

硕士学位论文摘要汇编

理 科 版

1987

山东大学研究生处

目 录

基础数学

一类凹算子及变号核算子的不动点及其应用	刘希玉 (1)
非线性 <i>Hammerstein</i> 型积分方程的解	刘兆理 (2)
条件极值点处的不动点指数及其应用	郎国放 (4)
<i>Lienard</i> 方程零解 全局渐近稳定的充要条件	李惠卿 (6)
一类线性泛函微分方程解的渐近积分形式	艾尚兵 (7)
斜群环及其上的模	张兆基 (9)

计算数学

隐式三点守恒差分格式的收敛性及熵条件	唐延冬 (11)
高阶差分格式的有界性; l_2 稳定性、 <i>TVD</i> 性及熵条件	赵卫东 (13)
渗流方程和双曲型方程的有限元法及其误差分析	苕淑双 (17)
<i>Sobolev</i> 方程及伪双曲型方程的变网格有限元法及误差分析	苕洪兴 (20)
抛物问题的变网格混合有限元法及两相可溶驱替问题的二阶特征有限元法	杨道奇 (26)

运筹学与控制论

热传导方程中参数辨识的某些问题	林 峰 (32)
控制能量受限下离散线性系统能控域的结构	刘雅增 (34)
一类非线性控制系统的二次最佳控制问题	刘 晓 (36)
整流	范红兵 (37)
图的邻域复形的同调群	彭 允 (39)
边色数的性质及其在复形上的推广	赵 诚 (41)
复形上的链群与拟阵	王 涛 (42)
关于图的 d -Defect 对集	陈赐平 (43)
关于带风向投递员问题	杜林古 (44)
关于图的最大圈装箱和最小圈复盖	刘建农 (45)
关于 <i>Mountain Pass</i> 引理	戚桂杰 (48)

理论物理

高能 e^+e^- 湮灭过程的多重数分布及前后关联	梁作堂 (51)
作为 <i>Dirac</i> 场的单极子的运动方程	吕文彩 (53)

无序体系电子态定域与扩展转变的实空间重整化群理论·····	井孝墩 (57)
孤子振动模的定域性和孤子跃迁·····	解士杰 (59)

高能物理

甘巴拉山铁乳胶室中的非伴随事例分析·····	王广君 (64)
甘巴拉山铅乳胶室 $\sum E_r > 100 \text{ TeV}$ 族事例分析·····	蔺超 (66)
费米所 E705 实验中的带电粒子测量·····	张学尧 (67)

固体物理

LNT晶体的布里渊散射研究·····	史金荣 (70)
$(\text{Pb}, \text{Nd})(\text{Ti}, \text{Mn}, \text{In})\text{O}_3$ 压电陶瓷的研究·····	牛绪先 (71)
Cd_xSBN 晶体的介电、铁电及热释电性·····	张磊 (74)
ATGSP晶体的喇曼光谱研究·····	葛云涛 (76)
用EHT方法对 $\alpha\text{-Si}$ 电子结构几个问题的探索·····	韩圣浩 (78)
$\text{GaAs-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ 半导体异质结构的能带模型及量子阱内激子态的研究·····	杨庆 (80)
实空间重整化群方法在无序系统电子结构研究中的应用·····	谭维超 (83)
非晶磁性合金超晶格 $\text{Fe}_{78}\text{Si}_2\text{B}_{18}/\text{Si}$ 的研究·····	李卫东 (86)

无线电物理和无线电电子学

通信网络终端布局的优化设计·····	陈辉 (88)
高分辨率、高准确度 V/F 转换系统的研究·····	陈涤 (92)
用终端开路同轴线测量双层介电材料特性的研究·····	李康 (95)

无机化学

伯胺 N_{1923} 和三苯基氧磷协同萃取金 (Ⅱ) 的研究·····	王伯勇 (98)
I. 稀土元素异硫氰酸盐低水合物的制备、性质及标准生成焓的测定·····	张建华 (99)
稀土元素异硫氰酸盐与 N, N -二甲基乙酰胺配合物的合成、性质、标准生成焓以及热分析的研究·····	马华宪 (102)

分析化学

环糊精作为毛细管气相色谱和高效液相色谱固定相的研究·····	于东海 (105)
键合反相薄层板的制备及其应用·····	刘启勇 (106)
含氯聚氧硅烷作为气相色谱固定相的研究·····	赵忠熙 (107)
分光光度法工作曲线不符合线性关系的探讨	
I. 关于在等色点波长测量·····	韩本政 (109)
混合稀土中单一稀土的测定 I ·····	李中 (111)

