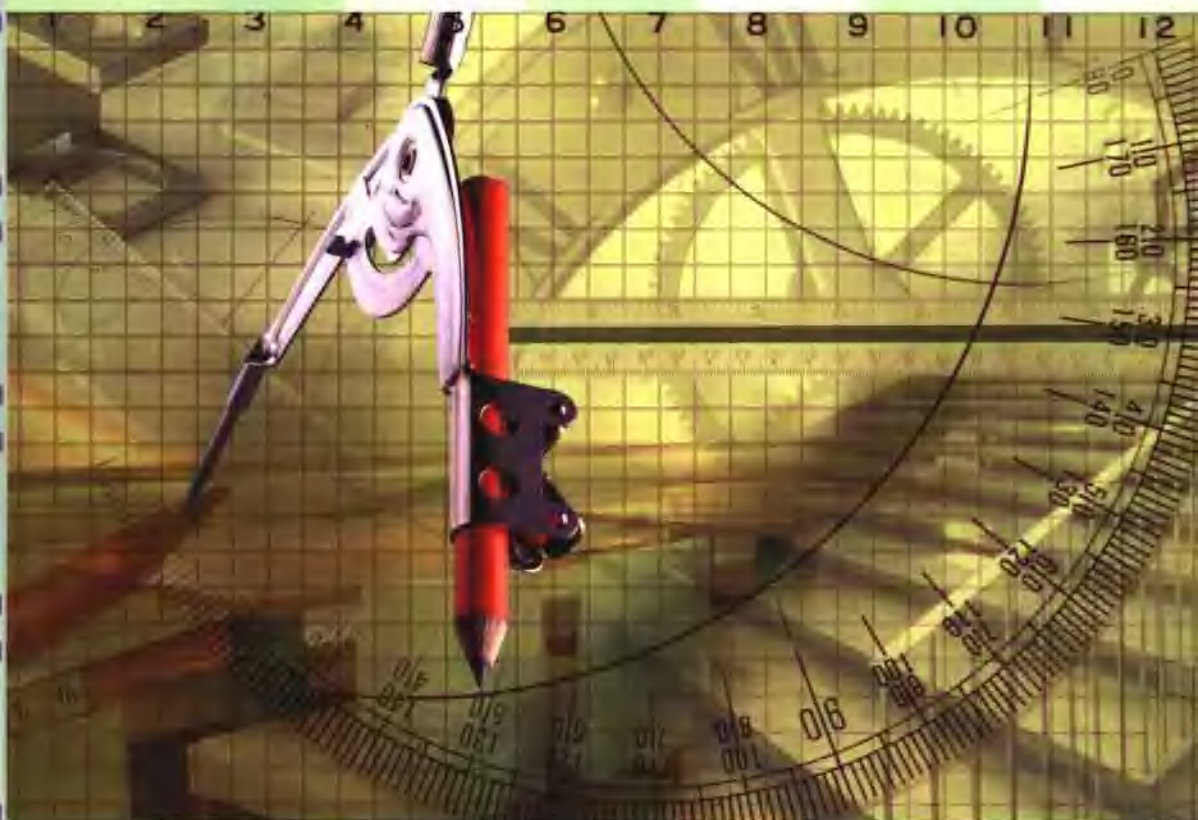


高中导学与探究丛书

数学

第一册（上）



四川出版集团
四川民族出版社

高中导学与探究丛书

数 学

第一册 (上)

(必修)

四川出版集团
四川民族出版社

高中导学与探究丛书
数 学 第 一 册 (上)
(必 修)

责任编辑	张 俊
封面设计	康颂工作室
技术设计	唐学兵
出 版	四川出版集团 四川民族出版社
地 址	成都市盐道街 3 号
邮政编码	610012
联系电话	(028) 86663735 86674537
发 行	四川新华文轩连锁股份有限公司
印 刷	德阳日报印刷厂
成品尺寸	184mm×260mm
印 张	8.75
字 数	200 千
版 次	2005 年 5 月第 1 版
印 次	2005 年 5 月第 1 次印刷
印 数	1~6800 册
书 号	ISBN 7-5409-3171-X/G·1678
定 价	8.70 元

著作权所有·侵权必究

本书若出现印装质量问题,请与本社联系调换。

前 言

《高中导学与探究丛书》是在参照新的课程标准和教学理念的基础上，按照现行各学科教学大纲和教材编写。丛书包括语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理九个学科。

本丛书数学分册各章分为三个部分，第一部分为目标聚焦，包括参章的学习目标、重点及难点解析，旨在引导同学们对本章内容从整体上有一个宏观的把握映象。第二部分为分节学习，其内容包括导学提要 and 题海冲浪两大部分，其中导学提要分为内容导读、要点解析、案例剖析、思维拓展、方法提炼五部分，意在通过对教材的学习和探究，开启心智，理解和掌握教材知识的要领，再通过练习，学以致用，以利于同学们扎实地掌握基础知识和基本技能、强化同学们对数学思想和方法的理解及运用，解决实际问题，其中案例剖析无详细解答过程，但留有足够的空间，意在方便师生在教学中交流。第三部分为学习回顾，目的在于倡导一种个性化的学习方式。它要求同学们根据自己的认知能力和个性特长，用自己的眼光来观察，用自己的头脑来判断，用自己的心灵来感悟，用自己的语言来展述。其最终目的是使同学们掌握知识、学到本领。

