硕士学位论文摘要汇编

理 科 版

1 9 8 7

山东大学研究生处

目　录

基础数学

计算数学

运筹学与控制论

理论物理

物理化学

高分子化学

植物学

生态学

发育生物学

微生物学

计算机软件

军用化学

一类凹算子及变号核算子的不动点及其应用

理学硕士 刘希玉 指导教师 郭大钧教授

本文讨论一类凹算子在不作紧性假设下不动点的存在性。以及一类变号核算子方程可解性。并应用于*Hammerstein*方程。我们知道，如果算子是u_0－凹且增[2]，当A有不动点时，A是锥压，本文首先讨论了当A锥压且凹时A不动点存在性。设E为*Banach*空间，P为正锥。

定义2.4 设算子$A:P\to P$，$D\subset P$，称A在D中拟一致轨道凹。如果

(i) $A(sx)\leqslant sAx$，$x\in P$，$s\geqslant 1$

(ii) $\forall x\in D$，$s>1$ $\exists\eta(s,x)>0$ 使$u=A^nx$，$n\geqslant 0$时

$A(su)\leqslant s[1-\eta(s,x)]Au$

我们在P中定义x，y相关指$\exists\lambda>0,\mu>0$使$x\leqslant\lambda y,y\leqslant\mu x$它是一个等价关系，$x,y$相关时定义$\alpha(x,y)=inf\{\lambda|x\leqslant\lambda y,\lambda>0\}$

令 $d(x,y)=\log\{\max[\alpha(x,y),\alpha(y,x)]\}$我们有如下：

定理2.6 设$A:P\to P$增，P正规，A在$D\subset P$中拟一致轨道凹，$D\subset P/\{0\}$中某一等价类。且在距离d下闭，则A在D中有唯一不动点。

定理2.6可导出若干推论，推广了前人的部分结果。并还可讨论固有元的性质（定理2.12）。利用上述定理可讨论无界区域上特别是全空间中非线性*Hammerstein*方程

$$\varphi(x)=A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy \qquad (1)$$

我们对f作凹性假设如下：

(A_2) $f(y,tu)\geqslant tf(y,u)$，$u\geqslant 0$，$t\in[0,1]$，$y\in G$ 且有闭集$F\subset G$，$mF>0$，

$f(y,tu)>tf(y,u)$，$t\in(0,1)$ $u>0$，$y\in F$

在假设（A_2）下我们有：

定理4.9 设f满足*Caratheodory*条件。K可测。设A映$C(G)\lambda$自身，设$x,y\in G$时$k(x,y)\geqslant 0$，$f(y,u)\geqslant 0$，$u\geqslant 0$，$f(y,u)$关于u增，$u\geqslant 0$，设$\underset{y\in F}{essinf}\, k(x,y)\geqslant\tau>0$，$x\in\tilde{G}$稠于$G$。设（1）有上、下解$v,u$，即$Av\leqslant v$，$Au\geqslant u$，$u\leqslant v$，$\inf\limits_G u(x)>0$，则（1）有非零正解。

注：在定理4.9中我们没有作紧性甚至连续性方面的假定，只要求A映$C(G)\lambda$自身，而在$C(G)$中特别是$C(R^n)$中紧性条件常难于验证。

当方程（1）中K变号时，我们作如下处理：

令 $K_1(x,y)=\max\{k(x,y),0\}$ $K_2(x,y)=\max\{-k(x,y),0\}$

考虑方程组：

$$\begin{cases} u(x)=\int_G k_1(x,y)f(y,u(y)+v(y))dy \\ v(x)=-\int_G k_2(x,y)f(y,u(y)+v(y))dy \end{cases} \tag{2}$$

如果（2）有解(u,v)则$x=u+v$便是（1）的解。设k_1是以$k_1(t,s)$为核的线性积分算子，用这种办法。我们得到：

定理4.1 设$mG<\infty$ $p>1$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\iint\limits_{G\times G}|k(t,s)|^{\max\{p,q\}}dtds<\infty$

