”即是曲率中心到焦点的一段距离的外侧，也即是在曲率中心的外侧，这样所得到的像，是一个比原物为小的倒像，“易”当倒字讲，故墨经中说：“……一小而易，……说在中之外……”

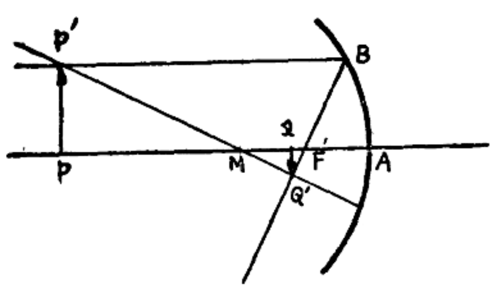

图1—2—7a

再如图1—2—7b，物体如在焦点的内侧，通过作图法，我们看到它的像应该是一个比原物体为大的虚像。墨经中的“中之内”即是曲率中心到焦点的一段距离的内侧，

也即是”焦点的内侧，这样得到的像为一个比原物为大的正像。故得“…… 一大而正，说在中之内……。”

两句话合在一起，即是：“……景，一小而易，一大而正，说在中之外，内。”

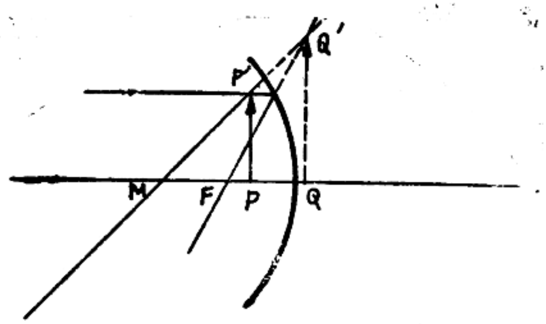

图 1—2—7b

第二，对凸面镜的贡献。如图1—2—8a和图1—2—8b所示，从凸面镜的作图，我们可以看出凸面镜的成像关系，有如下结果：凸面镜所得的像只有一个。物体距镜近所得到的，为一大像，物体距镜远时，所得到的为一小像，但，事实上就是墨经文下第25条译文，它的原文是经下：“鉴团，景一。”

经说下：“鉴者进，……景亦大，其远，……景亦小，而必正”。

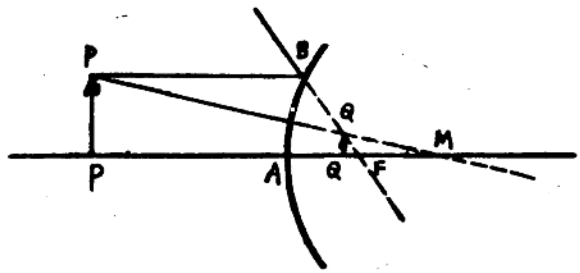

图 1—2—8a

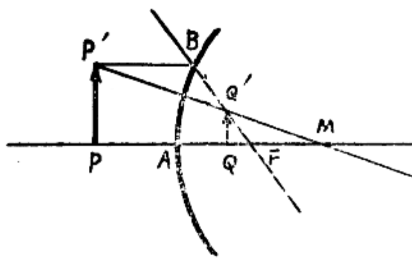

图 1—2—8b

第三节 光在球面上的折射

在上节的讨论之初，我们曾制定了光学符号，这些光学符号除第二条外对本节和以后各节均为适用，第二条也只要作少许的更动便可，只需把第二条中的“反射光线”改为“折射光线”即可。

第1 球面折射公式

球面在孔径甚小的条件下可以成像，其物距、像距、曲率半径的关系合于球面折射的公式，此公式由图1—3—1推得之。AA'为一球面，其前方介质的折射率为μ，后

方介质的折射率为μ'，A为球面的顶点，M为球心，AM为球面之主轴，其定义同于球镜之主轴，简称为轴。更设$\mu'>\mu$. 于是入射光线PA'在A'折射后，将靠近法线$A'M$而折射，其折射线设为$A'Q$。

