高等数学补充习题集

（第七版）

江南大学基础数学部

二〇〇二年九月

高等数学补充习题集

（第七版）

江南大学基础数学部

二〇〇二年九月

序 言

本习题集是根据国家教委高等教育司《高等数学课程教学基本要求》，以同济大学《高等数学》(第五版)为基础，结合本校各专业高等数学课程的教学实践和要求编写而成的。习题集分为习题和习题解答两部分，收集习题 442 道，并配有 8 份试卷和 202 道综合检测题及 4 份自测练习试卷，共 830 道题。

本习题集可作为本科、专科学生学习高等数学课程的辅助资料，内容相对集中，较适合于各单元内容的复习和自测。也可供教师上习题课参考。

本习题集中的 200 道综合检测题反映了国家 1987 年～2002 年 Ⅰ类～Ⅳ类硕士研究生数学考试中有关高等数学内容的水平，适合于学生复习、提高和考研使用。也可供教师因材施教参考。

本习题集由曹菊生、马恒新、刘琪和王茂南老师编写，马恒新老师审稿。在编写过程中，得到了基础数学部各位老师的大力支持，在此谨表谢意。

编 者

2002 年 9 月

目　录

(注：第一个页码为习题页码，第二个页码为解答页码.)

第一部分　习　题

第一章　函数与极限

1. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，则 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域是________.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(\cos^2 x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin 2x}+(1+x)^x\right]=$________.

3. 若要 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{1}{2}$，则需 $p=$________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & -3\leqslant x\leqslant 0\\ -x^3, & 0<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则此函数是

   (A) 有界函数；　(B) 奇函数；　(C) 偶函数；　(D) 周期函数.

5. 当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 是 x 的　B

   (A) 高阶无穷小；　(B) 同阶无穷小，但不是等价无穷小；

   (C) 低阶无穷小；　(D) 等价无穷小.

6. “数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在”是“数列 $\{x_n\}$ 有界”的

   (A) 充分必要条件；　(B) 充分但非必要条件；

   (C) 必要但非充分条件；(D) 既非充分条件，也非必要条件.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right]$ 的结果是　B

   (A) 无穷大；　(B) 0；　(C) $-\dfrac{1}{2}$；　(D) 不存在，也不是无穷大.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的　A　B

   (A) 可去间断点；(B) 跳跃间断点；(C) 无穷间断点；(D) 振荡间断点.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调增函数，$x_0\in(a,b)$，则　C

   (A) $f(x_0-0)$ 存在，但 $f(x_0+0)$ 不一定存在；

   (B) $f(x_0+0)$ 存在，但 $f(x_0-0)$ 不一定存在；

   (C) $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$ 都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不一定存在；

   (D) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x-1, & x\leqslant 1\\ 2x-x^2, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(1+a)-f(1-a)$，其中 $a>0$.

11. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ 的值.

12. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 x 是否是等价无穷小？并说明理由.

13. 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ 的值.

14. 讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{3x}-3e^{-2x}}{4e^{3x}+e^{-2x}}$.

15. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x|}$，确定实数 a,b 之值，使得当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 为无穷小；当 $x\to b$ 时 $f(x)$ 为无穷大.

16. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(1+x)-\ln(x-1)]$.

17. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)^x$.

18. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$

19. 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\ln|x|}$.

20. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$.

21. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{1+x}}\right)$，$(a>0,\ a\neq 1)$

22. 设 $x_1=\sqrt[3]{6}$，$x_{n+1}=\sqrt[3]{6+x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值.

23. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots,\ a>0)$. 证明极限 $\lim x_n$ 存在，并求此极限值. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\le 1$

24. 设 $x_1\geqslant a>0$，$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明极限 $\lim x_n$ 存在，并求此极限值.

*25. 设 $x_0=1$，$x_1=1+\dfrac{x_0}{1+x_0}$，$\cdots$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$，$\cdots$. 证明极限 $\lim x_n$ 存在，并求此极限值.

26. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，其中 $a>0,\ b>0$ 且 $a\neq 1,\ b\neq 1$.

27. 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{|x|}$，确定 $f(x)$ 的连续区间，如果有间断点，试指出间断点的类型.

28. 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点，并判定其类型.

29. 求函数 $f(x)=\lim(x+\sin^{2n}x)$ 的间断点，并指出其类型.

30. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{}{1+(\ln x^2)^{2n+1}}$，试确定 $f(x)$ 的定义域及连续区间.

31. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，证明在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=$

32. 若 n 是一个正奇数，$a<0$，证明：有且仅有一个负数 b，使得 $b^n=a$.

第二章　导数与微分

33. $\dfrac{d}{dx}[\ln(\cos x^2)] =$ ________

34. $\dfrac{d}{dx}[x^2\cos e^{2x}] =$ ________

35. 设 $y = \dfrac{1}{x^x}$ $(x > 0)$，则 $y' =$ ________.

36. 设 $y = e^{\sqrt{\sin 2x}}$ $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$，则 $dy =$ ________ $d\sin 2x$.

37. 设 $f(x) = (x^2 - 1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在点 $x = 1$ 及其邻域内有定义，则 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处可导的充分必要条件是________.

38. 设 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $(x > 0)$，则 $y' =$ ________

39. 设 $0 < x < 1$，则 $d(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}) =$ ________ dx.

40. 设 $|x| < \dfrac{\pi}{2}$，则 $d(\sin\sqrt{\cos x}) =$ ________ $d\cos x$.

41. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数，且 $f'(x_0) = 5$，则 $f'(-x_0) =$ ________.

42. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程是________.

43. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则在点 $x = 0$ 处，$f(x)$ 的导数 D

(A) 等于 0；　(B) 不存在；　(C) 等于 1；　(D) 等于 -1.

44. 已知 a 是大于零的常数，$f(x) = \ln(1 + a^{-2x})$，则 $f'(0)$ 的值应是：

(A) $-\ln a$；　(B) $\ln a$；　(C) $\dfrac{1}{2}\ln a$；　(C) $\dfrac{1}{2}$.

45. 设 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$，则 dy 等于

(A) $\dfrac{1}{x}d(x + \sqrt{1 + x^2})$；　(B) $\dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}d\sqrt{1 + x^2}$；

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}d\sqrt{1 + x^2}$；　(D) $\dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}d(x + \sqrt{1 + x^2})$.

46. 设 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$，则 $f^{(27)}(\pi)$ 的值等于 A

(A) 0；　(B) $-\dfrac{1}{2^{27}}$；　(C) $2^{27} - \dfrac{1}{2^{27}}$；　(D) 2^{27}.

47. 设 $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$，则 $y'(1)$ 等于 D

(A) 2；　(B) e；　(C) $\dfrac{1}{2} - \ln 2$；　(D) $1 - \ln 4$.

48. 设 $y = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$，求 y'

49. 设 $y = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{x}$，求 y'.

50. 设 $y = \tan(e^{-2x}+1)$，求 y'

51. 设 $y = x + \sqrt{1-x^2}\arcsin x$，求 y'.

52. 设 $y = x^{2x} + (2x)^x (x > 0)$，求 y'.

53. 设 $f(x) = e^x \sin x$，求 $f'''(0)$.

54. 设 $y = x^2 e^{ax}$，其中 a 为常数，求 $y^{(n)} (n > 2)$.

55. 设 $f(x)$ 可导，且满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$，其中 a,b,c 均为常数，且 $|a| \neq |b|$，求 $f'(x)$.

56. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^3 - x^2 y = 2$ 所确定，求 y'.

57. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \tan(xy) = y$ 所确定，求 $y'(0)$.

58. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = \arctan\sqrt{x} + x^y$ 所确定，求 y'.