$|f(t,u)|\leqslant a(t)+b_1|u|^{p/q}$ $a\in L_q(G)$ $b_1=\text{const}$. 设$f(t,u)$关于u增，存在$h\in L_q(G)$使$f(t,u)\geqslant h(t)$, $u\in R'$，记λ_1为k_1：$L_p(G)\to L_p(G)$的模最小的特征值。设

$$\overline{\lim_{u\to+\infty}}\frac{1}{u}f(t,u)<|\lambda_1|$$

关于几乎所有$t\in G$一致则方程（1）有解。

注，如果k_1无特征值。特别$k(t,s)\leqslant 0$则只要上式中$|\lambda_1|<\infty$即

$\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\frac{1}{u}f(t,u)<C$ 关于t一致$C<\infty$此时（1）有解。

本文是在导师郭大钧教授的热情关怀和指导下完成的。在写作过程中得到了孙经先博士的热心帮助。作者在此表示衷心感谢。

非线性Hammerstein型积分方程的解

理学硕士 刘兆理 指导教师 郭大钧教授

考虑 *Hammerstein* 型积分方程

$$x=kf(x) \tag{1}$$

其中k是定义在实 *Hilbert* 空间H内的全连续自伴算子，k的全集特征值为：

$$\cdots<\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$$

$f(x)$是定义在H上的连续势算子。即$f(x)=gradF(x)$，F是定义在H上的实泛函。对于这种任意核的 *Hammerstein* 型积分方程解的存在性与唯一性，*C.L.Dolph*[1]与王声望等[2]曾作过一些研究，得到了方程（1）的解的存在性与唯一性的一些充分条件。本文放宽了他们的条件，得到了方程（1）的解的存在性的一个充分条件。假设：

（i）存在数μ_N,μ_{N+1}（N为某整数），$\lambda_N<\mu_N<\mu_{N+1}<\lambda_{N+1}$，使得对$\forall x\in H$，有

$$\mu_N\|x\|^2-C_1\leqslant\partial F(x)\leqslant\mu_{N+1}\|x\|^2+C_2$$

其中$C_1,C_2>0$为常数。

将全部特征值$\lambda_{N+1},\lambda_{N+2},\cdots$所对应的特征元所张成的子空间记为$H_1$，将全部特征值$\lambda_N,\lambda_{N+1}\cdots$所对应的特征元及所有满足$kx=\theta$的元素$x$所张成的子空间记为$H_2$，则$H_1$和$H_2$都是$k$的不变子空间，且$H_1\oplus H_2$，再假设：

（ii）对$\forall\xi\in H_2$，$\exists\nu=\nu_\xi\in H_2$，$\nu_\xi\neq\theta$，使得当$y\in H_1$，且$y=P_1kf(y+\xi)$，$\xi\neq P_2kf(y+\xi)$时。有

$$(\xi-P_2kf(y+\xi),\nu_\xi)>0$$

这里P_1和P_2分别是H_1和H_2上的正交投影

本文证明了下面的定理。

定理：在条件（i）和条件（ii）之下，方程（1）在空间H中至少有一个解。

王声望等[2]作如下假设：

（iii）对于$\forall h\in H,h\neq\theta$,有

$$(f(x+h)-f(x),h)<\lambda_{N+1}\|h\|^2$$

并证明了在条件（i）和条件（ii）之下，方程（1）在空间H中至少有一个解。本文证明了当条件（iii）成立时，条件（ii）一定成立，并且举例说明条件（ii）比条件（iii）要广。

例：令$H=L^2[0,2\pi]$，其中内积定义为

$$(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)y(t)dt$$

令 $k(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}(\sin nt\sin s-\varepsilon\cos nt\cos ns)$（其中$\varepsilon=\frac{2}{9}$），则$k:L^2[0,2\pi]\to L^2[0,2\pi]$是全连续自伴算子，其全集特征值为

$$\cdots<-\frac{9}{\varepsilon}<-\frac{4}{\varepsilon}<-\frac{1}{\varepsilon}<1<4<9<\cdots$$

令$f(t,u)=\alpha u+\delta\sin u^2$（其中$0<\alpha<\frac{1}{\pi},\delta=\frac{1}{4\sqrt{2}}$）

则$f(x)=gradF(x)$是连续势算子，这里

$$F(x)=\int_0^{2\pi}dt\int_0^{x(t)}f(t,u)du$$

本文验证了算子k和f满足条件(i)和(ii)，但不满足条件(iii)。

条件极值点处的不动点指数及其应用

理学硕士　郎国放　　指导教师　郭大钧教授

设H是Hilbert空间，$f:H\to R'$是C'泛函，$f'=I-A$，P为H中的锥，A在P上全连续，$AP\subset P$。本文主要讨论了当f在原点关于锥达到条件极大值时，算子A的不动点指数，并讨论了在积分方程的应用。

