级数与积分的解题方法

曲阜师院学报编辑部

目　录

第一篇　无穷级数与叙列

第一章　幂级数的计算

			问题	解答
§1.	（1—31）	堆垒数论	1	108
§2.	（32—43）	二项式系数及其他	6	117
§3.	（44—49）	幂级数的微分法	9	119
§4.	（50—60）	借助函数方程确定系数	11	121
§5.	（61—64）	优级数	13	124

第二章　级数变换，切扎罗（Clsaro）定理

§1.	（65—78）	叙列的自身变换	14	125
§2.	（79—82）	叙列自身变换（一般情况）	18	130
§3.	（83—97）	叙列——函数变换，切扎罗定理	19	131

第三章　实数叙列和级数的构造

§1.	（98—112）	无穷叙列的构造	24	136
§2.	（113—116）	收敛指数	27	141
§3.	（117—123）	幂级数的最大项	28	142
§4.	（124—132）	子级数	30	144
§5.	（133—137）	实数级数项的重排	32	147

问题 解答

§6. (138—139) 级数项的符号分布 ………………… 34 148

第四章 综合题

§1. (140—155) 包围级数 ………………………… 34 149
§2. (156—185) 实数级数 ………………………… 39 153

第二篇 积 分 学

第一章 作为矩形面积和的极限的积分

§1. (1—7) 上下和 ………………………………… 45 168
§2. (8—19) 精确度 ………………………………… 48 169
§3. (20—29) 在有限范围内的广义积分 ………… 51 175
§4. (30—40) 在无限范围内的广义积分 ………… 53 177
§5. (41—47) 数论的应用 ………………………… 56 180
§6. (48—59) 均值，乘积 ………………………… 58 182
§7. (60—68) 重积分 ……………………………… 61 186

第二章 不等式

§1. (69—97) 不等式 ……………………………… 64 190

第三章 实变函数论

§1. (98—111) 常义可积性 ……………………… 76 200
§2. (112—118) 广义积分 ………………………… 79 204
§3. (119—127) 连续、可微、凸函数 …………… 80 207
§4. (128—146) 奇异积分，维尔斯脱拉斯定理
……………………………………………… 82 214

第四章　各种类型的均匀分布

			问题	解答
§1.	(147—161)	数值函数，正则叙列	86	221
§2.	(162—165)	均匀分布准则	90	226
§3.	(166—173)	无理数的多重分布	91	227
§4.	(174—184)	对数表中数字分布及类似问题	93	229
§5.	(185—194)	均匀分布的其他类型	96	235

第五章　大数函数

			问题	解答
§1.	(195—209)	拉普拉斯方法	100	237
§2.	(210—217)	拉普拉斯方法的改进	103	242
§3.	(218—222)	某些极大值的渐近计算	106	246

问　题

第一篇　无穷级数与叙列

第一章　幂级数的计算

§1. 堆垒数论

1. 现有1分，2分，5分，1角，2角和5角的纸币，要将一元纸币兑换开，问有多少种不同的兑换法？

2. 用A_n表示关于非负整数x,y,z,u,v,w的不定方程

$$x+2y+5z+10u+20v+50w=n$$

解的数目。级数和

$$A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+\cdots+A_n\xi^n+\cdots$$

是变量ξ的有理函数。求其和。

3. 寄信需贴4角邮票。邮局现有票面为5分，1角，1角5分和2角的四种邮票出售，如果把买的几种总值为4角的邮票，贴成一排，面值相同邮票的不同排列算不同的方法，问共有多少种不同的贴法？

4. 设加数可取值1，2，3和4的一些项之和为n。以B_n记这些和式的数目（其中加数次序不同，两个和就认为不同）。那么，级数

$$1+B_1\xi+B_2\xi^2+\cdots+B_n\xi^n+\cdots$$

表示怎样一个关于ξ的有理函数？

5. 某人有八块砝码，其重分别为1，1，2，5，10，10，20，50克，现在他要称重78克的物品，问共有多少种称法？

6．同上题，称78克重的物品，如果用同一天平的两个秤盘都可放砝码，可有多少种不同的称法？

7．研究形式

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3+5\varepsilon_4+10\varepsilon_5+10\varepsilon_6+20\varepsilon_7+50\varepsilon_8$$