59. 设 $u = f[\varphi(x) + y^2]$，其中 x,y 满足方程 $y + e^y = x$，且 $f(x),\varphi(x)$ 均二阶可导，试求 $\frac{du}{dx}$ 及 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

60. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

61. 设 $\begin{cases} x = a\cos 2t \\ y = \tan^2 t \end{cases} (a \neq 0)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

62. 设 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

63. 设函数 $y = y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = \ln t + t^2 \\ y = 2t^3 + 3t \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 及 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$ 的值.

~~64. 一质点沿抛物线~~ $y = (8 - x)x$ 运动，其横坐标随时间 t 变化的规律为 $x = t\sqrt{t}$ (t 的单位是秒，x 的单位是米)，求该质点的纵坐标在点 $M(1,7)$ 处的速率.

~~65. 为了使计算球体~~体积的相对误差不超过 3%，问测量球半径 r 时，所允许的相对误~~差应不超过~~多少？

66. 设 $y = [\psi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}$，其中 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可导函数，且 $\varphi(x) \neq 0$，$\psi(x) > 0$，求 y'.

67. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-e^{-x^4}}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$.

68. 设 $f(x) = \sin x$，$g(x) = \begin{cases} x - \pi, & x \leqslant 0 \\ x + \pi, & x > 0, \end{cases}$ 试问 $g(x)$ 及 $f[g(x)]$ 是否处处可导.

69. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续，但不可导.

70. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处存在几阶导数，这几阶导数在点 $x=0$ 处是否连续.

71. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ 1/e, & |x|>1, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

72. 设 $f'(a)$ 存在，$f(a)\neq 0$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)}\right|$，其中 n 为正整数.

73. 求曲线 $x^2+2xy^2+3y^4=6$ 在点 $M(1,-1)$ 处的切线和法线方程.

74. 设曲线方程为 $y=\sin(4-x^2)-x$，求此曲线在 $x=2$ 处的法线方程.

75. 证明若 $f(x)$ 为可导奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，并问其逆命题是否成立.

76. 设曲线方程为 $\begin{cases} x=3+2t+\arctan t \\ y=2-3t+\ln(1+t^2), \end{cases}$ 求此曲线在点 $(3,2)$ 处的切线方程.

第三章　中值定理与导数的应用

77. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$ 的值等于________.

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$ 值等于________.

79. 曲线 $y=\arctan x-x$ 在________内单调递减.

80. 曲线 $y=\ln x-x^2$ 在区间________是凸的（即向下凹）.

81. 曲线 $y=\operatorname{arccot}(1-x^2)$ 的渐近线方程是________

82. 设在直角坐标系上的曲线方程 $y=f(x)$ 二阶可导，且有拐点 $(x_0,f(x_0))$，则曲线在此拐点处的曲率为___0___.

83. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则有结论

(A) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极大值；　(B) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极小值.

(C) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 有拐点.　(D) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 无极值也无拐点.

84. 设函数 $y=\begin{cases} \cos x-1, & x\leqslant 0 \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则

(A) 函数在 $x=0$ 处无极值.　(B) 函数在 $x=0$ 处有极小值.

(C) 函数在 $x=0$ 处有最大值.　(D) 函数在 $x=0$ 处有极大值.

85. 设 $f(x)$ 处处连续，且在 $x=x_1$ 处有 $f'(x_1)=0$，在 $x=x_2$ 处不可导，那末

(A) $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 都不是 $f(x)$ 的极值点.

(B) 只有 $x=x_1$ 是 $f(x)$ 的极值点.

(C) $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 都有可能是 $f(x)$ 的极值点.

(D) 只有 $x = x_2$ 是 $f(x)$ 的极值点.

86. 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足 $a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n = 0$ 的实数，试证：方程 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

87. 证明：当 $x \neq 0$ 时，$e^x > 1 + x$ 成立.

88. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$ab > 0$，则存在 $\xi(a < \xi < b)$，使

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi f'(\xi) - f(\xi)$$

89. 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 + \cos\pi x}{x^2 - 2x + 1}$.

90. 求极限 $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos\frac{x}{2}}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}$.

91. 求极限 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cot 2x$.

92. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

93. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \sin x}$.

94. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x \sin^3 x}$.

95. 求极限 $\lim\limits_{x \to +0} (\cot x)^{\sin x}$.

96. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

97. 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

*98. 设 $f(x)$ 具有二阶导数，在 $x = 0$ 的某去心邻域内 $f(x) \neq 0$，且 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$，$f''(0) = 4$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

99. 确定 $y = 2x + \frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}$ 的单调区间.

100. 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，且 $f'(x) = e^{x^2}(x^2 - 1)(x + 2)$. 试确定 $y = f(x)$ 的单调区间.

101. 确定 $y = \begin{cases} x^3 - 3x & , x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{2} - 2\ln(x + 1) & , x > 0 \end{cases}$ 的单调区间.

*102. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内二阶可导，且 $f(a) > 0$，$f'(a) < 0$，又当 $x > a$ 时，$f''(x) < 0$，试证：方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

*103. 证明：方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 $x_n (n = 2, 3, 4, \cdots)$，并求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

*104. 设 $f(x)[0, +\infty)$ 可导，且有 n 个不同零点：$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，试证：$af(x)$

$+ f'(x)$ 在$[0,\infty)$内至少有 $n-1$ 个不同零点，其中 a 为任意实数.

105. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且 $f(x)\neq 0$. 若 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意实数 k，存在点 $\xi(a<\xi<b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=k$.

106. 证明：$x>4$ 时，$2^x>x^2$.

107. 求 $f(x)=e^{\sqrt{3}x}\cos x$ 的极小值点.

108. 求 $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$ 的极值.

109. 求 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 的极值.

110. 求 $f(x)=\sqrt[3]{x}\ln|x|$ 的极大值与极小值.

111. 求 $f(x)=e^{-x}(x+1)$ 在$[1,3]$上的最大值与最小值.

112. 求 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在$[-10,10]$上的最大值与最小值.

113. 把数 8 分为两个正数之和，使其立方之和为最小，求此两个正数.

114. 设有底面为等边三角形的一个直柱体，其体积为常量 $V(V>0)$，若要使其表面积达到最小，底面的边长应是多少？

115. 设扇形的周长 $p(p>0)$ 为常量，问当扇形的半径为何值时，扇形的面积最大？

116. 在抛物线 $x^2=4y$ 上求一点，使它到定点$(0,b)$的距离最短，并求最短距离(其中 b 是正数).

117. 轮船航行的费用由两部分组成：每小时的燃料费与速度立方成正比(设 k 为比例常数)，而其它费用为每小时 a 元，问轮船的速度为多大时，可使航行 S 公里的总费用最小？

118. 边长为 $a(a>0)$ 米的正方形铁皮各角剪去同样大小的小方块，做成无盖的长方体盒子，问怎样剪法才能使盒子的容积最大.

119. 求曲线 $y=x^3+3x^2-x-1$ 的凹凸区间与拐点坐标.

120. 讨论 $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ 的增减性，凹凸性，并求其极值.

*121. 设函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，$x\in[0,2]$，证明：对一切 $x\in(0,2)$，有 $|f'(x)|\leqslant 2$.

*122. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内存在四阶导数，且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$，M 是正常数，又 $x_1=x_0-h$ 和 $x_2=x_0+h$ 是该领域内关于 x_0 对称的两点，证明：

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x_1)-2f(x_0)+f(x_2)}{h^2}\right|\leqslant\frac{1}{12}Mh^2.$$

第四章　不定积分

123. $\int\cot^2 x\,dx=$ __________.

