高等代数一题多解选

下册

魏献祝 编

晋江地区师范大专班

目　　录

五 二 次 型

1．用非退化线性 替换化二次型$x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+12x_2x_3+19x_3^2$为标准形。

解一：矩阵经下列一种变换皆称合同变换：

（1）数域上不为0的数k乘矩阵的i行后，又以k乘以矩阵的i列。

（2）对调矩阵的i行与j行后，又对调矩阵的i列与j列。

（3）矩阵j行的k倍加到i行后，又把矩阵j列的k倍加到i列。

不难证明矩阵A经合同变换后的矩阵与A合同，并把合同变换记为“$\cong$”，则

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&6\\2&6&19\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&4\\0&4&15\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&4&15\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

因此所求的标准 形为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$。

解二：配方法。

$$x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+12x_2x_3+19x_3^2$$

$$=x_1^2+2x_1(x_2+2x_3)+(x_2+2x_3)^2$$

$$-(x_2+2x_3)^2+2x_2^2+12x_2x_3+19x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2+x_2^2+8x_2x_3+15x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2+4x_3)^2-x_3^2$$

$$=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

这里$y_1=x_1+x_2+2x_3$，$y_2=x_2+4x_3$，$y_3=x_3$。

解三：根据书中202面$a_{11}\neq 0$情况可令

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2-2y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

则原二次型$=(y_1-y_2-2y_3)^2+2(y_1-y_2-2y_3)y_2+4(y_1-y_2-2y_3)y_3+2y_2^2+12y_2y_3+19y_3^2$

$$=y_1^2+y_2^2+8y_2y_3+15y_3^2$$

$$=y_1^2+(y_2+4y_3)^2-y_3^2$$

$$=z_1^2+z_2^2-z_3^2$$

其中$z_1=y_1$，$z_2=y_2+4y_3$，$z_3=y_3$。

解四：根据书中206面$a_{11}\neq 0$情况可令

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$C_1'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$A\cong C_1'AC_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&4&15\end{pmatrix}$$

再令

$$C_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故

$$A\cong(C_1C_2)'AC_1C_2=C_2'\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\\0&4&15\end{pmatrix}C_2$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

因此二次型的标准 形为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$。

2．用非退化线性替换化二次型$8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$为标准形。

解一：将n阶对称方阵A按前k行及前k列分块：

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}'&A_{22}\end{pmatrix}$$

于是A_{11}及A_{22}都是对称方阵，若A_{11}可逆，则

$$\begin{pmatrix}E_k&0\\-A'_{12}A_{11}^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}'&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_k&0\\-A_{12}'A_{11}^{-1}&E\end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}-A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\overset{记}{=}B$$

因此$A\cong B$。

由题设知

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&4\\0&0&1&4\\0&1&0&1\\4&4&1&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}0&4&4&1\\4&0&0&0\\4&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

取$A_{11}=\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}$，$A_{12}=\begin{pmatrix}4&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A_{22}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

由于$A_{11}^{-1}=\dfrac{A_{11}^{*}}{|A_{11}|}=-\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}0&-4\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$

则$A_{22}-A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}=A_{22}$，因此

$$A\cong\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}$$

同样可得

$$A_{11}\cong\begin{pmatrix}8&4\\4&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\cdot\frac{1}{8}\cdot4\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}8&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

$$A_{22}\cong\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故

$$A\cong\begin{pmatrix}8&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}8&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

则二次型的标准 形为$8y_1^2+2y_2^2-2y_3^2-\frac{1}{2}y_4^2$。

解二：原式$=2(4x_1+4x_2+x_3)x_4+2x_2x_3$

令

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 4x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(y_1 - 4y_2 - y_3) \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

则原式$= 2y_1y_4 + 2y_2y_3$

再令

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_4 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \\ y_4 = z_1 + z_4 \end{cases}$$