的和，其中，ε_1，ε_2，ε_3，ε_4，ε_5，ε_6，ε_7，ε_8每个仅可取值0或者1。C_n表示取值n的同类和的个数，将有理整函数

$$C_0+C_1\zeta+C_2\zeta^2+\cdots+C_{99}\zeta^{99}$$

分解因式。

8．在上题中现设量ε_1，ε_2，ε_3，…，ε_8可取三个数值：-1，0，1。用D_n表示在上述问题中取值为n的和的个数。将式子

$$\sum_{n=-99}^{99} D_n\zeta^n$$

分解因式。

9．推广上述问题，一般地，设纸币、邮票和砝码的值为a_1，a_2，…，a_l，将有怎样的结论？

10．设有p人，从中选出n个代表，选法有多少种？

11．把n个硬币分给p人，共多少种分法？

12．把n个硬币分给p个人，但每个人不得少于一个硬币，问共有多少种分法？

13．关于p个变量x_1，x_2，…，x_p的一般n次齐次整有理函数中，共含多少项？

14．可供使用的砝码分别重1，2，4，8，16，…，可以（使用一个天平盘）称任意整数重量的物品，并且仅用一种方式。换句话说：每个正整数可写成二进位记法，并且其表示式是唯一的。

15．现有砝码重1，3，9，27，81，…，使用两个天平

盘，仅用一种方式，可以称出任意给定单位正整数倍的重量物品。

16．在展开式

$$(1+q\xi)(1+q\xi^2)(1+q\xi^4)(1+q\xi^8)(1+q\xi^{16})\cdots$$
$$=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots$$

中确定系数a_n。

17．乘积展开式

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\cdots$$
$$=1-a-b+ab-c+ac+bc-abc-d+\cdots$$

$(n=0,1,2,\cdots)$中的第n项取什么符号？

18．证明恒等式

$$(1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^9)(1+\xi^{10}+\xi^{20}+\cdots+\xi^{90})$$
$$(1+\xi^{100}+\xi^{200}+\cdots+\xi^{900})\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\xi}$$

19．证明

$$(1+\xi)(1+\xi^2)(1+\xi^3)(1+\xi^4)\cdots$$
$$=\frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^3)(1-\xi^5)(1-\xi^7)\cdots}。$$

20．每个正整数可以表示成不同的正整数加数之和，其可能的方式与它可表示成正奇数之和的可能方式一样多。例如，所有可能表示数6的不同加数有：

6，1+5，2+4，1+2+3，

表示为奇数相加的有：

1+5，3+3，1+1+1+3，1+1+1+1+1+1。

21．如果不同的加数次序不同，就算不同的表示方式，那么，每一个正整数n可以用$2^{n-1}-1$种不同的方式表示成较小的

正整数之和。例如：仅就$2^{4-1}-1=7$而言，和为 4 的表示方式有：

$$\begin{array}{llll} 1+1+1+1 & 1+1+2 & 2+2 & 1+3 \\ & 1+2+1 & & 3+1 \\ & 2+1+1 & & \end{array}$$

22。不定方程组

$$\begin{aligned} &x+2y=n, \\ &2x+3y=n-1, \\ &3x+4y=n-2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &nx+(n+1)y=1, \\ &(n+1)x+(n+2)y=0 \end{aligned}$$

的非负整数解的个数等于$n+1$。

23。不定方程组

$$\begin{aligned} &x+2y=n-1, \\ &2x+3y=n-3, \\ &3x+4y=n-5, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

的非负整数解的个数N小于$n+2$，并且，其差$(n+2)-N$等于$n+2$的因数的数目。

24。证明，不定方程组

$$\begin{aligned} &x+4y=3n-1, \\ &4x+9y=5n-4, \\ &9x+16y=7n-9, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

的非负数解的个数等于n。

25。不定方程

$$x+2y+3z=n$$

的非负数解的个数是靠近$(n+3)^2/12$的一个整数。

26. 方程

$$ax+by=n$$

的非负整数解的个数等于$\left[\frac{n}{ab}\right]$或者$\left[\frac{n}{ab}\right]+1$，其中$a,b,n$为正整数，$a,b$互质。

27. 设a_1，a_2，…，a_l是互质的正整数。若A_n是方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_lx_l=n$$

的非负整数解的个数，则有极限关系式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^{l-1}}=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_l(l-1)!}。$$

28. 具有笛卡尔整数坐标x,y,z的点叫做空间的格点。在平面$x+y+z=n$上的正闭象限内($x\geq0$，$y\geq0$，$z\geq0$)有多少格点？在这一平面上的开象限内($x>0$，$y>0$，$z>0$)又有多少格点？

29. 在p维空间的《正八面体》

$$|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_p|\leq n\ (n是正整数)$$

内有多少格点？

30. 在闭立方体$-n\leq x$，y，$z\leq n$内，满足条件

$$-s\leq x+y+z\leq s$$

的格点个数等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^3\frac{\sin\frac{2s+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt,$$