物理化学

- 聚丙烯酰胺在钙墩土上的吸附和SSMA对HPAM—墩土悬浮体稀释机理的研究.....路福媛 (113)
- 酸性溶液中卤素离子对铁钝化膜性质的影响.....陈晓 (115)
- 聚乙烯基吡唑膜电极的研究.....魏忠诚 (117)
- $F + HF \rightarrow FH + F$ 共线量子散射计算.....魏太广 (118)
- 自洽场从头计算中基函数非线性参数的优化及优化非线性参数与原子电负性之间的关系.....李庆明 (121)
- 4,4'-双(三嗪胺基)二苯乙烯型化合物的半经验分子轨道理论研究.....刘奉岭 (122)
- 碱液中 $r\text{-MnO}_2$ 电极的质子扩散模型与填充机理.....张虹 (124)
- 不同还原度下 $r\text{-MnO}_2$ 半导体性质研究.....李红 (127)
- Li^+ 在 r -钒青铜中的扩散行为及 $\text{Li-Li}_{1+x}\text{V}_3\text{O}_8$ 电池的电化学性能研究.....陈希慧 (129)

高分子化学

- 有机硅新单体及聚合物研究.....阎成友 (132)
- 聚氨酯共聚有机硅高聚物的研究.....张茂根 (133)
- 聚硅氮烷及氮化硅纤维.....阎永飞 (133)
- 含氢聚硅烷的研究.....邱化玉 (134)
- 苄乙炔基硅烷、多苄基苄基硅烷及高聚物的合成和性质.....张晓菁 (136)
- 新型聚硅烷的研究.....韩同珍 (138)
- 新型有机硅氧烷乳液聚合的研究.....王国防 (141)

植物学

- 结球大白菜生殖顶端发育的研究——形态建成、细胞组织化学及细胞学探讨.....孟振农 (143)
- 大白菜 (*Brassica campstris ssp pekinensis*) 的胚胎学.....马丰山 (144)
- 冬小麦节与节间发生的细胞学及酶细胞化学研究.....韩晓弟 (146)
- 石防风 (*Peucedanum terebinthaceum*) 胚状体发生研究.....夏光敏 (147)
- 普通小麦 (*Triticum aestivum* L.) 雄性不育系的超微结构及酶细胞化学的研究.....于善清 (149)
- 普通小麦 (*Triticum aestivum* L.) 不同雄性不育类型的同工酶研究.....曲志才 (151)
- 小麦种子全蛋白的电泳分析.....李双宜 (153)

生态学

- 布氏田鼠种群生态的研究.....武晓东 (155)

发育生物学

- 中华大蟾蜍孵化腺细胞的发生及其孵化酶的提纯.....封树芒 (159)
- 小鼠受精的实验性研究——细胞骨架与精核的运动.....潘忠宗 (161)
- 尼罗罗非鱼 (*Tilapia nilotica*) 原生 殖细胞的发生.....杨一凡 (163)
- 诱导中华大蟾蜍卵母细胞成熟过程中生发泡物质的时空分化及在早期发育中的形态效应.....刘晓明 (164)
- 墨吉对虾 (*Penaeus merguensis de Man*) 卵子发生的细胞学和细胞化学研究.....黄 初 (165)
- 黄海太平洋鲱鱼 (*Clupea pallasii Cuv. & Val*) 早期胚胎发育形态、细胞化学及生物化学变化的研究.....邹世平 (167)

微生物学

- 金针菇多糖的提取及性质研究.....曹培让 (169)
- 几种单糖衍生物以及水解酶对细胞质膜融合影响的研究.....李文保 (170)
- 一株好氧性分解纤维素细菌的筛选及其纤维素酶系的初步研究.....法 明 (171)

计算机软件

- 最小限制 k -树图 问题.....王 云 (173)
- ω -封闭性定理王鲁生 (175)
- 关于 ω 图灵机的分段线性界限 ω 计算.....陈鲁生 (177)

军用化学

- $HgCdTe$ 禁带共振光学非线性及其光学双稳态.....张建国 (180)
- 新型有机晶体 LAP 倍频和频性能.....任红文 (182)

一类凹算子及变号核算子的不动点 及其应用

理学硕士 刘希玉 指导教师 郭大钧教授

本文讨论一类凹算子在不作紧性假设下不动点的存在性。以及一类变号核算子方程可解性。并应用于 Hammerstein 方程。我们知道,如果算子是 u_0 -凹且增^[2],当 A 有不动点时, A 是锥压,本文首先讨论了当 A 锥压且凹时 A 不动点存在性。设 E 为 Banach 空间, P 为正锥。

定义2.4 设算子 $A: P \rightarrow P$, $D \subset P$, 称 A 在 D 中拟一致轨道凹。如果

$$(i) \quad A(sx) \leq sAx, \quad x \in P, \quad s \geq 1$$

$$(ii) \quad \forall x \in D, \quad s > 1 \quad \exists \eta(s, x) > 0 \quad \text{使} \quad u = A^n x, \quad n \geq 0 \text{ 时}$$

$$A(su) \leq s[1 - \eta(s, x)]Au$$

我们在 P 中定义 x, y 相关指 $\exists \lambda > 0, \mu > 0$ 使 $x \leq \lambda y, y \leq \mu x$ 它是一个等价关系, x, y 相关时定义 $\alpha(x, y) = \inf\{\lambda | x \leq \lambda y, \lambda > 0\}$