所以原式$=2z_1^2+2z_2^2-2z_3^2-2z_4^2$这就是所求标准形。

解三：令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

则原式$= 8y_1y_4 + 8y_4^2 + 2y_3y_4 + 2y_2y_3 + 8y_2y_4$

$$= 8\left\{ y_4^2 + 2y_4\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right) + \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right)^2 \right\} - 8\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right)^2 + 2y_2y_3$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3 + y_4\right)^2 - 2\left(y_1 + y_2 + \frac{1}{4}y_3\right)^2 + 2y_2y_3$$

再令

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

因而可得

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_4 \\ x_2 = z_2 + z_3 \\ x_3 = z_2 - z_3 \\ x_4 = z_4 \end{cases}$$

故原式$=8(\frac{1}{2}z_1+\frac{5}{8}z_2+\frac{3}{8}z_3+z_4)^2-2(z_1+\frac{5}{4}z_2+\frac{3}{4}z_3)^2$

$$+2z_2^2-2z_3^2$$

再令

$$\begin{cases} t_1 = z_1 + \frac{5}{4}z_2 + \frac{3}{4}z_3 \\ t_2 = z_2 \\ t_3 = z_3 \\ t_4 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{8}z_2 + \frac{3}{8}z_3 + z_4 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} z_1 = t_1 - \frac{5}{4}t_2 - \frac{3}{4}t_3 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 = t_3 \\ z_4 = -\frac{1}{2}t_1 \div t_4 \end{cases}$$

则原式$=-2t_1^2+2t_2^2-2t_3^2+8t_4^2$即原二次型的标准形为

$$-2t_1^2+2t_2^2-2t_3^2+8t_4^2.$$

解四：可用矩阵的合同变换化二次型为标准形。

3．试证 $\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} k_3a_3 & & \\ & k_2a_2 & \\ & & k_1a_1 \end{pmatrix}$

合同，k_1，k_2，k_3为数域P上不为0的数。

证一： $\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2+a_3 & a_3 \\ 0 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}$

$$\cong \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} k_1a_1 & & \\ & k_2a_2 & \\ & & k_3a_3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} k_3a_3 & & \\ & k_2a_2 & \\ & & k_1a_1 \end{pmatrix}$$

证二： 令

$$A=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_2+a_3 & a_2+a_3 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= X'AX \\ &= (a_1+a_2+a_3)x_1^2+2(a_2+a_3)x_1x_2+2a_3x_1x_3 \\ &\quad +(a_2+a_3)x_2^2+2a_3x_2x_3+a_3x_3^2 \\ &= a_3(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2) \\ &\quad +a_2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+a_1x_1^2 \\ &= a_1x_1^2+a_2(x_1+x_2)^2+a_3(x_1+x_2+x_3)^2 \end{aligned}$$

再令$y_1=x_1$，$y_2=x_1+x_2$，$y_3=(x_1+x_2+x_3)$　　（1）

与

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}$$

则存在非退化线性替换（1）使

$$f(x_1, x_2, x_3)=Y'BY$$

于是A与B合同，同理容易证明B与$\begin{pmatrix} k_3a_3 & & \\ & k_2a_2 & \\ & & k_1a_1 \end{pmatrix}$合同，

因此命题得证。

4．若$c\neq 0$，证明：

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{与} B=\begin{pmatrix} ac^2+2bc+c & bc+c \\ bc+c & c \end{pmatrix} \text{合同。}$$

证一：$f(x_1,x_2)=X'AX=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$

$g(y_1,y_2)=Y'BY=(ac^2+2bc+c)y_1^2+2(bc+c)y_1y_2+cy_2^2$

$=ac^2y_1^2+c(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2)+2bcy_1(y_1+y_2)$

$=ac^2y_1^2+2bc(y_1+y_2)y_1+c(y_1+y_2)^2$

令

$x_1=cy_1$，$x_2=y_1+y_2$

由于$c\neq 0$，则存在非退化线性替换$X=DY$使

$$f(x_1,x_2)=g(y_1,y_2)$$

因此A与B合同。

证二：

$$\begin{pmatrix} ac^2+2bc+c & bc+c \\ bc+c & c \end{pmatrix} \underset{1+2(-1)}{\overset{1+2(-1)}{\cong}} \begin{pmatrix} ac^2 & bc \\ bc & c \end{pmatrix}$$

$$\underset{1\times c^{-1}}{\overset{1\times c^{-1}}{\cong}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