我们引入下列记号：

$f_{x_0}^{-1}(\Delta)$代表$f^{-1}(\Delta)$中含x_0的连通分支

$f_{p,x_0}^{-1}(\Delta)=f_{x_0}^{-1}(\Delta)\cap P$，$f_p^{-1}[\alpha,\beta]=f^{-1}[\alpha,\beta]\cap P$

这里的$\Delta\subset R'$

本文的主要结果如下

定理1. 设存在H中的有界开集$U,\theta\in U$，以及$\beta>\alpha$，满足

（1）$f_{p,\theta}^{-1}(\alpha,+\infty)\subset U$

（2）$f'(x)\neq\theta$，　$\forall x\in f_p^{-1}[\alpha,\beta]\cap\bar{U}$

（3）$\forall x\in P\cap\partial\Omega$，都有$f(tx)\geqslant f(x)$，$0\leqslant t\leqslant 1$

（4）$\forall\bar{\alpha}$，$\beta>\bar{\alpha}\geqslant\alpha$，都有

$$d(f_{p,\theta}^{-1}[\beta,+\infty),\quad P\backslash f_{p,\theta}^{-1}(\bar{\alpha},+\infty))>0$$

那么$i(A,P\cap\Omega,P)=0$。这里$\Omega=f_\theta^{-1}(\beta,+\infty)\cap U$。

当H是有限维空间，或者P是无穷维空间H中的局部紧锥时，定理1中的条件（3）和（4）可换为条件：

（3′）$f_{p,\theta}^{-1}[\beta,+\infty)\subset\overline{B_p(\theta,r)}\subset f_{p,\theta}^{-1}(\alpha,+\infty)$

这里的$B_p(x_0,r)=\{x\mid\|x-x_0\|<r\}\cap P$

需要指出的是，在整个无穷维空间上讨论f的梯度算子在f的局部极大点处的拓扑度是没有意义的。这是因为，当H为无穷维Hilbert空间，$f(x)=\frac{1}{2}(x,x)-\varphi(x)$，$\varphi'(x)=Ax$，$A$在$H$上全连续时，f不可能达到局部极大值。

但是，可以举例说明，f可以相对于锥达到条件极大值。

同样地，可以讨论在 f 的条件极小点（相对于锥）处的不动点指数，得到相应的结论，此时指数为 1 。

注：当P为楔时，本文的结论仍成立 。

下面讨论对积分方程的应用。

设 $H=L_2(G)$，$G\subset R^n$，有界可测，$mesG<+\infty$

定义：$\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}\int_G \varphi^2(x)dx-\int_G dx\int_0^{k\varphi(x)} f(u)du$

这里

$$f(u)=\begin{cases} u^\alpha & u\geqslant 0 \\ \phi(u) & u<0 \end{cases} \qquad 0<\alpha<1$$

$$K\varphi(x)=\int_G K(x,y)\varphi(y)dy$$

假定：(i) $\phi(u)$连续，$|\phi(u)|\leqslant b|u|^\alpha$，$\phi(0)=0$

(ii) $K(x,y)$为非负可测对称核，并且 $K(x,y)\geqslant g(x)$。

(iii) $M=\sup\limits_{x,y\in G} K(x,y)<+\infty, m=\int_G g(x)dx, \frac{m}{M}<mesG$

我们取

$$P=\left\{\varphi \left|\begin{array}{l} \varphi\in H,\ \varphi\geqslant 0,\ \text{并且存在某个 } G_0\subset G \\ \varphi_0 \text{ 与 } \varphi \text{ 有关，} mesG_0=0,\ \text{使得} \\ \sup\limits_{x\in G\setminus G_0}\varphi(x)<+\infty,\ \text{并且} \\ \qquad\qquad \int_G\varphi(x)dx\geqslant\frac{m}{M}\sup\limits_{G\setminus G_0}\varphi(x) \end{array}\right.\right\}$$

可以证明$\Phi'=I-A$，$A=K^*fK$：$L_2(G)\to L_2(G)$全连续，P 为H中的锥，$AP\subset P$ ，并且Φ在θ点达到相对于 P 的条件极大值。

