# 中等师范学校数学

# 教学参考书

## 代数与初等函数

## 第二册

（试用本）



中师数学教学参考资料编写组

一九八三年八月　　　　　　　　　　河北昌黎举办了全国中等师范学校数学教材研习班，参加会议的有全国二十九个省、市，自治区所属部分师范学校的100多位数学老师代表。与会同志一致希望能有一套与全国中师数学课本配套的教学参考资材，不但便于教学进度，目的要求接近于统一，又便于教师根据师范特点完成师范数学教学任务。为此，在与会领导的同意支持下，我们组织了安徽、湖南、广东、黑龙江、河北、福建等省的部分同志分别编写各册教材的教学参考书、供各校使用。

本册《教参》系由湖南周华辅、夏炎炎，邓国扬，丁振华根据全国中师数学《代数与初等函数》第二册（试用本）编写的，在使用过程中请注意以下各点：

1、在教学实践中，加强学生的思想教育，尤其是专业思想教育，这是教学改革，提高质量，培养合格的师范生的基本保证。

2、在教学实践中，要立足于改、勇于创新，要以科学态度，教育规律办事，在完成数学基础知识教学任务的同时，要突出师范特点在“说”“写”“画”“算”“制教具”等教学基本功方面，对学生加强训练。



由于我们水平不高，缺乏经验，编写时间又比较仓促，书中一定会有不少缺点和错误，请同志们在使用中提出宝贵意见。

**中师数学教学参考资料编写组**

**一九八三年十月**

# 目　录

# 第六章　线性方程组

## Ⅰ、目的要求

1、使学生理解二阶、三阶、$n$阶行列式的概念，会用对角线法则熟练的计算二阶和三阶行列式。

2、使学生准确地掌握行列式的性质，包括按一行（列）展开的性质，并能较灵活地运用这些性质来化简和计算三阶行列式，会计算四阶行列式，及特殊的$n$阶行列式。

3、使学生能够正确地运用行列式解二元、三元线性方程组，并了解这些线性方程组解的各种情况。了解四元线性方程组的行列式解法，及$n$元线性方程组的解法——克莱姆法则。

4、培养学生一定的计算能力和一定的逻辑思维能力。

## Ⅱ、课时安排

本章教学约需23课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1　二阶行列式……………………………… 约1课时

6.2　{ 二元线性方程组………………………… 约2课时
　　　{ 练习课

6.3　三阶行列式……………………………… 约1课时

6.4　三阶行列式的性质……………………… 约5课时

6.5　按一行（或一列）展开三阶行列或……… 约2课时

## Ⅲ 教材说明

本章教材的主要内容是：二阶行列式、二元线性方程组，三阶行列式、行列式的性质和展开定整、三元线性方程组解的讨论，$n$阶行列式、$n$元线性方程组解的讨论和克莱姆法则．这些内容在文化大革命前的中师课本中是没有的，这次将它增加进来，是与本章教材的作用分不开的．

1、本章教材的作用

根据中师教材的“知识面要广，难度要适当”的特点，随着科学技术的不断发展和更新，中师数学不仅要保留初等数学的一些知识，还应该增加一些为高等数学奠定基础的知识，更应该注意现代数学思想方法的训练和能力的培养．行列式和线性方程组的学习正符合这一要求，它既能巩固和加强代数的训练，同时又可以在一定程度上启发学生观察和思考，在思维方法和逻辑推理的训练方面进行一些初步的接触和尝试．如克莱姆法则的导出和线性方程组解的一般讨

论，既在理论上和方法上充实并总结了在初中讲过的二元、三元线性方程组的求解问题，同时又提出了从低阶到高阶，从一元向$n$元推广的逻辑思维方法；另外还介绍了一种新的数学工具——行列式。

行列式不同于以前学过的代数式，它是依赖于变元排列位置的一种特殊的代数式。引入行列式后，容易看出线性方程组的解完全依赖于这个方程组本身系数之间的关系。这种按照排列构式某种数学工具的思考方法，是以后进一步学习向量、矩阵和线性空间等知识所必须具备的。其次，行列式作为一种数学工具，有它特殊的作用，它不但可用于线性方程组的求解，在考虑平面上直线间的关系、点与点的相关位置、三维空间平面之间的关系、多个点组的相关位置等时，用行列式来表示求得的结果，往往具有简明的特点。因此，它不但可以用于计算，而且利用它来记忆公式，是非常方便的。