令 $d(x, y) = \log\{\max[\alpha(x, y), \alpha(y, x)]\}$ 我们有如下:

定理2.6 设 $A: P \rightarrow P$ 增, P 正规, A 在 $D \subset P$ 中拟一致轨道凹, $D \subset P \setminus \{0\}$ 中某一等价类。且在距离 d 下闭, 则 A 在 D 中有唯一不动点。

定理2.6可导出若干推论, 推广了前人的部分结果。并还可讨论固有元的性质(定理2.12)。利用上述定理可讨论无界区域上特别是全空间中非线性 Hammerstein 方程

$$\varphi(x) = A\varphi(x) = \int_G k(x, y)f(y, \varphi(y))dy \quad (1)$$

我们对 f 作凹性假设如下:

$$(A_2) \quad f(y, tu) \geq tf(y, u), \quad u \geq 0, \quad t \in [0, 1], \quad y \in G \text{ 且有闭集 } F \subset G, \quad mF > 0,$$

$$f(y, tu) > tf(y, u), \quad t \in (0, 1) \quad u > 0, \quad y \in F$$

在假设 (A_2) 下我们有:

定理4.9 设 f 满足 Caratheodory 条件。 K 可测。设 A 映 $C(G)$ 入自身, 设 $x, y \in G$ 时 $k(x, y) \geq 0, f(y, u) \geq 0, u \geq 0, f(y, u)$ 关于 u 增, $u \geq 0$, 设 $\text{ess inf}_{y \in F} k(x, y) \geq \tau > 0, x \in \bar{G}$ 稠于 G 。设 (1) 有上、下解 v, u , 即 $Av \leq v, Au \geq u, u \leq v, \inf_G u(x) > 0$, 则 (1) 有非零

正解。

注: 在定理4.9中我们没有作紧性甚至连续性方面的假定, 只要求 A 映 $C(G)$ 入自身, 而在 $C(G)$ 中特别是 $C(R^n)$ 中紧性条件常难于验证。

当方程(1)中K变号时,我们作如下处理:

$$\text{令 } K_1(x, y) = \max\{k(x, y), 0\} \quad K_2(x, y) = \max\{-k(x, y), 0\}$$

考虑方程组:

$$\begin{cases} u(x) = \int_G k_1(x, y) f(y, u(y) + v(y)) dy \\ v(x) = - \int_G k_2(x, y) f(y, u(y) + v(y)) dy \end{cases} \quad (2)$$

如果(2)有解 (u, v) 则 $x = u + v$ 便是(1)的解。设 k_1 是以 $k_1(t, s)$ 为核的线性积分算子,用这种办法。我们得到:

定理4.1 设 $mG < \infty$ $p > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\iint_{G \times G} |k(t, s)|^{\max\{p, q\}} dt ds < \infty$

$|f(t, u)| \leq a(t) + b_1 |u|^{p/q}$ $a \in L_q(G)$ $b_1 = \text{const.}$ 设 $f(t, u)$ 关于 u 增, 存在 $h \in L_q(G)$ 使 $f(t, u) \geq h(t)$, $u \in R'$, 记 λ_1 为 $k_1: L_p(G) \rightarrow L_p(G)$ 的模最小的特征值。设

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} f(t, u) < |\lambda_1|$$

关于几乎所有 $t \in G$ 一致则方程(1)有解。

注, 如果 k_1 无特征值。特别 $k(t, s) \leq 0$ 则只要上式中 $|\lambda_1| < \infty$ 即

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} f(t, u) < C \text{ 关于 } t \text{ 一致 } C < \infty \text{ 此时 (1) 有解。}$$

本文是在导师郭大钧教授的热情关怀和指导下完成的。在写作过程中得到了孙经先博士的热心帮助。作者在此表示衷心感谢。

非线性Hammerstein型积分方程的解

理学硕士 刘兆理 指导教师 郭大钧教授

考虑 Hammerstein 型积分方程

$$x = kf(x) \quad (1)$$

其中 k 是定义在实 Hilbert 空间 H 内的全连续自伴算子, k 的全集特征值为:

$$\dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

$f(x)$ 是定义在 H 上的连续势算子。即 $f(x) = \text{grad}F(x)$, F 是定义在 H 上的实泛函。对于这种任意核的 Hammerstein 型积分方程解的存在性与唯一性, C.L.Dolph[1]与王声望等[2]曾作过一些研究, 得到了方程(1)的解的存在性与唯一性的一些充分条件。本文放宽了他们的条件, 得到了方程(1)的解的存在性的一个充分条件。假设:

(i) 存在数 μ_N, μ_{N+1} (N 为某整数), $\lambda_N < \mu_N < \mu_{N+1} < \lambda_{N+1}$, 使得对 $\forall x \in H$, 有

$$\mu_N \|x\|^2 - C_1 \leq \partial F(x) \leq \mu_{N+1} \|x\|^2 + C_2$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 为常数。