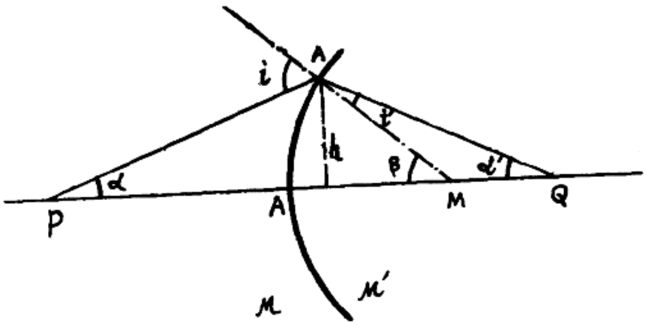

图 1—3—1

对于A'点，依连续条件知：$\mu\sin i=\mu'\sin i'$。

在孔径甚小时，则：$\sin i'=i$，$\sin i'=i'$这样，我们得到：$\mu i=\mu' i'$　（1）

在$\triangle PA'M$中，我们再注意到光学符号,则有：$(+i)=(+\alpha)+(-\beta)$　（2）

在$\triangle QA'M$中，我们如果也注意到光学符号，则有：$(+i')=(-\beta)-(-\alpha')$（3）

将（2）和（3）代入（1）则有：

$$\mu(\alpha-\beta)=\mu'(\alpha'-\beta)\qquad(4)$$

又因为孔径甚小，故有：

$$(+h)=(+\alpha)(-u)\qquad(5)$$

$$(+h)=(-\beta)(+r)\qquad(6)$$

$$(+h)=(-\alpha')(+v)\qquad(7)$$

将（5）（6）（7）代入到（4），则：

$$\mu\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{r}\right)=\mu'\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{r}\right)$$

即：$$\frac{\mu'}{v}-\frac{\mu}{u}=\frac{\mu'-\mu}{r}\qquad(1-3-1)$$

（1—3—1）即为球面折射公式。

下面，我们再来研究球面折射情况下的焦点与焦距。第二主焦点F'是一个像点，它是由轴上无穷远处物点所造的像，在（1—3—1）式中，我们如果设其$u=(-\infty)$，则v即表示第二主焦点（简称第二焦点），与顶点间的距离，即第二主焦距（也简称之第二焦距），这样，我们得到：

$$\frac{\mu'}{f'}=\frac{\mu'-\mu}{r}\qquad(f'=AF')$$

也就是：$$f'=\frac{\mu' r}{\mu'-\mu}\qquad(1-3-2)$$

第一主焦点F是一个物点，它的像成在无穷远处，即$v=\infty$，这样，我们得到第一焦距为：

$$f=-\frac{\mu r}{\mu'-\mu} \qquad (1-3-2')$$

将（1—3—2）和（1—3—2′）代入到（1—3—1）中，这样我们也可得到用f和f'所表示的物像公式，为此目的，我们将（1—3—1）变型为：

$$\frac{\mu' r}{\mu'-\mu}\ \frac{1}{v}-\frac{\mu r}{\mu'-\mu}\ \frac{1}{u}=1$$

也即是：

$$\frac{f'}{v}+\frac{f}{u}=1 \qquad (1-3-3)$$

在（1—3—1）中：$\frac{\mu'}{v}=\frac{\mu}{u}+\frac{\mu'-\mu}{r}$，其中的$\frac{\mu'-\mu}{r}$叫做折射本领，其单位为屈光度，当$r$以米为单位，且其数值与（$\mu -' \mu$）相等时，此时球面的折射本领为1屈光度。

第2　牛顿型球面折射公式

球面折射公式可以用（1—3—1）或（1—3—3）来表示，此时它们的轴方向上的距离，都是从顶点A量起的，如果，轴方向的距离是从焦点量取的，则可得到牛顿型的球面折射公式。由图示1—3—2得到：