这里的K^*为K的共轭算子，$f\varphi(x)=f(\varphi(x))$

利用本文的结果可以得到如下的结论：

1 . 如果Φ在 P 上、θ的附近没有临界点（$\varphi\neq\theta$），那么，存在β_0，使

$$i(A,P\cap\Omega,P)=0$$

这里 的 $\Omega=\Phi_\theta^{-1}(\beta_0,+\infty)\cap U$。

2 . Φ 在 P 上具有非零的临界点。

Lienard 方程零解全局渐近稳定的充要条件

理学硕士 李惠卿　　指导教师 尤秉礼教授

Lienard 方程

$$\ddot{x}+\dot{x}f(x)+g(x)=0 \qquad (1)$$

是振动问题中很重要的一个方程，也是常微分方程理论中的一个基本方程，曾引起了许多数学工作者和力学工作者的极大兴趣。作者在此主要讨论其零解的全局渐近稳定性，得出了下述主要结论

定理1. 假定f,g连续，保证（1）的解存在唯一且满足

(i) $xg(x)>0 \qquad x\neq 0$

(ii) $xF(x)>0 \qquad x\neq 0$

则（1）的零解全局渐近稳定的充要条件为

$$\overline{\lim_{|x|\to+\infty}}(|F(x)|+G(x))=+\infty \qquad (*)$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(s)ds$, $G(x)=\int_0^x g(s)ds$。

我们来分析一下条件(*)

当 $x>0$ 时，有两种可能性

(*A*) $G(x)$有界，此时必有$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|F(x)|=+\infty$

(*B*) $G(x)$无界，则$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=+\infty$成立

当$x<0$时，也有两种可能性。

$(A)'$ $G(x)$有界，此时必有$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|F(x)|=+\infty$。

$(B)'$ $G(x)$无界，则有$\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=+\infty$。

因此，在$(-\infty,+\infty)$上条件(*)意味着以下四种情况

1° (A)和$(A)'$成立

2° (A)和$(B)'$成立

3° (B)和$(A)'$成立

4° (B)和$(B)'$成立。

以往人们都是针对情形1°、4°来讨论的，而2°、3°尚未有人考虑过。作者还给出了必要性条件，使得对 *Lienard* 方程零解全局渐近稳定的讨论比较完备、彻底。作者认为，所得结论在讨论 *Lienard* 方程极限环时，可能有所应用。

在工作过程中，作者纠正了*kpacohckuŭ*对方程组

$$\left|\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x)+ay\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x)+by\end{aligned}\right.$$

（其中a、b为常数，$a\neq0,f_1f_2$ 连续，保 证解 存在唯一。$f_1(0)=0,f_2(0)=0$）零解全局渐近稳定所加的充分必要条件。他的这一结果发表的比较早，长期以来，人们只是利用它，因此，凡是借用 *kpacohckuŭ* 这一结论的地方，都应做相应的改动，譬如谷超豪对方程组

$$\left|\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x)+ay\\ \frac{dy}{dt}&=f_2(x)+g(x)y\end{aligned}\right.$$

（其中 f_1f_2,g连续，$a\neq0$，$f_1(0)=f_2(0)=0$，保证解存在唯一）零解全局渐近稳定所加的充要条件。

一类线性泛函微分方程解的渐近积分形式

理学硕士　艾尚兵　　指导教师　尤秉礼教授

本文研究了一类特殊的线性泛函微分方程，给出了其所有解的渐近积分形式。利用本文结果，证明了 *J.R.Haddock* 在[1]中提出的猜想，将本 文的结果应用到高阶方程上去，得到了新的有趣的结果。

本文考虑以下方程

$$\dot{x}(t)=[\Lambda+V(t)]x(t)+F(t,x_t) \tag{1}$$

其中 $\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$Re\lambda_i\neq Re\lambda_j$，$(i\neq j)$，$V(t)=diag\{V_1(t),\ \cdots,\ v_n(t)\}$，$V_i:[0,\infty)\to R$ 连 续，且 $\int_t^{t+1}v_i(s)ds=0(1)\ (t\to\infty)\ (1\leqslant i\leqslant n)$，$C=C([-r,0],R^n)$ $F:[0,\infty)\times C\to R^n$ 连续，$F(t,\cdot):C\to R^n$ 对任何 $t\in[0,\infty)$线性，$|F(t,\phi)|\leqslant\phi(t)\|\phi\|$，

$\phi(t)\geqslant 0$，且$\phi(\cdot)\in L^p[0,\infty)$，$1\leqslant p\leqslant 2$。

令 $\delta_k(t)=e_k^T F(t,e_k e^{\int_t^{t+\cdot}\lambda_k(s)ds})$ $(1\leqslant k\leqslant n)$

