

中国科学院原子能研究所

# 在固定步长下数值解常微分方程組 的Runge-Kutta方法程序

宋 威 华文賢

一九六三年二月

# 在固定步长下数值解常微分方程組 的Runge-Kutta方法程序

## 一、問題：給定常微分方程組

$$y'_i = f_i(y_1, \dots, y_n) \quad y_i(x_0) = y_{i0} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

其中  $n$  为方程組的数目，包含方程  $\frac{dx}{dx} = 1$  在內，我們現拟按 Runge-Kutta 方法求解，求解公式为

$$\begin{aligned} y_{k+1,i} &= y_{ki} + h \left( \frac{1}{6} k_{1i} + \frac{1}{3} k_{2i} + \frac{1}{3} k_{3i} + \frac{1}{6} k_{4i} \right) \\ k_{1i} &= f_i(y_{k1}, \dots, y_{kn}) \\ k_{2i} &= f_i \left( y_{k1} + \frac{h}{2}, y_{k2} + \frac{hk_{11}}{2}, \dots, y_{kn} + \frac{hk_{1n}}{2} \right) \\ k_{3i} &= f_i \left( y_{k1} + \frac{h}{2}, y_{k2} + \frac{hk_{21}}{2}, \dots, y_{kn} + \frac{hk_{2n}}{2} \right) \\ k_{4i} &= f_i(y_{k1} + h, y_{k2} + hk_{31}, \dots, y_{kn} + hk_{3n}) \end{aligned}$$

其中  $h$  为积分步长； $n$  为方程的个数； $y$  的第一附标表示点的号碼；第二个附标表示函数的号碼。

## 二、单元 的 分 配

計算需用四組单元，安排如下(令它們从  $a+1$  开始)。

- (1)  $a+1 \div a+n$  (放  $y_{ki}$ ，前一点的积分結果值)
- (2)  $a+n+1 \div a+2n$  (放  $y_{k+i,j}$ ，积分結果)
- (3)  $a+2n+1 \div a+3n$  (放計算右边部分时的变量)
- (4)  $a+3n+1 \div a+4n$  (放計算右边部分的結果)

## 三、使 用 說 明

本程序仅仅为实现解一阶常微分方程組的 Runge-Kutta 方法，对于計算方程的右边部分的子程序，以及为实现对結果的傳送存儲、打印、下一步計算、参数的改变等等的处理子程序，依赖于具体的方程組和要求而定，須自行編制。假定它們的第一条指令的地址碼分别为  $N_1$  和  $N_2$ 。在編制这二子程序时必须注意下面各点：

- (1) 計算右边部份的变量需直接用第三組单元( $a+2n+1 \div a+3n$ )
- (2) 右边部分計算的結果放在第四組单元( $a+3n+1 \div a+4n$ )

(3) 在計算右边部分子程序的后面，必須置放指令

|     |   |   |      |
|-----|---|---|------|
| 011 | — | — | 0034 |
|-----|---|---|------|

(4) 在处理結果子程序的恰当位置，必須置放指令

|     |   |   |      |
|-----|---|---|------|
| 011 | — | — | 0023 |
|-----|---|---|------|

(5) 积分結果放在第二組单元 ( $a+n+1 \div a+2n$ )

(6) 本程序与主程序接通有如下指令：

|           |                                                              |          |   |      |
|-----------|--------------------------------------------------------------|----------|---|------|
| $K_1$     | $10\bar{2}$                                                  | $\alpha$ | — | 0049 |
| $K_2$     | $01\bar{0}$                                                  | —        | — | 0016 |
| $K_3$     | $00\bar{2}$                                                  | $\beta$  | — | 0028 |
| $K_4$     | $10\bar{2}$                                                  | $\gamma$ | — | 0033 |
| $K_5$     | $10\bar{2}$                                                  | $\delta$ | — | 0048 |
| $K_6$     | 送初始值 $y_{10}, \dots, y_{n0}$<br>至第一組单元<br>( $a+1 \div a+n$ ) |          |   |      |
| $\vdots$  |                                                              |          |   |      |
| $K_n$     |                                                              |          |   |      |
| $K_{n+1}$ | 011                                                          | —        | — | 0023 |