124. $\int\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=$ __________

125. $\int(\tan x+\cot x)^2 dx=$ __________

126. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=$ ______

127. $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x=$ ______

$x^2+\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-1$

128. $\int x^2\sqrt{4-3x^3}\mathrm{d}x=$ ______

$\sqrt{4-3x^3}\ \mathrm{d}(3x^3)$

129. $\int e^{ax}\cdot 2^x\mathrm{d}x=$ ______

130. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}\ (x>0)$,求 $f(x)$.

131. 若曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 处的切线斜率与 x^3 成正比例,并知该曲线通过点 $A(1,6)$ 和 $B(2,-9)$,求该曲线的方程.

132. 已知 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,在 $(-1,1)$ 内 $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,且 $F(1)=\frac{3\pi}{2}$,求 $F(x)$.

133. 求 $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$.

134. 求 $\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$.

135. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{th}^2x}}$.

136. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}$.

137. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4x\cos^4x}$.

138. 求 $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$.

139. 求 $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$.

140. 求 $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

141. 求 $\int\frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$.

142. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3x}$.

143. 求 $\int x^2\mathrm{arccot}x\mathrm{d}x$.

144. 求 $\int x^ne^x\mathrm{d}x$ (n 为自然数).

145. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$.

146. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$,求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

147. 设 $f'(e^x)=1+x$,求 $f(x)$

148. 设 $f'(\tan x+1)=\cos^4x+\sec^2x$,且 $f(1)=2$,求 $f(x)$.

149. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{sh}(x-1), & x<1\\ x\ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

150. 求 $\int \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

151. 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2e^{2x}+2e^{x}+1}}$.

152. 求 $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$.

153. 求 $\int \dfrac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x$.

154. 求 $\int \dfrac{(2-x)^2}{2-x^2}\mathrm{d}x$.

155. 求 $\int \dfrac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}\mathrm{d}x$.

156. 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$.

第五章　定　积　分

157. $\int_0^1 e^{3x^2+\ln x}\mathrm{d}x =$ __________.

158. $\int_0^b |x|\mathrm{d}x =$ __________.

159. $\int_1^{e^3} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} =$ __________.

160. $\int_{-5}^{5} \dfrac{x^3\sin^2 x}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x =$ __________.

161. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x =$ __________.

162. 设 $r\neq 1$，则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2} =$ __________.

163. 设 $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{3}\sin t^2\mathrm{d}t$,其中 $\varphi(x)$ 处处可导，则 $F'(x)=$ __________

164. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{3x}^{\sin x^2} f(t)\mathrm{d}t =$ __________

165. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的

(A) 必要条件；　(B) 充分条件；

(C) 充分且必要条件　(D) 既非充分也非必要.

166. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在积分中值定理 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$ 中，ξ 是 B

(A) $[a,b]$ 内的任一点；　(B) 在 $[a,b]$ 上至少存在的某一点；

(C) $[a,b]$ 内唯一的某点；　(D) $[a,b]$ 内的中点.

167. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b e^{t^2}\mathrm{d}t$ 的结果为

(A) e^{x^2}； (B) $-e^{x^2}$； (C) $c^{b^2}-e^{x^2}$； (D) $-2xe^{x^2}$.

168. 若 $g(x)=x^c e^{2x}$，$f(x)=\int_0^x e^{2t}(3t^2+1)^{1/2}\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则必有

(A) $c=0$； (B) $c=1$； (C) $c=-1$； (D) $c=2$.

169. 定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{|x|}\mathrm{d}x$ 的值是

(A) 0； (B) 2； (C) $2e^2+2$； (D) $\dfrac{6}{e^2}$.

170. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，将 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right]$ 表示成定积分.

171. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x 2t^4\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$.

172. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}e^t\mathrm{d}t}{\int_0^x(e^{t^2}+e^{-t^2})\mathrm{d}t}$.

