高等数学（二）

线形代数自学指导

一九九五年六月

高等教育自学考试参考

等数学（二）自学指导

第一分册　线性代数

主　编　臧振春　刘泮振

副主编　侯俊林　苏白云　王晓艳

前　言

在改革大潮中涌现出来的全国高等教育自学考试已走过了十几年的光辉历程，以开考本科专业为标志的全国高等教育自学考试已发展到了高深层次的的新阶段。高等数学(二)是本科专业的基础理论课程之一，由于“线性代数部分”概念的抽象性和“概率论与数理统计”部分研究对象和研究方法的特殊性，对学员学习这门学科增加了一定的难度，有一本针对性很强的自学辅导书无疑是广大学员的迫切要求。随着参加本科学习人数的迅速增加，这种需求愈来愈迫切。为此我们编写了这套高等数学(二)自学指导书，诚望能对广大学员有所裨益。

编写这套自学指导书的原则是紧扣全国高等教育自学考试委员会编发的高等数学(二)考试大纲；紧扣自学考试委员会指定的高等数学(二)的推荐教材。在选材上我们结合多年的授课经验和评改历届成人自学考试试卷积累的信息，精选内容，集思广益，写成了这套自学指导书，以期为广大学员学习时解惑排难。

该书每章均分为六大部分。第一部分是基本要求，我们根据高等数学(二)考试大纲的要求归纳出一些具体条款，以利于学员全面理解大纲精神。第二部分是基本内容，这是从指定的高等数学(二)的推荐教材中提炼出来的纲领性知识。不仅在平时学习教材时对学员掌握要点有所帮助，而且在总复习时只要抓住内容就能全面掌握该章的要领。第三部分是例题分析，这是自学指导书的重要部分。我们力求使选出的例题具

有代表性，我们既注意了例题类型的多样性，又注意了例题对知识的覆盖面，同时还兼顾了例题的难易层次。我们希望学员通过对这部分的学习可以达到理解概念、掌握方法、善于分析、灵活解题的目的。第四部分是习题解答，我们对指定性的推荐教材高等数学(二)中的全部习题都作了较详细的解答，以解决学员平时做作业的困难，同时也是复习时必要的参考材料。第五部分是练习题，这部分以标准化试题形式给出了不同类型的标准化练习题，为学员提供了对掌握知识情况进行自我检查，自我评估的标准和条件。第六部分是练习题解答及提示。

书末附有六套往届高等教育自学考试高等数学(二)的试题，并做了较详细的解答，以使学员熟悉高等数学(二)的考试类型，掌握试题的难易程度和了解试题量。

这本自学指导书不仅对各种类型的成人教育本科生有学习指导作用，而且对高等院校在校的本科生学习线性代数和概率论与数理统计也不失为一本较好的辅导材料。

参加本书编写工作的有苏白云，臧振春，刘泮振，王晓艳，侯俊林。本书由臧振春、刘泮振担任主编，侯俊林、苏白云、王晓艳担任副主编，曹守明教授主审了全书。

在本书出版过程中，得到河南财经学院原成人教育学院徐振申副院长的大力支持，在此谨向徐先生表示敬意和谢忱。

由于我们水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，敬请使用此书的学员和同仁不吝赐教。

编　者　　1995 年 3 月

目　　录

第一章 行 列 式

一、基本要求

1、掌握行列式、余子式和代数余子式的概念；

2、掌握行列式的性质以及它们的推论；

3、利用行列式的性质熟练、准确地计算一些比较简单的行列式；

4、能运用克莱姆法则求解简单的线性方程组.

二、基本内容

§1.1 行列式的定义

定义1 定义一阶行列式 $A=|a_{11}|=a_{11}$，设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则定义 n 阶行列式 A 为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$$

其中 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，它表示在 A 中划去元素 a_{ij} 所

在的第 i 行第 j 列所剩下的 $n-1$ 阶行列式。如果我们定义 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为行列式 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式，于是 A 又可以展开为

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

定理 1.1—1. 设 A 是 n 阶行列式，则对任意的 $j(1<j\leqslant n)$，

$$A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

这是 A 按第 j 列的展开式$(1<j\leqslant n)$.

§1.2. 行列式的性质

1. 把行列式 A 的各行都变为列，不改变它们前后的顺序，所得到的新行列式 A' 叫做 A 的转置行列式.

2. 行列式的性质

性质 1. 行列式转置后的值不变，即 $A=A'$.

这个性质说明行列式中行列地位的对称性. 由此可知，行列式中有关行的性质对列也同样成立. 如：任一行列式 A 按列展开与按行展开是一样的. 即

$$A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$$

下面几条性质对于行、列都成立.

性质 2. 用一个数 C 乘行列式的某一行(列)得到的行列

式的值是原行列式值的 C 倍，或者说行列式中某一行的公因子可以提出来.

推论　若行列式中有一行为零，则这个行列式为零.

性质 3. 行列式的两行(列)互换，则行列式的值改变符号.

推论　如果行列式 A 有两行(列)元素相同，则行列式的值等于零.

性质 4. 如果行列式 A 的某两行(列)成比例，则行列式的值等于零.

性质 5. 若行列式中某一行(列)的元素 a_{ij} 都可分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和，即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6. 把行列式 A 的某一行(列)的元素都乘以一个常数加到另一行(列)上去，行列式的值不变.

§1.3. 行列式的计算

计算行列式的一些方法

1、按照某行(列)的展开式来计算行列式;

2、利用行列式的性质使行列式化简或化为上(下)三角形行列式再进行计算;

3、用范德蒙行列式来计算.

注意 1°在行列式的计算中,最常用的是利用行列式的性质和按某行(列)展开行列式,需要熟练地掌握.