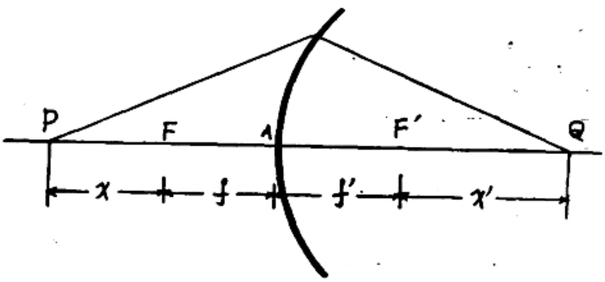

图 1—3—2

$$FP=AP-AF \qquad F'Q=AQ-AF'$$

也就是：

$$-x=-u+f \qquad (1-3-4')$$

$$x'=v-f' \qquad (1-3-4'')$$

将此二式代入到（1—3—3）中去，整理简化之得到：

$$x\,x'=f\,f' \qquad (1-3-4)$$

第3　亥姆霍兹——拉格朗日定理

在图（1—3—3）中，有一通过折射球面曲率中心M的直线$P'Q'$，它乃是一个副轴，以M为中心分别以MP、MQ为半径作二弧分别交副轴于P_1和Q_1，如Q为P的像，则Q_1定义为P_1的像，弧QQ_1遂为PP_1的像。如果P_1距轴非常近，则$P'Q'$与轴的夹角必甚小，故弧PP_1及QQ_1，可以认为是垂直于轴的线段，$PP'=(y)$，$QQ'=(y')$，于是与轴垂直之小物PP'，因球面折射所成之像QQ'，仍可与轴垂直。若有自P发出

与轴夹角为α之光线PB射至球面，其折射线必在BQ方向，如倾角α甚小，则PB称为近轴光线，再令BQ之夹角为α'，AB之长为S，在采用近轴光线时，AB可认为与

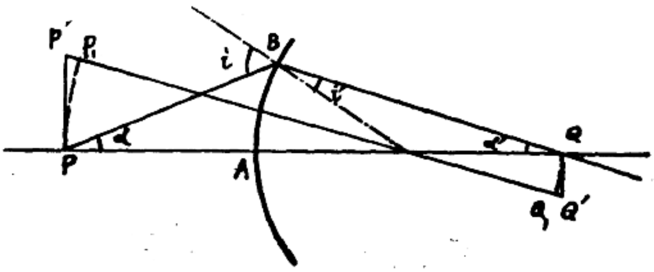

图 1-3-3

在A点的切线重合，由图（1—3—3）在$\triangle PBM$中，有：

$$\frac{\sin[\pi-(+i)]}{PM}=\frac{\sin(+\alpha)}{BM} \quad (8)$$

在$\triangle QBM$中，又有：

$$\frac{\sin(+i')}{QM}=\frac{\sin(-\alpha')}{BM} \quad (9)$$

从（8）（9）二式，我们得到：

$$\frac{\frac{\sin i}{PM}}{\frac{\sin i'}{QM}}=-\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \quad (10)$$

即是：

$$\frac{\sin i}{\sin i'}\cdot\frac{QM}{BM}=-\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \quad (11)$$

从连续条件又有：$\mu\sin i=\mu'\sin i'$

即：

$$\frac{\sin i}{\sin i'}=\frac{\mu'}{\mu} \quad (12)$$

又因$\triangle P'MP$和$\triangle Q'MQ$为相似的，故有：

$$\frac{QM}{PM}=\frac{(-y')}{(+y)} \quad (13)$$

再因为孔径甚小，故：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\frac{\alpha}{\alpha'} \quad (14)$$

将（12）（13）（14）代入到（11）中去，则：

$$\frac{\mu'}{\mu}\left(-\frac{y'}{y}\right)=\left(\frac{-\alpha}{\alpha'}\right)$$