至于线性方程组，随着电子计算机的迅速发展，它的地位越来越重要，很多实际问题，在提出数学模型后，往往最后化为$n$元线性方程组，再通过电子计算机加以解决，例如，用最小二乘法处理测量结果时，利用网格法（即差分法）解偏微分方程时，都会得到线性方程组；而线性规划问题，更是大量的$n$元线性方程组的问题。值得注意的是，$n$元线性方程组的解法可以用二元、三元线性方程组为模型，也就是说，二元、三元线性方程组按照某种确定程序的解法可以推广到$n$元。

2．本章教材的编排

本章教材分为三部分。第一部分是由解二元线性方程组导出二阶行列式，再用二阶行列式讨论二元线性方程组的

解。第二部分是三阶行列式的定义、性质和展开，用三阶行列式讨论三元线性方程组的解以及三元齐次线性方程组，其中，三元齐次线性方程组为选学内容。第三部分是$n$阶行列式，用$n$阶行列式讨论$n$元线性方程组，均以四阶行列式和四元线性方程组为例加以说明。

之所以这样编排，觉得有如下好处：

第一，比起其它教材来显得相对完整、系统一些，就行列式来说，从二阶、三阶到$n$阶；就线性方程组来说，从二元、三元到$n$元，有一个全貌，不缺什么内容。这样，就把线性代数中关于行列式和线性方程组的最基本的内容，尽可能简要而浅显地反映在这一章中。

第二，突出了行列式的性质，在三部分中都是先研究行列式的概念和性质，再研究线性方程组。教材中以讨论三阶行列式为重点，但是三阶行列式的性质对二阶行列式、对$n$阶行列式是否适应，教材作了交待。在第一部分教材中，讲完二阶行列式的概念与计算后，以例题与练习题的形式，证明了二阶行列式的性质，为讲三阶行列式的性质作好了准备，当讲完三阶行列式的七条性质后，又作了申明："容易证明，三阶行列式的上述性质，对于二阶行列式同样成立。"在第三部分教材中，讲完$n$阶行列式的定义后，又指出三阶行列式的性质和展开定理在$n$阶行列式中也都成立，但没有具体证明，给学生留有一定思考余地，蕴含了一些值得进一步探讨的问题。这样前后呼应，不仅突出了行列式的性质，而且在归纳，演绎的逻辑思维方法训练上为学生提供了示范。

第三、行列式与线性方程组联系的比较紧。不是讲了很多行列式的性质后，再去讨论线性方程组的解法，而是把行

列式与线性方程组对照着讲。把二阶行列式与二元线性方程组、三阶行列式与三元线性方程组联系起来，把$n$阶行列式与$n$元线性方程组联系起来，便于比较分析，看到了互相联系、互相为用的作用。

3．本章教材的重点、难点和关键

本章重点是三阶行列式的性质和展开。

本章难点是线性方程组解的各种情况的讨论，特别是对系数行列式$D=0$时的研究。为了解决这一难点，教材注意到学生的实际情况，适可而止。教学时不必超出教材求深求全。

本章关键是行列式的性质和展开定理的证明与应用。

本章教材简明易懂，对计算能力的要求不高，但根据师范的情况，证明题增多。教材配备的练习、习题较多，一方面是巩固本章学过的知识，另一方面是复习前面学过的知识，还要注意逻辑思维方法的训练。因此，要求老师精讲，尽可能让学生多练。对于一些难度较大的综合题（包括证明题与应用题）教师可以加以提示和辅导，帮助学生总结解题、证题规律，培养他们分析问题、解决问题的能力以及逻辑推理能力。

编写时，注意了以下几点：

（1）着重于基础知识的掌握和基本方法的应用，尽量设法分散难点。

例如行列式的定义，我们先从二元线性方程组讲起，引入二阶行列式，然后直接定义三阶行列式，讲了三阶行列式的展开定理后，就可以用低阶行列式来定义高阶行列式，由此可将这一方法推广到定义$n$阶行列式。这样，就可以不采用严格定义行列式的办法，同时又避开了有关奇偶排列或奇

偶置换等对中师学生来讲比较难懂的内容。在介绍线性方程组时，主要讲二元和三元线性方程组，而且只考虑方程个数和未知数个数相同的情况，避开了“矩阵和秩”等较多涉及高等数学内容的概念。经过精选后编入教材的内容，由于注意分散难点，学生是比较容易接受的。