其中  $\alpha$ ：

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| — | a | — | n |
|---|---|---|---|

造可变指令的初始信息； $\beta$ ：放积分步长  $h$  的单元。

$\gamma$ ：

|     |   |   |       |
|-----|---|---|-------|
| 011 | — | — | $N_1$ |
|-----|---|---|-------|

轉移去計算右边部分的指令

$\delta$ ：

|     |   |   |       |
|-----|---|---|-------|
| 011 | — | — | $N_2$ |
|-----|---|---|-------|

轉移到处理結果程序的指令

(7) 方程个数  $n$  包含方程  $\frac{dx}{dx} = 1$ ，即变量  $x$  为此方程的积分結果，而不需每次加步长改变自变量。

(8) 显然，单元碼  $a+1$ ， $N_1$ ， $N_2$  依赖于給定的方程組和具体要求为轉移， $\alpha$ ， $\gamma$ ， $\delta$  作为輔助指令处理， $\beta$  需放在常数单元中。

#### 四、程序占用单元 0010÷0049

(1) 0010~0015 为程序需用的地址改变常数和运算所用的常数。

(2) 0016~0028 为造可变指令用，它們执行一次后，构成可变指令，不自行恢复。0016~0010 以后作为工作单元用。这部分程序依赖于  $n$  和  $a$ 。如果改变方程个数  $n$  和单元  $a$  的编号，程序需重新輸入(或从鼓里取出)。

(3) 0029~0021 实现从一組向另一組傳送。

(4) 0022 返回中央。

(5) 0023~0025  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$  組。

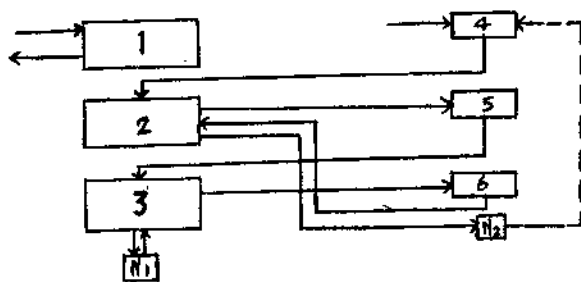
(6) 0030~0045 按 Runge-Kutta 方法积分，其中 0033 轉向計算右边部分。