2° 对于一般的 n 阶行列式的计算,常常要利用行列式的性质和按某行(列)展开行列式,导出一个递推公式,再化为二阶或三阶行列式,或化为上(下)三角形行列式来计算.

§1.4. 克莱姆法则

定理 1.4—1. 设 A 是一个 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对任意的 i、j,记 A_{ij}是元素 a_{ij}的代数余子式,则

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=A,$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0.\ (i\neq j)$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$. 即行列式按一列展开的公式是

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{si}A_{sj}$$

$$=\begin{cases} A & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j \end{cases}$$

同理,行列式按一行展开的公式是

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}$$

$$=\begin{cases}A & 当\ k=i\\ 0 & 当\ k\neq i\end{cases}$$

定理 1.4—2(克莱姆法则)　如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则这个方程组有解,且解是唯一的,并可表示为

$$x_1=\frac{A_1}{A},x_2=\frac{A_2}{A},\cdots,x_n=\frac{A_n}{A}.$$

其中 A_k 是一个 n 阶行列式,它由 A 去掉第 k 列换上由方程组常数项 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 组成的列而成.

三、例题分析

例 1　设

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

写出 D 按第三行的展开式，并且算出 D 的值。

解 D 按第三行的展开式为

$$D=0\cdot A_{31}+2\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}+0\cdot A_{34}$$

$$=2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=-2\times 98$$

$$=-196.$$

注意　行列式按一行（列）展开的公式可以用来计算 n 阶行列式，但是，直接按这种方法展开，只是把一个 n 阶行列式的计算换成计算 n 个 $n-1$ 阶行列式，计算量不一定减少多少，而只有当行列式中某一行或某一列含有较多的零时，应用这种方法才有真正的意义。因此，如果行列式的行或列没有很多零元素，我们可以先利用行列式的性质，使得某一行或某一列变成只有一、两个非零元素，然后就按这一行（列）展开，这样继续下去，就可把一个较高阶行列式最后变成一、两个二阶行列式．

例 2　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix}3&2&-1&4\\2&-3&5&1\\1&0&-2&3\\5&4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&5&-5\\2&-3&9&-5\\1&0&0&0\\5&4&11&-13\end{vmatrix}$$

(2)

(−3)

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&5&-5\\-3&9&-5\\4&11&-13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5&0\\-3&9&4\\4&11&-2\end{vmatrix}$$

(2)

$$=\begin{vmatrix}2&5&0\\5&31&0\\4&11&-2\end{vmatrix}=(-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&5\\5&31\end{vmatrix}$$

$$=-2(62-25)=-74$$

注意　把哪一行或哪一列变成只有一个非零元素呢？为了尽量避免分数运算，应当尽可能选择 1 或 −1 所在的行或列．若行列式所有的元素都不是 1 或 −1，那么如何计算才可以避免分数运算呢？此时可将行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)，使得该行(列)上的元素产生 1 或 −1，然后选择这一行或 1，−1 所在的列展开．

例 3　计算行列式

$$A=\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}.$$

解　先将第一行的公因子 3 提出来

$$\begin{vmatrix}3&6&12\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&2&4\\2&-3&0\\5&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}(-2)(-5)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$
=3\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -7 & -8\\ 0 & -9 & -18\end{vmatrix}
$$

$$
=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-7 & -8\\ -9 & -18\end{vmatrix}
$$

$$
=3\times(7\times18-72)=3\times54=162
$$

上面介绍了行列式的计算方法，在实际运算过程中可不拘泥于上述步骤，应根据不同的情况灵活运用行列式的性质，从而能较快地算出行列式的值，其原则是尽可能使行列式的元素变为零．

例 4 已知 x 的一次多项式

$$
|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ x & -1 & -1 & 1\end{vmatrix},
$$

求该多项式的根．

解

$$
\begin{array}{r}(1)\\(1)\\(1)\\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ x & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ x+3 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.
$$

显然 $x=-3$ 时，$|A|=0$．故 $x=-3$ 是该一次多项式的根．

例 5. 设

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & x^2-2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & x^2+1 & 1\end{vmatrix}$$

求 $f(x)=0$ 的根.

解

$$(-2)(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & x^2-2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & x^2+1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & x^2-2\\ 0 & 0 & 4-x^2\\ 0 & x^2-1 & 5-2x^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 4-x^2\\ x^2-1 & 5-2x^2\end{vmatrix}=-(4-x^2)(x^2-1)=0$$

故 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$.

例 6 已知

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & x & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

求 A 中 x 的一次项的系数.

解

$$(-1)(-1)(1)\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & x & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & x-1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=2[2+2(x-1)]=4x \quad .$$

故 x 的一次项的系数是 4.

注意 一个多项式用一个行列式表示时，如果要求其根或某次项的系数，一般的办法是先将行列式展开即可求得．

例 7. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix} .$$

解 这个行列式的特点是第 i 行第 j 列的元素与第 j 行第 i 列元素互为相反数，即 $a_{ij}=-a_{ji}$. 具有这种特点的行列式称为反对称行列式．

$$\text{设}\quad D=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_1 & 0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_2 & b_1 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ a_3 & b_2 & c_1 & 0 & -d \\ a_4 & b_3 & c_2 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_2 & -b_1 & 0 & c_1 & c_2 \\ -a_3 & -b_2 & -c_1 & 0 & d \\ -a_4 & -b_3 & -c_2 & -d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5D=-D.$$

于是 $2D=0$,所以 $D=0$.

用类似方法可以证明:奇数阶反对称行列式等于零.

例 8. 已知 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

求 A.

解

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$