其中n，s为正整数。

31. 方程$x+y+z=n$ ($n\geq3$) 满足条件$x\leq y+z,y\leq z+x$,

$z\leq x+y$ 的正整数解的个数等于 $\frac{(n+8)(n-2)}{8}$ 或 $\frac{n^2-1}{8}$，视 n 是偶数还是奇数而定。

§2。二项式系数及其他

展开式

$$(1+z)^{\mu}=\binom{\mu}{0}+\binom{\mu}{1}z+\binom{\mu}{2}z^2+\cdots$$

$$+\binom{\mu}{r}z^r+\cdots+\binom{\mu}{0}=1\ (\mu\text{是任意实数})$$

中的系数叫做二项式系数。当 μ 是正整数时，$\binom{\mu}{r}$ 有组合的意义（10题——13题）。以下问题中，n 是非负整数。

32。证明

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

33。证明 $\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\cdots-\binom{2n}{2n-1}^2$

$$+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}。$$

34。由恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^l=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k!}z^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\beta_l}{l!}z^l=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n!}z^n$$

推出

$$C_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0,$$

$$\bar{\chi}_n=\alpha_0\beta_n+\binom{n}{1}\alpha_1\beta_{n-1}+\binom{n}{2}\alpha_2\beta_{n-2}+\cdots+\alpha_n\beta_0\text{。}$$

35。假定

$$x^{n/h}=x(x-h)(x-2h)\cdots[x-(n-1)h]\text{。}$$

那么有恒等式

$$(x+y)^{n/h}=x^{n/h}+\binom{n}{1}x^{n-1/h}y^{1/h}$$

$$+\binom{n}{2}x^{n-2/h}y^{2/h}+\cdots+y^{n/h}\text{。}$$

36。（接上题）证明下面多项式定理的推广*)

$$(x_1+x_2+\cdots+x_l)^{\frac{n}{h}}$$

$$=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_l=n}\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_l!}x_1^{\frac{r_1}{h}}x_2^{\frac{r_2}{h}}\cdots x_l^{\frac{r_l}{h}}\text{。}$$

37。证明$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\cdots+$

$$+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=\begin{cases}0\text{当}n\neq1,\\1\text{当}n=1\text{。}\end{cases}$$

38。证明

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}$$

---

*）这里所指的《多项式定理》是指下面恒等式：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_l)^n$$

$$=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_l=n}\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_l!}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_l^{r_l}\text{。}$$

此式又是二项公式的推广。

$$\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}。$$

39．证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k+1}{2k+1}=n+1。$$

40．证明

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-\alpha\right)^{2}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}$$

$$=(x-\alpha)^{2}+\frac{x(1-x)}{n}$$

41．假定

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)+\cdots,$$

$$\psi(x)=a_0+\frac{a_1}{2}x+\frac{a_2}{2^2}x(x-1)+\frac{a_3}{2^3}x(x-1)(x-2)+\cdots。$$

那么，

$$\binom{n}{0}\varphi(0)+\binom{n}{1}\varphi(1)+\binom{n}{2}\varphi(2)+\cdots$$

$$+\binom{n}{n}\varphi(n)=2^{n}\psi(n)—$$

$$\binom{n}{0}\varphi(0)-\binom{n}{1}\varphi(1)+\binom{n}{2}\varphi(2)-\cdots$$

$$+(-1)^{n}\binom{n}{n}\varphi(n)=(-1)^{n}a_n n!$$

42．证明

$$\binom{n}{0}(0-n)^{2}+\binom{n}{1}(2-n)^{2}+\binom{n}{2}(4-n)^{2}+\cdots+$$

$$+\binom{n}{k}(2k-n)^{2}+\cdots=2^{n}n\ 。$$

43．证明

$$\binom{n}{0}(0-n)^2-\binom{n}{1}(2-n)^2+\binom{n}{2}(4-n)^2$$

$$-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}(2k-n)^2+\cdots=\begin{cases}0 & \text{当} n\neq 2,\\ 8 & \text{当} n=2。\end{cases}$$

§3．幂级数的微分法

设y是关于z的无限次可微函数。运算$\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^n y$由下面的递推公式确定：

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n y=z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-1}y,\quad z\frac{d}{dz}y=zy'。$$

例如：

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n z^k=k^n z^k。$$

设多项式

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n。$$

我们定义

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right)y=c_0y+c_1z\frac{d}{dz}y+c_2\left(z\frac{d}{dz}\right)^2y+\cdots$$

$$\cdots+c_n\left(z\frac{d}{dz}\right)^n y。$$

44．证明

$$f\left(z\frac{d}{dz}\right)z^k=f(k)z^k。$$

45．证明　若$f(x)$是整系数多项式，则级数和

$$f(0)+\frac{f(1)}{1!}+\frac{f(2)}{2!}+\cdots+\frac{f(k)}{k!}+\cdots$$

是数e（自然对数的底）的整数倍。

46. 假设

$$\left(z\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{1-z}=1^n z+2^n z^2+3^n z^3+\cdots$$