5．确定实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$的秩与符号差。

解一：$f(x_1, \cdots, x_{2n})$的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \cong \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & -1\end{pmatrix}$$

于是$f(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$的标准形为$y_1^2-y_2^2+\cdots y_{2n-1}^2-y_{2n}^2$，则它的秩为2n，符号差为0。

解二：作非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_1+y_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_{2n-1}=y_{2n-1}-y_{2n} \\ x_{2n}=y_{2n-1}+y_{2n}\end{cases}$$

则$f(x_1, \cdots, x_{2n})=y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2$

于是$f(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$的秩为2n，符号差为0。

6．证明实二次型$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(\lambda rs+r+s)x_r x_s$的秩和符号差与λ无关（$n\geqslant 2$）。

证一：对二次型的矩阵A作初等变换

$$A=\begin{pmatrix}\lambda+2 & 2\lambda+3 & \cdots & n\lambda+n+1 \\ 2\lambda+3 & 4\lambda+4 & \cdots & 2n\lambda+n+2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n\lambda+n+1 & 2n\lambda+n+2 & \cdots & n^2\lambda+2n\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & \cdots & n\lambda+n+1 \\ -1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & -4 & \cdots & -2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n-1) & -2(n-1) & \cdots & -n(n-1) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & \cdots & n\lambda+n+1 \\ -1 & -2 & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & \cdots & n\lambda+n+1 \\ -1 & 0 & \cdots & -n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

显然秩（A）＝2，它与λ无关。

令$X=(x_1, x_2, 0, \cdots, 0)$，则

$X'AX=(\lambda+2)x_1^2+2(2\lambda+3)x_1x_2+4(\lambda+1)x_2^2$

$[2(2\lambda+3)]^2-4(\lambda+2)4(\lambda+1)$

$=4(4\lambda^2+12\lambda+9)-16(\lambda^2+3\lambda+2)=4>0$，若$x_1=1$必存在$x_2$使$X'AX>0$，也必存在$x'_2$使$X'AX<0$。

若正惯性指数为2，则$X'AX$正定这与$X'AX<0$矛盾；若正惯性指数为0，则$X'AX$负定，这与$X'AX>0$矛盾，故正惯性指数为1，符号差为0，它与λ无关。

证二：令B

$=P[n, 1(-n)]\cdots P[2,1(-2)]A\ P[2,1(-2)]'\cdots P[n, 1(-n)]'$，这里$P[i, 1(-i)]$（$i=1$， 2，…，n）为初等矩阵，则$A\cong B$。

因

$$P[n,1(-n)]\cdots P[2,1(-2)]A$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda+2 & 2\lambda+3 & \cdots & n\lambda+n+1 \\ -1 & -2 & \cdots & -n \\ -2 & -4 & \cdots & -2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n-1) & -2(n-1) & \cdots & -n(n-1) \end{pmatrix}$$

则

$$B=\begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

它的秩为2，符号差为0皆与λ无关。

7．假设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为实对称矩阵，并且$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$（$i=1,2,\cdots,n$），若$X'AX$的正惯性指数为p，负惯性指数为q，试求$X'A^*X$的符号差。

解一：由于$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，根据本书上册第三章题24知$|A|>0$，又由题设必存在可逆矩阵G使

$$G'AG=\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}$$

于是

$$(G'AG)^{-1}=\begin{pmatrix} E_p^{-1} & \\ & -E_q^{-1} \end{pmatrix}$$

即

$$G^{-1}A^{-1}(G^{-1})'=\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}$$

设$|A|=d$，则

$$G^{-1}A^{*}(G^{-1})'=d\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}$$