又如从二阶行列式开始，到三阶行列式、$n$阶行列式，均使用了两个下标，如$a_{ij}$表示第$i$行第$j$列的元素。这样做前后比较统一，有利于将知识条理化，也比较方便。很多书上都是在代数余子式那儿引入两个下标，这样学生不大习惯，初次相遇觉得难于理解；加之，余子式、代数余子式都是较难理解的，难点集中，则造成学生学习上的困难。我们从二阶行列式开始就引入两个下标，无疑将难点分散了。

（2）突出重点和使教材具有一定弹性结合起来。

本章以三阶行列式的性质和展开定理为主线，配合二、三元线性方程组解的讨论和用行列式求解。这些内容都是需要很好掌握的（关于解的讨论，由于没有引入矩阵的秩或与之等价的概念，不可能从理论上讲得很严格，只要求学生知道解的几种情况以及线性方程组有唯一解的（充要）条件是系数行列式不等于零就可以了）。因此，在教材编写和习题配备上都以这些内容为主，特别是行列式的性质和展开定理，虽然教材是对三阶行列式来证明的，但这些定理对任意阶行列式都成立，具有普遍意义，所以需要特别强调，要求学生通过反复练习，熟练掌握，逐步做到灵活运用。以保证重点，保证基本训练。但是，在讲了三元线性方程组以后，还简略地讨论了齐次线性方程组解的几种情况，证明了齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零（关于“充要条件”前面没学过，教材在处理上则用与之等价的正

定理和逆定理来代替），作为选学内容，供教学进度较快、学生理解能力较强的班级选讲（如果课时较紧，学生接受有困难，这部分内容可以不学）。

（3）抓住关键，注意理论证明，使学生既知其然，又知其所以然，搞清楚知识的来龙去脉。

在不影响学生接受的前提下，尽可能采用带有普遍性的证明方法，使学生既可接受到一定的代数训练，又不局限于对某一具体问题的证明的了解。例如推导克莱姆法则可以有不同的方法。如果仅仅为了表示三元线性方程组的解，一般课本都是利用已学过的解数字系数的三元线性方程组的方法——加减消元法，得出方程组的解来，再把它写成用三阶行列式来表示的形式。但是这种方法有局限性，用它来解元数更多的线性方程组就非常困难。为了既能使学生比较容易地接受和掌握三元线性方程组求解的克莱姆法则，同时又能把这种方法直接推广到四元、五元以至$n$元线性方程组，我们没有从熟知的消元法着手，而是利用行列式的元素的代数余子式和展开定理及其推论来得出线性方程组的解的公式的。这一证明方法既能使学生对行列式的元素的代数余子式的概念和展开定理具有一定的了解并逐步掌握它的用法，从而加深对行列式的认识；同时由于这一方法带有普遍性，可以用它类似地得出一般的$n$元线性方程组解的公式，这也就是克莱姆法则的重要意义，即在理论上解决了线性方程组有唯一解的的充要条件。这一处理的出发点和它的作用，在教材中并没有详细讲，也不要求学生现在就了解到；但教师在讲解时，应该掌握这一思路，否则对教材内容的具体安排就会不理解。

至于教材的详细情况，下面我们分单元和节加以说明。

## 一、二元线性方程组和二阶行列式

本单元教材分为两节，第一节是“二阶行列式”，分为两个内容：用加减消元法得出二元线性方程组的求解公式；引入二阶行列式的概念，介绍了对角线法则。第二节是“二元线性方程组”，讨论二元线性方程组解的各种情况。

1．二阶行列式是本单元教材的关键。应当在用加减消元法导出二元线性方程组解的公式后，指出这个求解公式太繁，不易记忆，从而引入二阶行列式的定义和展开。然后再讲述克莱姆※法则。即二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

当$D\neq 0$时有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \end{cases}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

2．结合具体例子介绍对角线法则以后，可让学生自己计算第6.1节的例1、例2和例3，然后与课本中的解题过程相对照，巩固对角线法则。

第6.1节的例4及练习里的证明题，即二阶行列式的性质，它是为讲三阶行列式的性质作准备的，要给予重视。

---

※克莱姆（G. Cramer，1704—1752年）是法国数学家。

3．在得到公式（ 9 ）后，紧接着让学生先自己用行列式来解第6.2节的例1（题由教师抄在黑板上），解后再与书上过程进行核对，这样便于针对学生可能出现的错误，强调两条：一是公式（ 9 ）中的$D$，$D_1$，$D_2$，是由第6，1节教材里方程组的标准形式（ I ）得来的，因此，在计算$D$，$D_1$，$D_2$时要先把所给方程组改写成如（ I ）的标准型；二是要注意$x_1$，$x_2$的系数和常数项都应包括它们前面所带的符号，不要搞错。