$$=\frac{f_n(z)}{(1-z)^{n+1}}(n=1,2,3,\cdots)。$$

证明 $f_n(z)$是正系数n次多项式（除了自由 项$f_n(0)=0$外）且有$f_n(1)=n!$。

47. 设$f(x)$与$g(x)$是两个任意多项式，但$g(x)$没有非负整数根。证明，级数

$$y=\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(2)}{g(2)}z^2+\cdots$$

满足微分方程

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{1}{1-z},$$

这方程可用逐次积分的方法求解。

48. 设$f(x)$和$g(x)$是两个互质的多项式，其中$g(x)$的幂次不低于$f(x)$的幂次，$g(0)=0$，但$g(1)$，$g(2)$，$g(3)\cdots$异于零。证明，级数

$$y=1+\frac{f(1)}{g(1)}z+\frac{f(1)f(2)}{g(1)g(2)}z^2+\frac{f(1)f(2)f(3)}{g(1)g(2)g(3)}z^3+\cdots$$

满足齐次线性微分方程

$$g\left(z\frac{d}{dz}\right)y=f\left(z\frac{d}{dz}\right)zy\ 。$$

49. 级数

$$y=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 z+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 z^2+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots2n}\right)^2 z^n+\cdots$$

满足微分方程

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-2z)\frac{dy}{dz}-\frac{1}{4}y=0.$$

§4. 借助函数方程确定系数

50. 函数

$$F(z)=(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\cdots(|q|<1)$$

展开成幂级数

$$F(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\cdots$$

由函数方程

$$F(z)=(1-qz)F(qz)$$

确定这个展开式系数A_n。

51. 确定展开式

$$1/F(z)=B_0+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\cdots$$

的系数，其中$F(z)$就是上题所述的函数。

52. 确定恒等式

$$(1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\cdots$$
$$\cdots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})=c_0+c_1(z+z^{-1})$$
$$+c_2(z^2+z^{-2})+\cdots+c_n(z^n+z^{-n})$$ 中的系数c_0，c_1，c_2，…，c_n。

53. 由52题中的恒等式取极限的方法导出公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1})(1-q^{2n})$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n\ (|q|<1)。$$

54. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}\ (|q|<1).$$

55. 证明$\frac{1-q^2}{1-q}\times\frac{1-q^4}{1-q^3}\times\frac{1-q^6}{1-q^5}\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}\ (|q|<1)。$$

56. 证明$\frac{1-q}{1+q}\times\frac{1-q^2}{1+q^2}\times\frac{1-q^3}{1+q^3}\times\frac{1-q^4}{1+q^4}\cdots$

$$=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots\ (|q|<1)。$$

57. 证明函数

$$G(z)=\frac{q}{1-q}(1-z)+\frac{q^2}{1-q^2}(1-z)(1-qz)+$$

$$+\frac{q^3}{1-q^3}(1-z)(1-qz)(1-q^2z)+\cdots\ (|q|<1)$$

满足函数方程

$$1+G(z)-G(qz)=(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\cdots$$

58. 确定展开式

$$G(z)=D_0+D_1z+D_2z^2+D_3z^3+\cdots$$

中的系数，其中G(z)是上题中的函数。

59. 证明恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots(1-a^{n-k+1})}{1-a^k}=n\ (n=1,2,3,\cdots)$$

并由它推出$-\ln(1-x)$的幂级数。

（有$G(q^{-n})=-n\ (n=0,1,2,\cdots)$，其中G(z)为57题所定义的函数。）

60. 幂级数

$$f(z)=1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}+\frac{z^6}{7}+\cdots$$

满足函数方程

$$f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)=(1+z^2)f(z) \qquad (39题)。$$

§5. 优级数

设a_0，a_1，a_2，…，a_n，…是任意复数；p_0，p_1，p_2，…，p_n，…是非负实数。假定

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots=A(z)。$$

$$p_0+p_1z+p_2z^2+\cdots+p_nz^n+\cdots=P(z)。$$

若不等式

$$|a_0|\leq p_0,\quad |a_1|\leq p_1,\quad |a_2|\leq p_2,\quad \cdots,\quad |a_n|\leq p_n,\quad \cdots$$

一致成立，则我们就说：$P(z)$是函数$A(z)$的优级数，或者同样地，$A(z)$是函数$P(z)$的劣级数，用符号记作：

$$A(z)\ll P(z)。$$

61. 若$A(z)\ll P(z)$，$A^*(z)\ll P^*(z)$，

则有

$$A(z)+A^*(z)\ll P(z)+P^*(z),$$

$$A(z)A^*(z)\ll P(z)P^*(z)。$$

62. 对所有的正整数n，有

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\ll e^z$$

63. 设

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

由条件

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ll\frac{1+z}{1-z}$$

推出不等式

$$|a_n|\leq n\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

64. 设a_1，a_2，…，a_l是正整数。证明：a)借助于9题，b)