其中$\lambda_k(t)=\lambda_k+V_k(t)$，$e_k=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)^T$，$e^{\int_t^{t+\cdot}\lambda_k(s)ds}\in C$按下式定义：$\left(e^{\int_t^{t+\cdot}\lambda_k(s)ds}\right)(\theta)=e^{\int_t^{t+\theta}\lambda_k(s)ds}$ $(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$，$V_k(t)=V_k(0)$ $(-r\leqslant t\leqslant 0)$，$S_k(t,6)=\int_6^t\delta_k(s)ds$，$S(t,6)=diag\{S_1(t,6),\cdots,S_n(t,6)\}$。

在以上假定和定义下，本文得到：

定理1：对任何 $k(1\leqslant k\leqslant n)$和对任意实数 $b(b\neq 0)$，存在充分大的 6_0，使得当$6\geqslant 6_0$时，便存在方程（1）的一个解 $x_k(6,b)$，定义在 $t\geqslant 6$上，且

$$x_k(6,b)(t)=e^{\int_6^t\lambda_k(s)ds+S_k(t,6)}(e_kb+0(1))\qquad(t\to\infty)。$$

定理2：存在 $n\times n$ 矩阵 $F(\cdot)$，在$[0,\infty)$上定义，$F(t)=0(1)(t\to\infty)$，使得对方程（1）的任何解 $x(t_0,\phi)(t_0\geqslant 0)$，都存在常向量 $l(\phi)$和一个向量函数 $f(\cdot)$，使

$$x(t_0,\phi)(t)=[I+F(t)]e^{\int_{t_0}^t[\Lambda+V(s)]ds+S(t,t_0)}(l(\phi)+f(t))$$

其中 $f(\cdot)$在$[t_0,\infty)$上定义，$f(t)=0(1)(t\to\infty)$，$(t\geqslant t_0)$ 反之，对任何常向量 l，总存在一个解 $x(t_0,\phi)$，(t_0 可能很大)使其具有上形式，对某个 $f(\cdot)$，$f(t)=0(1)$ $(t\to\infty)$（实际上可取 $f(t)\equiv 0$）。

定理3：在定理2中，$l:C\to R^n$ 是非平凡的连续线性泛函，从而其零子空间是余一维的。其中 $l(\phi)$是定理2中解的表达式中的常向量。

将定理2应用到高价方程

$$u^{(n)}(t)+a_1u^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nu(t)+P_1(t,u_t^{(n-1)})+\cdots+P_{n-1}(t,u_t')+P_n(t,u_t)=0\qquad(2)$$

其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$均为常数，$P_i:(0,\infty)\times C([-r,0],R)\to R$连续，$r>0$常数，$P_i(t,\cdot)$：$C\to R$ 线性，$t\in[0,\infty)|P_i(t,\phi)|\leqslant P(t)|\phi|$，$P(t)\geqslant 0$，$P(\cdot)\in L^p(0,\infty)$，$1\leqslant P\leqslant 2$，我们得到：

定理4：在以上条件下，方程（2）的任一解 $u(t_0,\phi)$，具有形式：

$$\begin{aligned}
u(t_0,\phi)(t)&=x_1(t)+\cdots+x_n(t)\\
u'(t_0,\phi)(t)&=\lambda_1x_1(t)+\cdots+\lambda_nx_n(t)\\
&\vdots\\
u^{(n-1)}(t_0,\phi)(t)&=\lambda_1^{n-1}x_1(t)+\cdots+\lambda_n^{n-1}x_n(t)
\end{aligned}$$

其中 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T$ 是（2）的等价方程组的解，由定理2中的表达式给出，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是方程 $u^{(n)}(t)+a_1u^{(n-1)}(t)+\cdots+a_nu(t)=0$ 的特征根，我们假定$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 实P且不相同。

斜群环及其上的模

理学硕士　张兆基　　指导教师

我们讨论了斜群环的素性、极大条件、半单性、自内射性，结果是令人满意的。同时，还引入了斜群模的概念，并讨论了斜群模的一些性质。

斜群模的定义如下：

设R为环，G为群。$\theta: G\to Aut(R)$为群同态，M为右R－模。令

$M*_\theta G=\{\sum m(g)g \mid g\in G, m(g)\in M$，仅有限个$m(g)\neq 0\}$在$M*_\theta G$中，加法按分量确定。于是$M*_\theta G$、$R*_\theta G$均作成$Abel$群。作映射

$$M*_\theta G\times R*_\theta G\to M*_\theta G$$
$$(\sum mg, \sum rh)\to \sum_{g,h} mr^{\theta(g)}gh$$