即是：

$$\mu\alpha y=\mu'\alpha' y' \quad (1-3-5)$$

（1—3—5）式即为亥姆霍兹——拉格朗日定理，它是光学中重要的不变式之一。

第 4　放大率

放大率共有三，即横向放大率、轴向放大率和角放大率。

第一，横向放大率m。象与物二者高度之比，称为横向放大率，横向放大率常以m表示，则：

$$m=\frac{y'}{y} \qquad (15)$$

从（1—3—5）知：

$$\frac{y'}{y}=\frac{\mu\alpha}{\mu'\alpha'} \qquad (16)$$

再由图1—3—3知：

$$(+S)=(-u)(+\alpha) \qquad (17)$$

$$(+S)=(+v)(-\alpha') \qquad (18)$$

从（15）（16）（17）和（18）得到：

$$m=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{v}{u} \qquad (1—3—6)$$

横向放大率公式（1—3—6）亦可用牛顿型公式来表示。为此目的，我们还要用到本节的（1—3—2）和（1—3—2′），以及（1—3—4′）和（1－3－4″）从（1—3—2）和（1—3—2′）我们得到：

$$\frac{\mu}{\mu'}=\frac{f}{f'} \qquad (1—3—7)$$

从（1—3—4′）和（1—3—4″）我们得到：

$$v=x'+f' \qquad u=x+f \qquad (19)$$

将（19）和（1—3—7）式代入到（1—3—6）中去，则得到：

$$m=-\frac{f}{f'}\cdot\frac{x'+f'}{x+f}=-\frac{fx'+ff'}{f'(x+f)}$$

$$=-\frac{fx'+xx'}{f'(x+f)}=-\frac{x'}{f'}=-\frac{f}{x}$$

故：$$m=-\frac{x'}{f'}=-\frac{f}{x} \qquad (1—3—6')$$

第二，角放大率。折射线与入射线二者倾角的正切之比，称为角放大率或会聚比，常以k表示，即：$k=\dfrac{\tan\alpha'}{\tan\alpha}$

因为所研究的是近轴光线，故：

$$k=\frac{\alpha'}{\alpha} \qquad (20)$$

从（1—3—5）式知道：

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\mu y}{\mu' y'}$$

故：$$k=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{1}{m}$$

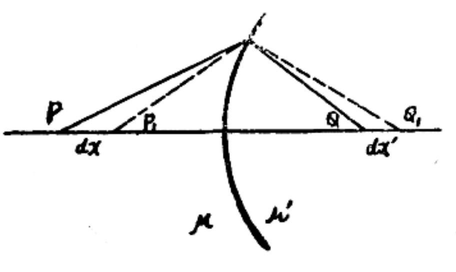

图1-3-4

第三，轴向放大率。若物点P沿轴移一小距离dx而至P_1，相应地Q也移一距离dx'至Q_1，图（1—3—4），如此dx'与dx之比称为轴向放大率，常以t表示。

$$t=\frac{dx'}{dx}$$

下面求t的表达式。

先对牛顿公式（1—3—4）微分之，则得到：

$$x\,dx'+x'dx=0$$

于是，得：

$$t=\frac{dx'}{dx}=-\frac{x'}{x} \qquad (21)$$

将等号右边乘以$\frac{x'}{x'}$，再应用（1—3—4），则：

$$t=-\frac{x'^2}{x\,x'}=-\frac{x'^2}{ff'} \qquad (22)$$

（22）右边再乘以$\frac{f'}{f'}$，则：

$$t=-\frac{f'}{f}\frac{x'^2}{f'^2} \qquad (23)$$

将（1—3—7），（1—3—6′）代入（23），则得：

$$t=\frac{\mu'}{\mu}m^2 \qquad (1—3—8)$$

第四节* 棱　　镜

光学棱镜为一透明棱柱体，由若干个互不平行的平面构成其境界，因而射入棱镜之光线，在射出棱镜后，一般不能与原入射之方向平行。棱镜在光学仪器之应用仅次于透镜，其形状为三棱柱体者，称为三棱镜，应用最为广泛。就一个三棱镜而言，境界面共为五面，除光线出入之两面外，其它面之性质对光学棱镜之作用，可无须考虑。此出入二平面所交成之二面角A称为棱镜角，简称棱角或顶角，其大小对于棱镜之作用的影响颇巨。此二平面的作用不过为两个折射境界面，其交线常称为折射棱，正交于折射棱之截面，称为三棱镜的主截面，与二折射面交于二直线，此二直线的交点，即为主截面与折射棱之交点。如图1—4—1，一条光线射在棱镜的AB面上，入射角为i_1，设折射率为μ，顶角为A，棱镜周围介质为空气，求偏角 δ。