173. 求函数 $y=\int_0^x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

174. 设 $f(x)$ 在 $x\geqslant 1$ 是一正值的连续函数，试求函数

$$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t\quad(x\geqslant 1)$$

的最小值.

175. 求 $I(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|e^t\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值.

176. 计算 $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$.

177. 计算 $\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}(1+\arctan x)\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

178. 计算 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

179. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，证明：

$$\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=2\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

180. 计算 $\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

181. 计算 $\int_0^3\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

182. 若 $f'(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，计算 $\int_0^{\pi}[f(\cos x)\cos x-f'(\cos x)\sin^2 x]\mathrm{d}x$.

183. 计算 $\int_{-1}^{1}(x+|x|)^2\mathrm{d}x$.

184. 计算 $\int_0^2\dfrac{|x-1|}{x+1}\mathrm{d}x$.

185. 计算 $\int_{-5}^{5}|x^2-2x-3|\mathrm{d}x$.

186. 已知 $f(t)=e^{-|t|}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

187. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\cos^p x+\sin^p x}\mathrm{d}x\ (p>0)$

188. 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ (α 为正数)

189. 求 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

190. 求 $I_n=\int_0^{+\infty}x^{2n-1}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

191. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

192. 证明：$\ln(1+\sqrt{2})\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^n}}\leqslant 1\ (n\geqslant 2)$.

193. 证明：$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sin x}{e^x(x^2+1)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{12e}$.

*194. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上具有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}M,$$

其中 M 是 $|f'(x)|$ 在$[0,1]$上的最大值.

195. 已知函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上连续且满足方程 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

*196. 计算 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

197. 计算 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

198. 证明 $\int_0^{+\infty}\min\left(e^{-x},\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2+1)$.

199. 设 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x(x-2)}$，求 $\int_1^3\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

200. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$.

第六章　定积分的应用

201. 当 a 为何值时，抛物线 $y=x^2$ 与三直线 $x=a$，$x=a+1$，$y=0$ 所围成的图形面积最小.

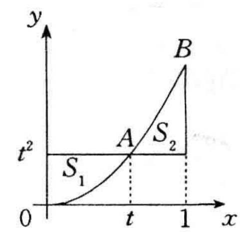
202. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间$(2,6)$内的一条切线，使得该切线与直线 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积最小.

203. 设抛物线 $y^2=2px$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 相交于 O,A,B 三点(其中 a 为定值，且 $a>p>0$)，问 p 为何值时，抛物线与公共弦 AB 所围成的图形面积最大？并求此最大面

积.

204. 试求由曲线 $y = xe^x$ 和 x 轴的负半轴所围成的整个图形的面积.

205. 求闭曲线 $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$ 所围图形的面积.



206. 在区间[0,1]上给定函数 $y = x^2$，问当 t 为何值时，右图所示面积 S_1 与 S_2 之和最小？何时最大？

207. 求由曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围成图形的面积.

208. 试求 $xy \leqslant 4, y \geqslant 1, x > 0$ 所夹的图形绕 y 轴旋转所成的立体的体积.

209. 设直线 $y = ax + b$ 与直线 $x = 0, x = 1$ 及 $y = 0$ 所围梯形面积等于 A（其中 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$），试求 a, b，使这块面积绕 x 轴旋转所得体积最小.

210. 设某抛物线 $y = ax^2 + 2bx + c$ 通过原点(0,0)，且当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $y \geqslant 0$，如果它与 x 轴以及直线 $x = 1$ 所围成的平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a, b, c，使这个平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

211. 计算曲线 $y = e^x$ 与 x 轴之间位于第二象限的平面图形的面积及此部分图形绕 y 轴旋转所成的旋转体体积.

212. 计算曲线 $\begin{cases} x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} \mathrm{d}u \\ y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u \end{cases}$ 在 $1 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 的一段弧长.

213. 求极坐标系中曲线 $r = a\sin^3 \frac{\theta}{3}$ 的全长($a > 0$).