4、用二阶行列式研究二元线性方程组解的各种情况，是本单元教材的难点。这有两个原因：一因系数是字母，较为抽象；一因情况有多种，不易考虑全面。因此首先要针对字母系数的一般性，说明需要按不同情况进行讨论；其次要叙述清楚讨论的层次；三是要说明证明的思路和每一步的根据。

教完这一段后，要学生回忆在解析几何中讨论的两直线的位置关系，这样可以加强数与形的联系（由于学生没有学过空间解析几何，三元的情况就无法这样处理），并在课内做习题一第六题，以加深学生对代数式与它的几何图形间的联系的认识。

这里要向教师补充说明一点。线性方程组的字母系数一般是没有什么限制的。但在这里讨论时，实际上把$a_{11}$，$a_{12}$，$a_{21}$，$a_{22}$同时为零的情况排斥在外，如果包括这一情况，那么当$D=D_1=D_2=0$时，二元线性方程组也可能没有解。如

$$\begin{cases} 0\cdot x_1+0\cdot x_2=1, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2=2. \end{cases}$$

5、用克莱姆法则解二元线性方程组时，一定要先算$D$，

只有在$D \neq 0$时，才可用$x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$来解。

6、$D=D_1=D_2=0$时二元线性方程组有元穷多解，它们可以用含一个参变数$t$的形式表示，这一表示形式不作为对学生的一般要求。但如果选学第6.7节，为后面作一些准备。

## 二、三元线性方程组和三阶行列式

本单元的任务是建立三阶行列式的概念，着重讨论行列式的性质及降阶展开法，给出三元线性方程组的行列式解法——克莱姆法则，研究三元线性方程组和三元齐次线性方程组解的情况。

### 6.3 三阶行列式

1、三阶行列式是二阶行列式的扩展，也是研究$n$阶行列式的基础。在开始讲解时，可以回过头先就二阶行列式来对行列式这一特殊形式的代数式进行分析。说明什么是行列式的行、列、元素，什么叫行列式的展开，什么是两个行列式相等以及行列式实际上是多项式的另一种表现形式等。在学生对二阶行列式的概念有比较明确的认识以后，再引入三阶行列式的概念。

本节在直接定义了三接行列式后，介绍了对角线法则。对角线法则是本节教材的重点，要通过反复练习使学生牢固地掌握。也可对比二阶行列式分析三阶行列式的展开式的特点：（1）共六项，即$1\times2\times3$项（二阶的是$1\times2$项）；（2）每项都是不同行不同列的三个元素的乘积（同二阶的）；（3）有三个正项和三个负项。接着，再启发学

生考虑每项的符号（并与二阶的作对比），从而引入对角线法则。

在运用对角线法则时，符号是关键，要强调“实正虚负”，即实线上三元素之积取正号，虚线上三元素之积取负号。同时，在三元素相乘时，又要注意有理数运算时的符号规则。否则，就会错漏百出。因此，在开始计算时，就要严格要求学生认真、细致，形成良好的学风。这一点对学好本节、本章都是有好处的。

2、教材对三阶行列式是先直接给出定义，重点研究它的性质和展开，然后用它解线性方程组的。这样的处理较为简便，更重要的是为了突出6.6节中导出线性方程组解的公式的一般方法。另一种作法是采取与二阶行列式同样的办法引入，它的好处是突出了引入三阶行列式的目的性。

采取后一种作法时，如果处理得好，且学生接受能力强，可以把它的结果和第6.6节的结果进行比较，说明两者都可得出三元线性方程组解的公式，然后进一步说明第6.6节中的方法的一般意义。但如果不能给予充分说明，则有可能反而在学生思想中引起混乱，认为没有必要再讲第6.6节中的方法。因此，我们建议，一般就按书上的讲法。特殊有条件的，也可以采取后一种作法。即在这节的开始，先让学生解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, & (2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. & (3) \end{cases}$$

把方程（2），（3）中的$x_1$项移到右边去，用解二元一次方程组的办法，解得

$$(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})x_2=(b_2a_{33}-b_3a_{23})-$$

$-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{13})x_1$，……（4）

$(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})x_3=(b_3a_{22}-b_2a_{32})-$