其中$m\in M$，$r\in R$，$g,h\in G$，$r^{\theta(g)}$为r在$\theta(g)$下的象。$M=R$时，$R*_\theta G$作成环，即为斜群环（定义可见[5]）。一般地，$M*_\theta G$作成$R*_\theta G$－模。我们称$M*_\theta G$为斜群模。$\theta(G)=\{1_R\}$时，记$M*_\theta G=M[G]$，并称为群模。这是群环$R[G]$上的模。

由定义可知，斜群模是斜群环在模意义下的推广。一方面，类似群环中的一些很好的结论在斜群模中成立；另一方面，斜群模具有相当的一般性：斜群环本身也是自身上的一个斜群模。因此，斜群模的讨论还可以对群环、斜群环的研究起到促进作用。

群环的研究中有一类典型的问题：由群环$R[G]$的性质推出R及G的性质，或反过来，到目前为止，对斜群环的研究几乎都是围绕这类问题进行的，最好的结果是与群环中一致的结果。

我们对斜群环及斜群模讨论了这类问题。

对斜群模，我们得到的主要结果如下：

1．i) M为$Artin$（或$Noether$）R－模，G为有限群，则$M*_\theta G$为$Artin$（或$Noether$）$R*_\theta G$－模。

ii) $M*_\theta G$为$Artin$（或$Noether$）$R*_\theta G$－模，则M为$Artin$（或$Noether$）R－模。若$\theta(G)=\{1_R\}$，则还有G对子群有极小（或极大）条件。

2．（$Hilbert$基定理）设G为有限秩自由$Abel$群，且M为$Noether$ R－模，则$M*_\theta G$为$Noether$ $R*_\theta G$－模。

这是与关于多项式环的$Hilbert$基定理相类似的一个结果。

3．G为FC－群，则$M[G]$为$Noether$ $R[G]$－模当且仅当M为$Noether$ R－模，G为有限生成群。

在群环中，当G为$Abel$群时，$Connell$[2]证明了相应的结果。[13]将其推广到G

为 FC－群。这 里，我们又推广了[13]的结果。

4．i）若M为内射R－模，G为有限群，则$M*_{\theta}G$为内射$R*_{\theta}G$－模。

ii）若$M*_{\theta}G$为内射$R*_{\theta}G$－模，则M为内射R－模，G为挠群。

这是群环自内射性结论的推广。

对斜群环，我们的结果除关于素性是部分结果外，其余的均与群环中一致。得到的主要结果如下：

1．i）R为素环，G为素群，则$R*_{\theta}G$为素环。

ii）$R*_{\theta}G$为素环，则R为G－素环。

2．（广义$Maschke$定理）$R*_{\theta}G$为$Artin$半单环当且仅当R为$Artin$半单环，G为有限群，且G的阶在R中可逆。

3．i）若R为$Noether$环，G为有限群，则$R*_{\theta}G$为$Noether$环。

ii）若$R*_{\theta}G$为$Noether$环，则R为$Noether$环，G对子群有极大条件。

4．G为FC－群，则$R*_{\theta}G$为$Noether$环当且仅当R为$Noether$环，G为有限生成群。

这是[13]中结果的另一个推广。

5．i）若R为自内射环、G为有限群，则$R*_{\theta}G$为自内射环。

ii）若$R*_{\theta}G$为自内射环，则R为自内射环，G为挠群。

这是斜群模内射结果的推论。

隐式三点守恒差分格式的收敛性及熵条件

理学硕士 唐延冬　　指导教师 朱本仁副教授
孙教猷副教授

本文讨论了拟线性双曲型方程 $u_t+f(u)_x=0$ 的一类隐式差分格式的收敛性及收敛的解满足熵条件。在[2]中，Harten、Hyman and Lax 证明了一类单调显格式其解收敛于相关物理解。在[3]中，R.Sander 证明了单调显格式其解的收敛性。但是，单调显格式其截断误差是1阶的。而2阶显格式在解的间断的区域一般产生振荡现象。从而易引起差分格式的解的不稳定性及收敛于非物理解。本文提出的一隐式3点守恒的差分格式具有1阶精度的截断误差，且具有单调格式的优点，克服了2阶显格式的缺点。考虑方程：

