出版前言

本书是根据1981年10月教育部颁发的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲》编写的．全书共分上、下两册，本书是下册二分册，内容有线性代数与线性规划初步，可作为中等专业学校财经类专业的数学教材．

中等专业学校试用教材
财经类专业通用
数　　学
下册二分册
*
人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
浙江洛舍印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 4.125　字数 90,000
1982年5月第1版　1982年9月第1次印刷
印数 00,001—90,500
书号13012·0740　　定价 0.33 元

前　言

《数学》下册二分册《线性代数与线性规划初步》是在东北、华北协作区编写的《数学》教材基础上，根据一九八一年十月教育部主持讨论通过的《中等专业学校财经类专业通用数学教学大纲(试行草案)》编写的．由沈阳市财经学校负责主编，辽宁大学数学系郭第渐副教授、概率论教研室主任刘良和同志主审．参加编写的有沈阳市财经学校周作光、赵长骥、吴素文等同志．参加初稿编写的还有阜新财经学校刘大明同志．由于编者水平和经验所限，一定有不少缺点和错误，诚恳希望使用本教材的师生不吝赐教．

编　者

一九八二年二月

目　　录

第六章　行　列　式

§1　n 阶行列式

行列式是一个重要的数学工具，在数学的各个分支以及其他许多学科中都经常用到它. 下面通过分析二阶与三阶行列式所具有的共性，把它加以推广，给出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

其中 a_{ij} 称为行列式的元素，第一个足标表明该元素所在的行数，第二个足标表明它所在的列数.

由此可以看出二阶和三阶行列式的展开式有一个共性，就是每一项都是从不同的行、不同的列各取一个元素的乘积，这样尽其可能地组成所有各项，它们的代数和即为该行列式之值. 因此二阶行列式恰有 $2!$ 项，一项为正，一项为负；三阶行列式恰有 $3!$ 项，其中三项是正的，另外三项为负的.

若将三阶行列式的展开式写成如下形式：

$$\begin{array}{llllll} a_{11} & a_{22} & a_{33} - a_{11} & a_{23} & a_{32} + \\ -a_{12} & a_{21} & a_{33} + a_{12} & a_{23} & a_{31} + \\ +a_{13} & a_{21} & a_{32} - a_{13} & a_{22} & a_{31} \end{array}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

则有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \tag{1°}$$

(1°)式给出了用二阶行列式来定义三阶行列式的方法.

类似,可用三阶行列式来定义四阶行列式:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{vmatrix}. \tag{2°}$$

这样,以逐次递推方式, 用 n 个 $n-1$ 阶行列式($n\geqslant 2$, n 是正整数)可以给出 n 阶行列式的定义.

定义: n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+(-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}. \tag{3°}$$

n 阶行列式有 n 行、n 列，是由 n^2 个元素组成的．其中 a_{11}, $a_{22}, a_{33}, a_{44}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角线上的元素，简称主对角元．

将(3°)式的右端继续展开下去，一共有 $n!$ 项，$\frac{n!}{2}$个是正的，另外$\frac{n!}{2}$个是负的；每一项都是 n 个不同行不同列的元素的乘积．

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -6 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & -6 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+7 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

注意，以前学的对角线法则仅适用于二、三阶行列式，对于四阶行列式或者高于四阶的行列式不能用对角线法则.

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式称为三角形行列式. 前者叫下三角形行列式，它的主对角线上方的元素皆为零；后者叫上三角形行列式，它的主对角线下方的元素皆为零.

显然，三角形行列式之值等于其所有主对角元之积.

例如，

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 18 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 6\cdot 3\cdot 5 = 90.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 5 = 30.$$

§2 行列式的性质

性质一 把行列式的各行变为相应各列，（称为转置行列式），其值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12-10=2.$$

由这一性质可知，对于行列式的行成立的性质对于列也一定成立；反之亦然.

性质二 把行列式的某两行(列)对调，则该行列式之值只改变符号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

性质三 如果行列式某两行(列)的对应元素相同，那么这个行列式的值等于零.

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

性质四 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以某数 K，等于用数 K 乘原行列式.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times3 & 2\times1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

推论 1　行列式的某一行(列)有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

推论 2　如果行列式某一行(列)的所有元素都是零，那么该行列式的值等于零.

性质五　如果行列式某两行(列)的对应元素成比例，那么它的值等于零.

例如，

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

性质六　如果行列式的某一行(列)的元素都可表示为二项之和，那么这个行列式等于从这些元素里各取一项作成相应的行(列)，而其余各行(列)不变的两个行列式的和.

例如，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

性质七　把行列式某一行（列）的所有元素同乘以一个数 K，加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11}+Ka_{21} & a_{12}+Ka_{22} & a_{13}+Ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

行列式的这些性质在计算或理论上都很重要，适当引用行列式的性质可以简化行列式的计算.