将全部特征值 $\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots$ 所对应的特征元所张成的子空间记为 H_1 , 将全部特征值 $\lambda_N, \lambda_{N+1}, \dots$ 所对应的特征元及所有满足 $kx = \theta$ 的元素 x 所张成的子空间记为 H_2 , 则 H_1 和 H_2 都是 k 的不变子空间, 且 $H_1 \oplus H_2$, 再假设:

(ii) 对 $\forall \xi \in H_2, \exists v = v_i \in H_2, v_i \neq \theta$, 使得当 $y \in H_1$, 且 $y = P_1 k f(y + \xi)$, $\xi \neq P_2 k f(y + \xi)$ 时, 有

$$(\xi - P_2 k f(y + \xi), v_i) > 0$$

这里 P_1 和 P_2 分别是 H_1 和 H_2 上的正交投影

本文证明了下面的定理。

定理: 在条件 (i) 和条件 (ii) 之下, 方程 (1) 在空间 H 中至少有一个解。

王声望等 [2] 作如下假设:

(iii) 对于 $\forall h \in H, h \neq \theta$, 有

$$(f(x+h) - f(x), h) < \lambda_{N+1} \|h\|^2$$

并证明了在条件 (i) 和条件 (ii) 之下, 方程 (1) 在空间 H 中至少有一个解。本文证明了当条件 (iii) 成立时, 条件 (ii) 一定成立, 并且举例说明条件 (ii) 比条件 (iii) 要广。

例: 令 $H = L^2[0, 2\pi]$, 其中内积定义为

$$(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) y(t) dt$$

令 $k(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} (\sin nt \sin s - \varepsilon \cos nt \cos ns)$ (其中 $\varepsilon = \frac{2}{9}$), 则 $k: L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$ 是全连续自伴算子, 其全集特征值为

$$\dots < -\frac{9}{\varepsilon} < -\frac{4}{\varepsilon} < -\frac{1}{\varepsilon} < 1 < 4 < 9 < \dots$$

令 $f(t, u) = \alpha u + \delta \sin u^2$ (其中 $0 < \alpha < \frac{1}{\pi}, \delta = \frac{1}{4\sqrt{2}}$)

则 $f(x) = \text{grad} F(x)$ 是连续势算子, 这里

$$F(x) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{x(t)} f(t, u) du$$

本文验证了算子 k 和 f 满足条件 (i) 和 (ii), 但不满足条件 (iii)。

条件极值点处的不动点指数 及其应用

理学硕士 郎国放 指导教师 郭大钧教授

设 H 是 Hilbert 空间, $f: H \rightarrow R'$ 是 C' 泛函, $f' = I - A$, P 为 H 中的锥, A 在 P 上全连续, $AP \subset P$. 本文主要讨论了当 f 在原点关于锥达到条件极大值时, 算子 A 的不动点指数, 并讨论了在积分方程的应用.

我们引入下列记号:

$f_{x_0}^{-1}(\Delta)$ 代表 $f^{-1}(\Delta)$ 中含 x_0 的连通分支

$$f_{p, x_0}^{-1}(\Delta) = f_{x_0}^{-1}(\Delta) \cap P, f_p^{-1}[\alpha, \beta] = f^{-1}[\alpha, \beta] \cap P$$

这里的 $\Delta \subset R'$

本文的主要结果如下

定理 1. 设存在 H 中的有界开集 $U, \theta \in U$, 以及 $\beta > \alpha$, 满足

$$(1) f_{p, \theta}^{-1}(\alpha, +\infty) \subset U$$

$$(2) f'(x) \neq \theta, \quad \forall x \in f_p^{-1}[\alpha, \beta] \cap U$$

$$(3) \forall x \in P \cap \partial \Omega, \text{ 都有 } f(tx) \geq f(x), 0 \leq t \leq 1$$

$$(4) \forall \alpha, \beta > \alpha \geq \alpha, \text{ 都有}$$

$$d(f_{p, \theta}^{-1}[\beta, +\infty), P \setminus f_{p, \theta}^{-1}(\alpha, +\infty)) > 0$$

那么 $i(A, P \cap \Omega, P) = 0$. 这里 $\Omega = f_p^{-1}(\beta, +\infty) \cap U$.

当 H 是有限维空间, 或者 P 是无穷维空间 H 中的局部紧锥时, 定理 1 中的条件 (3) 和 (4) 可换为条件:

$$(3') f_{p, \theta}^{-1}[\beta, +\infty) \subset \overline{B_p(\theta, r)} \subset f_{p, \theta}^{-1}(\alpha, +\infty)$$

这里的 $B_p(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| < r\} \cap P$

需要指出的是, 在整个无穷维空间上讨论 f 的梯度算子在 f 的局部极大点处的拓朴度是没有意义的. 这是因为, 当 H 为无穷维 Hilbert 空间, $f(x) = \frac{1}{2}(x, x) - \varphi(x)$, $\varphi'(x) = Ax$, A 在 H 上全连续时, f 不可能达到局部极大值.