$$\begin{cases} u_t+f(u)_x=0 \\ u(M,t)|_{t=0}=u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

$$u_0(x)\in L_1(R)\cap L_\infty(R)\cap BV$$

对于上述方程，无论初值多么光滑其解都可能产生间断。因此一般求其弱解。

存在有界几乎处处可测的函数 $u(x,t)$，若满足：

$\forall\varphi(x,t)\in C_0^\infty(R\times R^+)$ 有下式成立：

$$\begin{aligned} &\int_{R\times R^+}(u\varphi_t+f(u)\varphi_x)dxdt=0 \\ &\lim_{t\to 0}\|u(x,t)-u_0(x)\|_{L^1}=0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

则 $u(x,t)$ 为(1.1)的弱解。

又因为弱解不唯一，为保证弱解的唯一性，通常还需附加一些条件。特别希望由此确定的解为相应的物理解。即：熵条件。

在本文中应用下述熵条件：

(1.1)的解 $u(x,t)$ 满足：

$$-\iint_{R\times R^+}\Big(\varphi_t|u-c|+sgn(u-c)(f(u)-f(c))\varphi_x\Big)dxdt\leqslant 0$$

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(R\times R^+)\text{且 }\varphi\geqslant 0\quad C\text{为任意实数} \tag{1.3}$$

则解 $u(x,t)$ 满足唯一性及 L_1 稳定性，且为（1.1）的相关物理解[1]。

本文在§2中，提出一新的隐式3点守恒差分格式：

$$u_i^{n+1}+\lambda\eta[h(u_{i+1}^{n+1},u_i^{n+1})-h(u_i^{n+1},u_{i-1}^{n+1})]$$
$$=u_i^n-\lambda(1-\eta)[h(u_{i+1}^n,u_i^n)-h(u_i^n,u_{i-1}^n)] \qquad (2.1)$$

u_i^n 是对 $u(ih,nz)$ 的离散逼近。$0\leqslant\eta<1$

$\lambda=z/h=\text{const}$，z、h分别为对时间和空间变量的剖分步长。对于 $h(u,v)$ 需满足下述条件：

1） $h(u,u)=f(u)$ （相容性）

2） $\dfrac{\partial h(u,v)}{\partial u}\leqslant 0$ $\qquad \dfrac{\partial h(u,v)}{\partial v}\geqslant 0$

3） 设 $-\|u_0\|_{L_\infty}\leqslant x,y,w,z\leqslant\|u_0\|_{L_\infty}$

则有：$\lambda(|h(x,w)-h(y,w)|+|h(\tau,x)-h(\tau,y)|)\leqslant|x-y|$。

在（2.1）中取 $\eta=\dfrac{1}{2}$ 时，（2.1）为1阶逼近的差分格式。

下面本文重点讨论 $\eta=\dfrac{1}{2}$ 的情况。

对于格式（2.1）本文证明了下述结果：

定理1：格式（2.1）的解满足：$\|u^{n+1}\|_{L_\infty}\leqslant\|u^n\|_{L_\infty}$

推论1：格式（2.1）的解 $\{u_i^n\}$ 满足：

$$\sum_i|\Delta_+u_i^n|\leqslant\sum_i|\Delta_+u_i^{n-1}|$$

定理2：在格式（2.1）中，取 $\eta=\dfrac{1}{2}$。则其解 $\{u_i^n\}$ 满足：

$$U(u_i^{n+1})-U(u_i^n)+\frac{\lambda}{2}[\Delta+F_h(u_i^{n+1},u_{i-1}^{n+1})$$
$$+\Delta+F_h(u_i^n,u_{i-1}^n)]\leqslant 0$$

其中：$U(u)=|u-c|$ $\qquad$ c 为任意实数：

$$F_h(u,v)=|h(u,v)-h(u,c)|-|h(u,c)-h(c,c)|$$

推论2：格式（2.1）的解是 L_1 稳定的，即：

$$\sum_i|u_i^n|h\leqslant\sum_i|u_i^{n-1}|h.$$

本文的主要定理：

定理3：由（2.1）求出的分片常数的解 $u^\wedge(x,t)$ 收敛于方程（1.1）满足（1.3）的弱解。

其中