(7) 0046~0047  $2 \Rightarrow 1$  組。

(8) 0048 轉向“处理結果”程序。

(9) 0049 放初始信息。

## 五、框 图



## 說 明

(1) 造可变指令，依賴  $n$  和  $a$ 。

(2) 實現从一組向另一組傳送。

(3) 按 Runge-Kutta 方法积分。

(4) 傳送  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$  組。

(5) 轉向3)积分。

(6) 傳送  $2 \Rightarrow 1$ 。

$N_1$ ) 轉向計算右边部分程序，后返回。

$N_2$ ) 轉向“处理結果”程序，后返回4)。

附注：本程序用中国科学院計算技术研究所 104 机的指令系統。

|               |              |               |               |               |                                   |
|---------------|--------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------------------|
| 0010          |              | 0001          |               | 0001          |                                   |
| 1             |              | 0001          |               |               |                                   |
| 2             |              |               | 0001          |               |                                   |
| 3             | 100          |               |               |               |                                   |
| 4             | 002          | 0300          |               |               | 3                                 |
| 5             | 003          | 0300          |               |               | 6                                 |
| 6             | 111          | 0049          | 0056          | 0016          |                                   |
| 7             | 111          | 0016          | 0016          | 0017          |                                   |
| 8             | 012          | 0016          | 0017          | 0018          |                                   |
| 9             | 111          | 0049          | 0016          | 0019          |                                   |
| $\bar{0}$     | 011          | 0019          | 0056          | 001 $\bar{0}$ |                                   |
| $\bar{1}$     | 012          | 0019          | 001 $\bar{0}$ | 001 $\bar{1}$ |                                   |
| $\bar{2}$     | 011          | 0019          | 0001          | 001 $\bar{2}$ |                                   |
| $\bar{3}$     | 012          | 0019          | 001 $\bar{2}$ | 001 $\bar{3}$ |                                   |
| $\bar{4}$     | 012          | 0017          | 001 $\bar{3}$ | 001 $\bar{4}$ |                                   |
| $\bar{5}$     | 012          | 0018          | 001 $\bar{1}$ | 001 $\bar{5}$ |                                   |
| 0020          | 012          | 0018          | 001 $\bar{0}$ | 0020          |                                   |
| 1             | 012          | 0018          | 0019          | 0021          |                                   |
| 2             | 012          | 001 $\bar{1}$ | 0021          | 0022          |                                   |
| 3             | 012          | 001 $\bar{0}$ | 0020          | 0023          |                                   |
| 4             | 012          | 003 $\bar{3}$ | 0023          | 0024          |                                   |
| 5             | 012          | 003 $\bar{3}$ | 001 $\bar{5}$ | 0025          |                                   |
| 6             | 012          | 0025          | 001 $\bar{1}$ | 0026          |                                   |
| 7             | 012          | 003 $\bar{2}$ | 0014          | 0027          |                                   |
| 8             | 019          |               |               |               | $h$                               |
| 9             | 012          | 002 $\bar{0}$ | 0010          | 002 $\bar{0}$ |                                   |
| $\bar{0}$     |              |               |               |               |                                   |
| $\bar{1}$     | 014          | 002 $\bar{0}$ | 0016          | 0029          |                                   |
| 002 $\bar{2}$ | 019          |               |               |               |                                   |
| $\bar{3}$     |              | 0020          |               | 002 $\bar{0}$ | } $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ |
| $\bar{4}$     |              | 0022          |               | 0016          |                                   |
| $\bar{5}$     | 01 $\bar{0}$ |               |               | 0029          |                                   |
| 0030          | 00 $\bar{3}$ | 0015          |               | 0018          |                                   |

|  |      |  |     |
|--|------|--|-----|
|  | a    |  | a+n |
|  | a+n  |  | a   |
|  | a+2n |  | a+n |

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
| 001 | a    | 0017 | a+2n |
| 001 | a+n  | 0017 | a+n  |
| 001 | a+2n | 0017 | a+2n |
| 003 | a+3n | 0019 | 0017 |

|      |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
|------|-----|------|----------------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--|--|----------------|--|---|--|---|
| 1    | 007 | 0028 | 0035           | 0010 | <table><tr><td>011</td><td></td><td></td><td>N<sub>1</sub></td></tr></table>                                                                   | 011 |  |  | N <sub>1</sub> |  |   |  |   |
| 011  |     |      | N <sub>1</sub> |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 2    | 004 | 0028 | 0015           | 0019 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 3    |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 4    | 001 | 0018 | 0014           | 0018 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 5    |     | 0027 |                | 0032 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 6    |     | 0025 |                | 0033 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 7    |     | 0024 |                | 0035 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 8    | 012 | 0032 | 0011           | 0032 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 9    | 012 | 0033 | 0010           | 0033 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 0    | 012 | 0035 | 0010           | 0035 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 1    | 012 | 0032 | 0012           | 0034 | <div>} 2 ⇒ 1</div> <table><tr><td>011</td><td></td><td></td><td>N<sub>2</sub></td></tr><tr><td></td><td>a</td><td></td><td>n</td></tr></table> | 011 |  |  | N <sub>2</sub> |  | a |  | n |
| 011  |     |      | N <sub>2</sub> |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
|      | a   |      | n              |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 2    | 003 |      | 0019           | 0017 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 3    | 001 |      | 0017           |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 4    |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 5    |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 0040 | 114 | 0033 | 0026           | 0038 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 1    | 004 | 0028 | 0014           | 0019 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 2    | 014 | 0018 | 0013           | 0033 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 3    | 002 | 0028 |                | 0010 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 4    | 014 | 0018 | 0014           | 0033 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 5    | 114 | 0018 | 0015           | 0032 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 6    |     | 0021 |                | 0020 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 7    | 010 |      |                | 0029 |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 0048 |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |
| 9    |     |      |                |      |                                                                                                                                                |     |  |  |                |  |   |  |   |

} 2 ⇒ 1