但是, 可以举例说明, f 可以相对于锥达到条件极大值.

同样地, 可以讨论在 f 的条件极小点 (相对于锥) 处的不动点指数, 得到相应的结论, 此时指数为 1。

注: 当 P 为楔时, 本文的结论仍成立。

下面讨论对积分方程的应用。

设 $H = L_2(G)$, $G \subset R^n$, 有界可测, $\text{mes} G < +\infty$

定义: $\Phi(\varphi) = \frac{1}{2} \int_G \varphi^2(x) dx - \int_G dx \int_0^{h_\varphi(x)} f(u) du$

这里

$$f(u) = \begin{cases} u^\alpha & u \geq 0 \\ \phi(u) & u < 0 \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$K\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy$$

假定: (i) $\phi(u)$ 连续, $|\phi(u)| \leq b|u|^\alpha$, $\phi(0) = 0$

(ii) $K(x, y)$ 为非负可测对称核, 并且 $K(x, y) \geq g(x)$ 。

(iii) $M = \sup_{x, y \in G} K(x, y) < +\infty$, $m = \int_G g(x) dx$, $\frac{m}{M} < \text{mes} G$

我们取

$$P = \left\{ \varphi \left| \begin{array}{l} \varphi \in H, \varphi \geq 0, \text{ 并且存在某个 } G_0 \subset G \\ \varphi_0 \text{ 与 } \varphi \text{ 有关, } \text{mes} G_0 = 0, \text{ 使得} \\ \sup_{x \in G \setminus G_0} \varphi(x) < +\infty, \text{ 并且} \\ \int_G \varphi(x) dx \geq \frac{m}{M} \sup_{G \setminus G_0} \varphi(x) \end{array} \right. \right\}$$

可以证明 $\Phi' = I - A$, $A = K^* f K$; $L_2(G) \rightarrow L_2(G)$ 全连续, P 为 H 中的锥, $AP \subset P$, 并且 Φ 在 θ 点达到相对于 P 的条件极大值。

这里的 K^* 为 K 的共轭算子, $f\varphi(x) = f(\varphi(x))$

利用本文的结果可以得到如下的结论:

1. 如果 Φ 在 P 上、 θ 的附近没有临界点 ($\varphi \neq \theta$), 那么, 存在 β_0 , 使

$$i(A, P \cap \Omega, P) = 0$$

这里的 $\Omega = \Phi_\theta^{-1}(\beta_0, +\infty) \cap U$ 。

2. Φ 在 P 上具有非零的临界点。

Lienard 方程零解全局渐近稳定的充要条件

理学硕士 李惠卿 指导教师 尤秉礼 教授

Lienard 方程

$$\ddot{x} + \dot{x}f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

是振动问题中很重要的一个方程,也是常微分方程理论中的一个基本方程,曾引起了许多数学工作者和力学工作者的极大兴趣。作者在此主要讨论其零解的全局渐近稳定性,得出了下述主要结论

定理1. 假定 f, g 连续, 保证 (1) 的解存在唯一且满足

$$(i) \quad xg(x) > 0 \quad x \neq 0$$

$$(ii) \quad xF(x) > 0 \quad x \neq 0$$

则 (1) 的零解全局渐近稳定的充要条件为

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (|F(x)| + G(x)) = +\infty \quad (*)$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)ds.$

我们来分析一下条件 (*)

当 $x > 0$ 时, 有两种可能性

$$(A) \quad G(x) \text{ 有界, 此时必有 } \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |F(x)| = +\infty$$

$$(B) \quad G(x) \text{ 无界, 则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty \text{ 成立}$$

当 $x < 0$ 时, 也有两种可能性。

$$(A)' \quad G(x) \text{ 有界, 此时必有 } \overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} |F(x)| = +\infty.$$

$$(B)' \quad G(x) \text{ 无界, 则有 } \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = +\infty.$$

因此, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上条件 (*) 意味着以下四种情况

1° (A) 和 (A)' 成立

2° (A) 和 (B)' 成立

3° (B) 和 (A)' 成立

4° (B) 和 (B)' 成立。

以往人们都是针对情形 1°、4° 来讨论的，而 2°、3° 尚未有人考虑过。作者还给出了必要性条件，使得对 Lienard 方程零解全局渐近稳定的讨论比较完备、彻底。作者认为，所得结论在讨论 Lienard 方程极限环时，可能有所应用。

在工作过程中，作者纠正了 *красовский* 对方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by \end{cases}$$

(其中 a, b 为常数, $a \neq 0, f_1, f_2$ 连续, 保证解存在唯一。 $f_1(0) = 0, f_2(0) = 0$) 零解全局渐近稳定所加的充分必要条件。他的这一结果发表的比较早，长期以来，人们只是利用它，因此，凡是借用 *красовский* 这一结论的地方，都应做相应的改动，譬如谷超豪对方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x) + g(x)y \end{cases}$$