因$d>0$，于是$X'A^{*}X$ 的符号差$=p-q$。

解二：由题设知$|A|>0$，则A可逆，于是

$(A^{-1})'=(A')^{-1}=A^{-1}$

作线性变换$X=A^{-1}Y$则

$X'AX=Y'(A^{-1})'AA^{-1}Y=Y'A^{-1}Y=|A|^{-1}Y'A^{*}Y$

设$|A|^{-1}=d$，令$Z=\sqrt{d}\,Y$，所以$X'AX=Z'A^{*}Z$，故

$Z'A^{*}Z$与$X'AX$有相同的符号差即为$p-q$。

8．设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$，证明$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩。

证一：设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为p，因$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$半正定，必存在非退化线性替换$Y=DX$使

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2$$

其中$y_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n$（$i=1，2，\cdots，p$）令$B=(b_{ij})_{p\times n}$，则$AX=0$与$BX=0$同解，于是秩$(A)$＝秩$(B)$，因秩$(B)\leqslant p$，则秩$(A)\leqslant p$，又$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'A'AX$所以秩$(A'A)=p$，，秩$(A)\geqslant p$，故秩$(A)=p$，命题成立。

证二：因$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'A'AX$，于是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为秩$(A'A)$，根据本书上册第四章题25有秩$(A'A)$＝秩$(A)$，故命题得证。

9．设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_k^2$，这里$d_i$（$i=1，2，\cdots,k$）是$x_1，x_2，\cdots,x_n$的一次齐次多项式。试证$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩与符号差之和不大于$2k$。

证一：设

$$d_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n\ (i=1，2，\cdots，k)$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数为t，秩为s，则存在非退化线性替换：

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n\ (i=1，2,\cdots,n)$$

(1)

使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_k^2$$

$$= y_1^2 + \cdots + y_t^2 - y_{t+1}^2 - \cdots - y_s^2 \qquad (2)$$

若$t>k$，则

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{k1}x_1 + \cdots + b_{kn}x_n = 0 \\ c_{t+11}x_1 + \cdots + c_{t+1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

这方程组含有$k+n-t$个方程，小于未知量n，故有非零解，设$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是一个非零解，将代它入(2)使得$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_t^2$，则$y_1 = y_2 = \cdots = y_t = 0$。由(3)与(1)有$y_{t+1} = 0, \cdots, y_n = 0$。这与(1)的系数矩阵非退化条件相矛盾，故$t \leqslant k$，又$f$的秩与符号差之和为$2t$，于是命题得证。

证二：设f的秩为s，正惯性指数为t。

$$d_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ (i = 1, 2, \cdots, k)$$

$$A = (a_{ij})_{k \times n}$$

显然$t \leqslant s$，根据上题$s =$ 秩(A)，又秩$(A) \leqslant k$，于是$t \leqslant s \leqslant k$；又$f$的秩与符号差之和为$2t$，因此命题成立。

10．若A，B为n级矩阵且$A = B'B$则

$X'AX$的符号差$\geqslant 2$秩$(B) - n$

证一：设秩$(B) = r$，则存在可逆矩阵P，Q使

$$B=P\begin{pmatrix}E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}Q,$$

于是

$$A=B'B=Q'\begin{pmatrix}E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}Q,$$

因P可逆，P′P为正定矩阵，则

$$\begin{pmatrix}E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$ 为半正定矩阵，与它合同

的矩阵A也半正定，因此秩（A）＝X′AX的正惯性指数＝X′AX的符号差，根据本书上册第四章题1有

秩（A）≥秩（B′）＋秩（B）－n

故

X′AX的符号差≥2秩（B）－n

证二：根据许以超编的代数学引论第五章定理2（参阅本书上册196面引述）知A的所有主子式大于或等于0，于是A半正定，因此秩（A）＝X′AX的符号差，又根据本书上册第四章题1命题得证。

11．对任意正定矩阵A及非零反对称矩阵B试证秩B′AB为偶数

证一：先证下列引理：