例 1 利用行列式的性质计算

$$
\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix}.
$$

解:

$$
\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3\times 2 & 3\times 3 & 3\times 7 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{第 2 行上}]{\text{把第 3 行加到}} 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\times 0 = 0.
$$

利用行列式的性质把行列式化为三角形行列式，可使计算简便.

符号说明：在以后的计算中，为简明起见，用圆括号内数字表示行的位置；用圆内数字表示列的位置；符号“$\longleftrightarrow$”表示行(列)对调. 例如，(1)$\longleftrightarrow$(3)表示第 1 行与第 3 行对调；④$-\frac{1}{8}$③表示把第 3 列乘以$-\frac{1}{8}$然后加到第 4 列，即第 4 列减去第 3 列的$\frac{1}{8}$倍.

例 2 把下面行列式化成三角形行列式，然后计算其值.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{(1)\longleftrightarrow(3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{①}\longleftrightarrow\text{③}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{④}+\text{①}]{\text{③}-2\text{①}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -11 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{④}+\text{②}]{\text{③}+11\text{②}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 2 \\ 3 & -5 & -60 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{④}-\frac{1}{8}\text{③}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 16 & 0 \\ 3 & -5 & -60 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times16\times\frac{5}{2}=40.$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

这个行列式的特点是主对角线上元素是 a, 其余元素是 b. 根据性质 7, 把第二列一直到第 n 列都加到第一列上, 行列式的值不变, 即得:

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix},$$

把第二行到第 n 行分别加上第一行的 -1 倍, 就有:

$$D=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix},$$

这是个上三角形行列式, 所以

$$D=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 4 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ e+f & f+m & m+e \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

证明:

由性质六及性质三，得:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ e+f & f+m & m+e \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ e & f+m & m+e \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ f & f+m & m+e \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ e & f+m & m \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c+a & b \\ e & f+m & e \\ y & z+x & y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ f & f & m+e \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ f & m & m+e \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ e & f+m & m \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ f & m & m+e \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & m \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & m & e \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

§3 行列式的计算

由 n 阶行列式的定义可知，任一 n 阶行列式都可以展开为

n个$n-1$阶行列式来计算. 为进一步研究行列式的计算, 先给出如下几个概念.

定义 1 在n阶行列式D中, 任取k行及k列$(1\leqslant k\leqslant n)$, 由这些行与列相交处的元素所组成的新的$k$阶行列式$M$, 称为原行列式$D$的一个$k$阶子式. 在$D$中划去这$k$行, k列元素以后, 余下的元素按其相对位置排成一个新的行列式M', 称为M的余子式.

例如, 在5阶行列式D中, 取第2、4两行及2、3两列, 则

$$D=\begin{array}{c|ccccccccc|c} & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & a_{15} & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ \cdots & a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{23} & \cdots & a_{24} & \cdots & a_{25} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ \cdots & a_{41} & \cdots & a_{42} & \cdots & a_{43} & \cdots & a_{44} & \cdots & a_{45} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\ & a_{51} & & a_{52} & & a_{53} & & a_{54} & & a_{55} & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & & & \end{array}$$

$$M=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$ 为D的一个2阶子式,

$$M'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \\ a_{51} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ 为M的余子式.

定义 2 把行列式D中的某一元素a_{ij}所在的行与列划去以后所得到的$(n-1)$阶子式M_{ij}叫元素a_{ij}的余子式. $(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式, 记作A_{ij}.

例如，若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

则 $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix};$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

这样一来，我们可以把三阶行列式写成下列形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

即把三阶行列式写成了第一行的元素与其代数余子式的乘积之和．一般地，由行列式的定义及性质可得如下定理：

定理 1（拉普拉斯定理） n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和．

即：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}. \qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

也就是说，我们可以按某一行(列)展开行列式.

例 1 将行列式$\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}$按第一行展开，并计算它的值.

解:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-2)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 6\end{vmatrix}=3(8-6)+(6-1)-2(18-4)=-17.$$

例 2 计算$\begin{vmatrix}1 & 3 & 7 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 7 & 4 & 1 & -6\\ -3 & -2 & 4 & 5\end{vmatrix}$.

可利用行列式的性质，先将行列式的某行(列)化成只有一个元素不等于零，而其余元素都是零，来简化计算.

解:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 7 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -2\\ 7 & 4 & 1 & -6\\ -3 & -2 & 4 & 5\end{vmatrix}\xlongequal[①-2②]{④+①}\begin{vmatrix}-5 & 3 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}}\begin{vmatrix}-5 & 7 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[③+①]{②+①}\begin{vmatrix}-5 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=16,$$