(其中 f_1, f_2, g 连续, $a \neq 0, f_1(0) = f_2(0) = 0$, 保证解存在唯一) 零解全局渐近稳定所加的充要条件。

一类线性泛函微分方程解的渐近 积分形式

理学硕士 艾尚兵 指导教师 尤秉礼教授

本文研究了一类特殊的线性泛函微分方程，给出了其所有解的渐近积分形式。利用本文结果，证明了 J.R.Haddock 在 [1] 中提出的猜想，将本文的结果应用到高阶方程上去，得到了新的有趣的结果。

本文考虑以下方程

$$\dot{x}(t) = [\Lambda + V(t)]x(t) + F(t, x_t) \quad (1)$$

其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\text{Re} \lambda_i \neq \text{Re} \lambda_j$, ($i \neq j$), $V(t) = \text{diag}\{V_1(t), \dots, V_n(t)\}$,

$V_{ii}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $\int_t^{t+1} v_i(s) ds = 0$ (1) ($t \rightarrow \infty$) ($1 \leq i \leq n$), $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$

$F: [0, \infty) \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续, $F(t, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}^n$ 对任何 $t \in [0, \infty)$ 线性, $|F(t, \phi)| \leq \phi(t) \|\phi\|$,

$\phi(t) \geq 0$, 且 $\phi(\cdot) \in L^p[0, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$.

$$\text{令 } \delta_k(t) = e_k^T F(t, c_k c) \int_t^{t+\theta} \lambda_k(s) ds \quad (1 \leq k \leq n)$$

其中 $\lambda_k(t) = \lambda_k + V_k(t)$, $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, $c \int_t^{t+\theta} \lambda_k(s) ds \in C$ 按下式定义:

$$\left(\int_t^{t+\theta} \lambda_k(s) ds \right)_{(\theta)} = c \int_t^{t+\theta} \lambda_k(s) ds \quad (-r \leq \theta \leq 0), \quad V_k(t) = V_k(0) \quad (-r \leq t \leq 0), \quad S_k(t, 6) = \int_0^t \delta_k(s) ds, \quad S(t, 6) = \text{diag}\{S_1(t, 6), \dots, S_n(t, 6)\}.$$

在以上假定和定义下, 本文得到:

定理 1: 对任何 $k (1 \leq k \leq n)$ 和对任意实数 $b (b \neq 0)$, 存在充分大的 6_0 , 使得当 $6 \geq 6_0$ 时, 便存在方程 (1) 的一个解 $x_k(6, b)$, 定义在 $t \geq 6$ 上, 且

$$x_k(6, b)(t) = e \int_0^t \lambda_k(s) ds + S_k(t, 6) \quad (e_k b + 0(1)) \quad (t \rightarrow \infty).$$

定理 2: 存在 $n \times n$ 矩阵 $F(\cdot)$, 在 $[0, \infty)$ 上定义, $F(t) = 0(1) (t \rightarrow \infty)$, 使得对方程 (1) 的任何解 $x(t_0, \phi) (t_0 \geq 0)$, 都存在常向量 $l(\phi)$ 和一个向量函数 $f(\cdot)$, 使

$$x(t_0, \phi)(t) = [I + F(t)] e \int_{t_0}^t [\Lambda + V(s)] ds + S(t, t_0) (l(\phi) + f(t))$$

其中 $f(\cdot)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上定义, $f(t) = 0(1) (t \rightarrow \infty)$, $(t \geq t_0)$ 反之, 对任何常向量 l , 总存在一个解 $x(t_0, \phi)$, $(t_0$ 可能很大) 使其具有上形式, 对某个 $f(\cdot)$, $f(t) = 0(1) (t \rightarrow \infty)$ (实际上可取 $f(t) \equiv 0$).

定理 3: 在定理 2 中, $l: C \rightarrow R^n$ 是非平凡的连续线性泛函, 从而其零子空间是余一维的. 其中 $l(\phi)$ 是定理 2 中解的表达式中的常向量.

将定理 2 应用到高价方程

$$u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + a_n u(t) + P_1(t, u_1^{(n-1)}) + \dots + P_{n-1}(t, u_1') + P_n(t, u_1) = 0 \quad (2)$$

其中 $a_i (1 \leq i \leq n)$ 均为常数, $P_i: (0, \infty) \times C([-r, 0], R) \rightarrow R$ 连续, $r > 0$ 常数, $P_i(t, \cdot): C \rightarrow R$ 线性, $t \in [0, \infty) |P_i(t, \phi)| \leq P(t) |\phi|$, $P(t) \geq 0$, $P(\cdot) \in L^p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, 我们得到:

定理 4: 在以上条件下, 方程 (2) 的任一解 $u(t_0, \phi)$, 具有形式:

$$\begin{aligned} u(t_0, \phi)(t) &= x_1(t) + \dots + x_n(t) \\ u'(t_0, \phi)(t) &= \lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u^{(n-1)}(t_0, \phi)(t) = \lambda_1^{n-1} x_1(t) + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n(t)$$

其中 $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 是 (2) 的等价方程组的解, 由定理 2 中的表达式给出, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是方程 $u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + a_n u(t) = 0$ 的特征根, 我们假定 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 实 P 且不相同.