214. 证明：如果 $f(x)$ 为线性函数 $f(x) = kx + m$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上的平均值是 $\bar{f} = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

215. 求一个面密度为 μ，半径为 R 的半圆形薄片关于通过其圆心并且垂直于半圆所在平面的轴的转动惯量.

216. 设有一均匀细杆，长为 l，质量为 M，求细杆绕过其中点且与杆垂直的轴 AB 的转动惯量.

217. 一均匀细棒 AB 长为 L，质量为 M，有一质量为 m 的质点 Q 在 AB 的延长线上且与 B 点距离为 a，求棒对该质点的引力大小(设引力常数 G 为已知).

218. 在 y 轴上 $0 \leqslant y \leqslant 2$ 的一段上有一根均匀细棒，其上任一点的线密度等于该点到棒两端距离的平方之乘积，求：(1) 它的质量；　(2) 关于 x 轴、y 轴的静矩；　(3) 质心坐标.

219. 一条均匀的线密度为 k 长度为 6 的细导线，弯成直角并将其放于 x 轴上的[0,2]区间与 y 轴上的[0,4]区间，求：(1) 关于 x 轴，y 轴的静矩；　(2) 质心坐标.

220. 油通过直油管时，中间流速大，越靠近管壁流速越小. 实验测定，某处的流速 v 与该处到管子中心的距离 r 之间有关系式 $v = k(a^2 - r^2)$，其中 k 为比例常数，a 为油管半径，求通过油管的流量.(注：当流速为常量时，流量 = 流速 × 截面积)

第七章　空间解析几何与向量代数

4 6 -8　(2,3,-4)　(5,-1,1)　(-1,7,-9)

221. 已知向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，则向量 $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 在 z 轴方向上的分向量是 (-1,7,-9).

222. 向量 $\boldsymbol{b} = \{1,1,-4\}$ 在向量 $\boldsymbol{a} = \{2,-2,1\}$ 上的投影等于 $-\frac{4}{3}$.

223. 已知 $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 5, |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 8$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| =$ 2.

224. 若三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 1, |\boldsymbol{c}| = 4$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} =$ -13.

225. 已知向量 $\boldsymbol{a} = \{2,1,-1\}$，若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = 3$，则 $\boldsymbol{b} =$ $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

226. 已知 $|\boldsymbol{m}| = 5, |\boldsymbol{n}| = 2, (\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}) = \dfrac{\pi}{3}$，则向量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} - 3\boldsymbol{n}$ 的模等于 $\sqrt{76}$.

227. 过点 $M_1(3,-2,1), M_2(-1,0,2)$ 的直线方程是 $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-4,2,1)$

228. 若直线 $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 2x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ 与 x 轴有交点，则 $D =$ -6.

229. 曲面 $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + z = a$ 的交线在 yoz 平面上的投影方程是__________.

230. 曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{5} = 1 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影柱面方程是__________.

231. 过点 $(0,2,4)$ 且平面 $x + 2z = 1$ 及 $y - 3z = 2$ 都平行的直线是__________.

232. 过球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y = 15$ 上一点 $P(3,3,3)$ 处，球面的切平面方程是__________.

233. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| =$
(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

234. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 向量相互平行，但方向相反，且 $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}| > 0$，则有
(A) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$;　(B) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| > |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$;
(C) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| < |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$;　(D) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

235. 点 $M(1,2,1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离是
(A) 1;　(B) ± 1;　(C) -1;　(D) $\dfrac{1}{3}$.

236. 方程 $x^2 - \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 表示的曲面是
(A) 旋转双曲面;　(B) 双叶双曲面;
(C) 双曲柱面;　(D) 锥面.

237. 方程 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \\ y = 1. \end{cases}$ 表示
(A) 椭球面;　(B) $y = 1$ 平面上的椭圆;
(C) 椭圆柱面;　(D) 椭圆柱面在平面 $y = 0$ 上的投影曲线.