$-(a_{31}a_{22}-a_{21}a_{32})x_1$，……（5）

以$a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$乘方程（1），以$-a_{12}$乘方程（4），以$-a_{13}$乘方程（5），相加，移项得

$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-$
$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})x_1=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}++$
$b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}$。

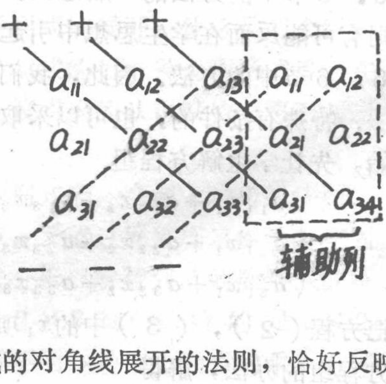
同理可得

$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-$
$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})x_2=a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+$
$+a_{31}b_1a_{23}-a_{31}b_2a_{13}-a_{21}b_1a_{33}-a_{11}b_3a_{23}$。

$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-$
$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23})x_3=a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+$
$+a_{31}a_{12}b_2-a_{31}a_{22}b_1-a_{21}a_{12}b_3-a_{11}a_{32}b_2$。

于是，类似二阶行列式，引入$D$，$D_1$，$D_2$，$D_3$。

3、三阶行列式展开的法则，还有其它几种形式，但在实质上是一致的。下面的一种也是常用的（图6—1）。




应当注意，三阶行列式的对角线展开的法则，恰好反映了展开式的构成特点（实线上三个元素的积取正号，虚线上

三个元素的积取负号，然后相加便是行列式的展开式），是符合定义的，而且它是帮助我们记忆行列式展开的方法。

## 6.4　三阶行列式的性质

这一节是本章的重点之一。行列式是依赖于变元排列位置的一种特殊的代数式，是一种新的数学工具，有它重要的应用。行列式作为代数式，同样有化简、求值、变形等问题，要学好它、掌握它，仅仅知道用对角线法则展开三阶行列式是不够的，应该进一步从行列式本身的形式而不是通过展开来研究它所具有的一些性质。这些性质不但适用于三阶行列式，也同样适用于其他阶数的行列式，本节只就三阶行列式来证明这些性质。

1、本节讲述了行列式的七个性质和两个推论。它们的证明都不难。用对角线展开法证明性质1，2，4，6后，其他都可以推出来。教学时，关键在于讲清性质的条件和结论。可以让学生自己来证，以加深印象。

2、为了便于记忆，可把性质1称为“行列互换，其值不变”。它表达了行列式中行与列的对等性质。即在行列式中行与列的地位是相等的。性质2可简称为“两行（列）对调，改变符号”，它指出行列式具有反对称性。在教学这两个性质时，要通过条件和结论的对比，指出它们的区别。在讲解性质1时，要强调“各行”、各列”，而不仅是第一行与相应的某一列互换。在教性质2时，要强调“两行”（或二列）对调，而不是调动某一行（或一列），避免得出

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} a_{11} a_{12} \\ a_{23} a_{21} a_{22} \\ a_{33} a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$$

之类的错误。

性质3实际上是性质2的推论。

性质4及其推论比较常用，教学时要强调。

性质5可由性质3、性质4的推论1推出，实际应用时，也可以用性质3、性质4的推论1代替它。

3、性质7主要是根据性质6来证明的，但比性质6更常用。在运用性质7时，要特别注意被乘的行（或列）不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ ma_{11}+a_{31} & ma_{12}+a_{32} & ma_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

其中，第一行分别乘以$k$，$m$加到第二行、第三行、行列式的值不变。但

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{一般不等于} \begin{vmatrix} ka_{21}+a_{11} & ka_{22}+a_{12} & ka_{23}+a_{13} \\ ma_{11}+a_{21} & ma_{12}+a_{22} & ma_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

在讲述了上述各性质后，可以用例4、例5来加以巩固，并分析产生错误的原因。

4、本节的性质较多，要让学生在理解的基础上加以记忆，加强练习，从而能够熟练的运用性质对行列式进行化简。特别要注意以下几点：

（1）提出行（或列）的公因式，使行列式的各元素尽量简单；

（2）对于两行（或两列）相同或者成比例的行列式，可以立即确定它们的值为零，不必展开计算；

（3）利用性质7有时可以把行列式化成两行（或两列）相等或者成比例。有时可以消元，把某行（或某列）化