斜群环及其上的模

理学硕士 张兆基 指导教师

我们讨论了斜群环的素性、极大条件、半单性、自内射性, 结果是令人满意的。同时, 还引入了斜群模的概念, 并讨论了斜群模的一些性质。

斜群模的定义如下:

设 R 为环, G 为群。 $\theta: G \rightarrow \text{Aut}(R)$ 为群同态, M 为右 R -模。令

$M *_\theta G = \{ \sum m(g)g \mid g \in G, m(g) \in M, \text{仅有限个 } m(g) \neq 0 \}$ 在 $M *_\theta G$ 中, 加法按分量确定。于是 $M *_\theta G$ 、 $R *_\theta G$ 均作成 *Abel* 群。作映射

$$\begin{aligned} M *_\theta G \times R *_\theta G &\rightarrow M *_\theta G \\ (\sum m g, \sum r h) &\rightarrow \sum_{g, h} m r^{\theta(g)} g h \end{aligned}$$

其中 $m \in M$, $r \in R$, $g, h \in G$, $r^{\theta(g)}$ 为 r 在 $\theta(g)$ 下的象。 $M = R$ 时, $R *_\theta G$ 作成环, 即为斜群环 (定义可见 [5])。一般地, $M *_\theta G$ 作成 $R *_\theta G$ -模。我们称 $M *_\theta G$ 为斜群模。

$\theta(G) = \{1_R\}$ 时, 记 $M *_\theta G = M[G]$, 并称为群模。这是群环 $R[G]$ 上的模。

由定义可知, 斜群模是斜群环在模意义下的推广。一方面, 类似群环中的一些很好的结论在斜群模中成立; 另一方面, 斜群模具有相当的一般性: 斜群环本身也是自身上的一个斜群模。因此, 斜群模的讨论还可以对群环、斜群环的研究起到促进作用。

群环的研究中有一类典型的问题: 由群环 $R[G]$ 的性质推出 R 及 G 的性质, 或反过来, 到目前为止, 对斜群环的研究几乎都是围绕这类问题进行的, 最好的结果是与群环中一致的结果。

我们对斜群环及斜群模讨论了这类问题。

对斜群模, 我们得到的主要结果如下:

1. i) M 为 *Artin* (或 *Noether*) R -模, G 为有限群, 则 $M *_\theta G$ 为 *Artin* (或 *Noether*) $R *_\theta G$ -模。

ii) $M *_\theta G$ 为 *Artin* (或 *Noether*) $R *_\theta G$ -模, 则 M 为 *Artin* (或 *Noether*) R -模。若 $\theta(G) = \{1_R\}$, 则还有 G 对子群有极小 (或极大) 条件。

2. (*Hilbert* 基定理) 设 G 为有限秩自由 *Abel* 群, 且 M 为 *Noether* R -模, 则 $M *_\theta G$ 为 *Noether* $R *_\theta G$ -模。

这是与关于多项式环的 *Hilbert* 基定理相类似的一个结果。

3. G 为 *FC*-群, 则 $M[G]$ 为 *Noether* $R[G]$ -模当且仅当 M 为 *Noether* R -模, G 为有限生成群。

在群环中, 当 G 为 *Abel* 群时, *Connell* [2] 证明了相应的结果。[13] 将其推广到 G

为 FC -群。这里，我们又推广了[13]的结果。

4. i) 若 M 为内射 R -模， G 为有限群，则 $M *_G G$ 为内射 $R *_G G$ -模。

ii) 若 $M *_G G$ 为内射 $R *_G G$ -模，则 M 为内射 R -模， G 为挠群。

这是群环自内射性结论的推广。

对斜群环，我们的结果除关于素性是部分结果外，其余的均与群环中一致。得到的主要结果如下：

1. i) R 为素环， G 为素群，则 $R *_G G$ 为素环。

ii) $R *_G G$ 为素环，则 R 为 G -素环。

2. (广义 Maschke 定理) $R *_G G$ 为 Artin 半单环当且仅当 R 为 Artin 半单环， G 为有限群，且 G 的阶在 R 中可逆。