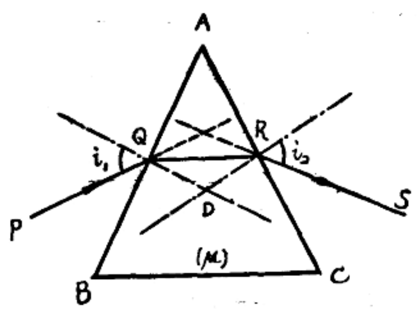

图 1-4-1

设光线PQ射到三棱镜的AB面，折射后向QR方向进行，再经AC面折射后向RS方向进行，在这两次折射时的入射角和折射角各为i_1，i'_1，i'_2和i'_2。

从图1—4—1可得出偏角 δ

$\delta = (i_1 - i'_1) + (i_2 - i'_2)$

再设Q、R两点界面上的法线，相交于D，则$AQDR$四点共圆

（$\because\ \angle AQD = \angle ARD = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \angle A + \angle D = \pi$）。

但：$i'_1 + i'_2 + \angle D = \pi$

所以，我们得到：$\angle A = i'_1 + i'_2$

将$\angle A$的值代入到 δ的表达式中去，则：

$$\delta = i_1 + i_2 - A \qquad (1)$$

i_1是第一次入射角，是可以在 0°到90°之间作任意变化的，但i_2要随i_1和μ而变化。（因为i_1和μ一定之后可求出i'_1，由i'_1和A可求出i'_2，由i'_2和μ，最后可求出i_2）i_2随i_1的变化，可由以下两关系式求得，即：

$$1 \cdot \sin i_1 = \mu \sin i'_1 \qquad \mu \sin i'_2 = 1 \cdot \sin i_2$$

现在，我们就$\mu = 1.52$的玻璃三棱镜（设$A = 60°$），用几个i_1之值算出i_2，并利用（1）求出 δ的结果如下：

i_1	29°20′	35°	40°	60°	80°	90°
i_2	90°	69°	60°30′	40°40′	30°25′	29°20′
δ	59°20′	44°	40°30′	40°40′	50°25′	59°20′

将以上算出的i_1和 δ之值，绘出如图1—4—2的曲线，从曲线上明显地看出，在i_1变化时，δ是由大而小，由小而大，即 δ在变化过程中，存在着一个最小值。

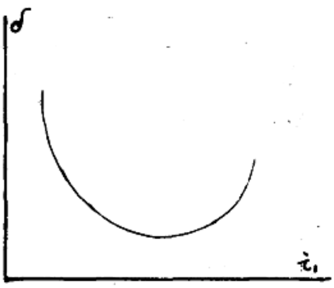

图 1—4—2

这最小的δ值称其为最小偏角，以δ_0表示，下面求 δ_0与i_1和i_2间的关系，前面已得出：

$$\delta = i_1 + i_2 - A$$

对（1）式微分之则得：

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1}$$

当δ为极小时，则$\dfrac{d\delta}{di_1} = 0$，

即 $$1 + \frac{di_2}{di_1} = 0$$

或者是：
$$\frac{di_2}{di_1} = -1 \qquad (2)$$

又因为$A = i'_1 + i'_2$，将此式对i_1进行微分，

则：
$$\frac{di'_1}{di_1} + \frac{di'_2}{di_1} = 0$$

或写成：
$$\frac{di'_1}{di_1} + \frac{di'_2}{di_2} \cdot \frac{di_2}{di_1} = 0$$