3. i) 若 R 为 Noether 环， G 为有限群，则 $R *_G G$ 为 Noether 环。

ii) 若 $R *_G G$ 为 Noether 环，则 R 为 Noether 环， G 对子群有极大条件。

4. G 为 FC -群，则 $R *_G G$ 为 Noether 环当且仅当 R 为 Noether 环， G 为有限生成群。

这是[13]中结果的另一个推广。

5. i) 若 R 为自内射环， G 为有限群，则 $R *_G G$ 为自内射环。

ii) 若 $R *_G G$ 为自内射环，则 R 为自内射环， G 为挠群。

这是斜群模内射结果的推论。

隐式三点守恒差分格式的收敛性及熵条件

理学硕士 唐延冬 指导教师 朱本仁副教授
孙敬猷副教授

本文讨论了拟线性双曲型方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 的一类隐式差分格式的收敛性及收敛的解满足熵条件。在[2]中, Harten, Hyman and Lax 证明了一类单调显格式其解收敛于相关物理解。在[3]中, R. Sander 证明了单调显格式其解的收敛性。但是, 单调显格式其截断误差是1阶的。而2阶显格式在解的间断的区域一般产生振荡现象。从而易引起差分格式的解的不稳定性及收敛于非物理解。本文提出的一隐式3点守恒的差分格式具有1阶精度的截断误差, 且具有单调格式的优点, 克服了2阶显格式的缺点。考虑方程:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(M, t)|_{t=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$u_0(x) \in L_1(R) \cap L_\infty(R) \cap BV$$

对于上述方程, 无论初值多么光滑其解都可能产生间断。因此一般求其弱解。

存在有界几乎处处可测的函数 $u(x, t)$, 若满足:

$\forall \varphi(x, t) \in C_0^\infty(R \times R^+)$ 有下式成立:

$$\int_{R \times R^+} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt = 0 \quad (1.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^1} = 0$$

则 $u(x, t)$ 为(1.1)的弱解。

又因为弱解不唯一, 为保证弱解的唯一性, 通常还需附加一些条件。特别希望由此确定的解为相应的物理解。即: 熵条件。

在本文中应用下述熵条件:

(1.1) 的解 $u(x, t)$ 满足:

$$-\int \int_{R \times R^+} \left(\varphi_t |u - c| + \operatorname{sgn}(u - c) (f(u) - f(c)) \varphi_x \right) dx dt \leq 0$$

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(R \times R^+) \text{ 且 } \varphi \geq 0 \quad C \text{ 为任意实数} \quad (1.3)$$

则解 $u(x, t)$ 满足唯一性及 L_1 稳定性, 且为 (1.1) 的相关物理解 [1].

本文在 §2 中, 提出一新的隐式 3 点守恒差分格式:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + \lambda \eta [h(u_{i+1}^{n+1}, u_i^{n+1}) - h(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1})] \\ = u_i^n - \lambda(1-\eta) [h(u_{i+1}^n, u_i^n) - h(u_i^n, u_{i-1}^n)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

u_i^n 是对 $u(ih, nz)$ 的离散逼近. $0 \leq \eta < 1$

$\lambda = z/h = \text{const}$, z, h 分别为对时间和空间变量的剖分步长. 对于 $h(u, v)$ 需满足下述条件:

- 1) $h(u, u) = f(u)$ (相容性)
- 2) $\frac{\partial h(u, v)}{\partial u} \leq 0$ $\frac{\partial h(u, v)}{\partial v} \geq 0$
- 3) 设 $- \|u_0\|_{L_\infty} \leq x, y, w, z \leq \|u_0\|_{L_\infty}$

则有, $\lambda (|h(x, w) - h(y, w)| + |h(x, y) - h(x, z)|) \leq |x - y|$.

在 (2.1) 中取 $\eta = \frac{1}{2}$ 时, (2.1) 为 1 阶逼近的差分格式.

下面本文重点讨论 $\eta = \frac{1}{2}$ 的情况.

对于格式 (2.1) 本文证明了下述结果:

定理 1: 格式 (2.1) 的解满足: $\|u^{n+1}\|_{L_\infty} \leq \|u^n\|_{L_\infty}$

推论 1: 格式 (2.1) 的解 $\{u_i^n\}$ 满足:

$$\sum_i |\Delta_+ u_i^n| \leq \sum_i |\Delta_+ u_i^{n-1}|$$

定理 2: 在格式 (2.1) 中, 取 $\eta = \frac{1}{2}$. 则其解 $\{u_i^n\}$ 满足:

$$\begin{aligned} U(u_i^{n+1}) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} [\Delta + F_n(u_i^{n+1}, u_{i-1}^{n+1}) \\ + \Delta + F_n(u_i^n, u_{i-1}^n)] \leq 0 \end{aligned}$$

其中: $U(u) = |u - c|$ c 为任意实数;

$$F_h(u, v) = |h(u, v) - h(u, c)| - |h(u, c) - h(c, c)|$$

推论 2: 格式 (2.1) 的解是 L_1 稳定的, 即:

$$\sum_i |u_i^n| h \leq \sum_i |u_i^{n-1}| h.$$

本文的主要定理:

定理 3: 由 (2.1) 求出的分片常数的解 $u^n(x, t)$ 收敛于方程 (1.1) 满足 (1.3) 的弱解.

其中