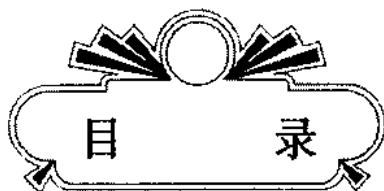
建议同学们使用这套丛书时不要只把眼光盯在那些练习题上面，而应统观全书，领略导学与探究的良苦用意。

本册书由董大禄、秦帮政、曾祥元、邱华、杨钦、杨杰、杨勇军、程富林编写，黄勇任主编并统稿。

由于本书编写时间紧迫，书中存在的不足或错误，欢迎批评指正。

《高中导学与探究》编委会

2005年5月



第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 集 合	(2)
1.2 子集、全集、补集	(8)
1.3 交集、并集	(14)
1.4 含绝对值的不等式解法	(19)
1.5 一元二次不等式解法	(24)
1.6 逻辑联结词	(29)
1.7 四种命题	(35)
1.8 充分条件与必要条件	(41)
第二章 函 数	(51)
2.1 函 数	(52)
2.2 函数的表示法	(58)
2.3 函数的单调性	(64)
2.4 反函数	(69)
2.5 指 数	(74)
2.6 指数函数	(79)
2.7 对 数	(84)
2.8 对数函数	(89)
2.9 函数的应用举例	(94)
第三章 数 列	(104)
3.1 数 列	(104)
3.2 等差数列	(109)
3.3 等差数列的前 n 项和	(114)
3.4 等比数列	(120)
3.5 等比数列的前 n 项和	(125)
3.6 研究性学习课题: 数列在分期付款中的应用	(129)



第一章

集合与简易逻辑

【目标聚焦】

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.
2. 掌握简单的绝对值不等式和一元二次不等式的解法.
3. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义；理解四种命题及其相互关系；掌握充要条件的涵义.

本章的重点是集合的有关概念及运算；逻辑联结词“或”、“且”、“非”以及充要条件.

本章的难点是集合有关概念的涵义及概念间的区别与联系；一些真假命题的判断.

本章共分两大节.

第一节是“集合”，包含集合的有关概念及运算，考虑到集合知识的应用及后续学习的需要，安排了绝对值不等式及一元二次不等式的解法. 要学好本节内容，首先必须准确理解集合中的基本概念，其次，认清集合中的元素是什么，是数集还是点集？然后，实施恰当的转化，集合问题多与函数、方程、不等式、曲线有关，要注意各类知识的融汇贯通，利用合理的数学思想方法解决问题，熟练掌握好各类不等式的解法.

第二节是“简易逻辑”，包含简单命题和含有“或”、“且”、“非”的复合命题；判断复合命题的真假的方法；四种命题及其相互关系，反证法及应用；充要条件的有关知识. 对于本节的内容，要抓住几个知识点，通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.

逻辑联结词“或”、“且”、“非”与集合中的“并”、“交”、“补”是相似相关的，二者相互对照可加深对两者的认识和理解.

本章蕴含丰富的数学思想方法，“集合思想”是本章的最基本的数学思想方法，如用集合的语言表述数学问题，用集合的观点研究解决数学问题；“转化与化归思想”，如集合语言的转化，解不等式等；“数形结合思想”，如用文氏图表示集合，利用数轴表示不等式的解、解不等式等；“分类讨论思想”，如解含参不等式等；“函数与方程思想”，如解一元二次不等式.

解决本章问题时，需注意：

- ① 集合元素的互异性、无序性，解题易忽视，注意对解的检验.
- ② 分清两种关系：“元素与集合”、“集合与集合”.

③ 空集 $\emptyset$ 的特殊性, 解题时注意考查空集的可能性. 如 $A \subseteq B$, 则有 $A = \emptyset$ 以及 $A \neq \emptyset$ 两种可能情况.

④ “原命题与逆否命题等价”, “逆命题与否命题等价”的应用.

⑤ 集合语言的等价转化与集合思想的应用.

⑥ 解不等式的方法与步骤, 注意等价转化.

1.1 集 合

【导学提要】

一、内容导读

1. 一般地, 某些_____集在一起就成为一个集合, 也简称集. 如: “我校篮球队的队员”组成一个集合; “太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋”也组成一个集合.

2. 集合中的_____叫做集合的元素, 如: “太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋”这一集合的元素是: _____、_____、_____、_____.

我们一般用_____表示集合, 如: {我校篮球队的队员}, 为方便起见, 我们还经常用_____表示集合, 如, $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. 集合的元素常用_____表示. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a _____集合 A , 记作_____; 如果 a 不是集合 A 的元素, 就说 a _____集合 A , 记作_____ (或_____).

4. 构成集合的元素必须是_____、_____、_____.

5. 常用数集及其符号:

$$\mathbf{N} = \{ ______ \} = \{ ______ \}, \mathbf{N}^* = \{ ______ \} = \mathbf{N}_+,$$

$$\mathbf{Z} = \{ ______ \}, \mathbf{Q} = \{ ______ \}, \mathbf{R} = \{ ______ \}.$$

6. 集合的表示方法, 常用的有_____、_____、_____.

7. 列举法是_____方法. 如, 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解组成的集合可表示为 $\{-1, 1\}$.

8. 描述法是_____方法. 如, 不等式 $x - 3 > 2$ 的解集可表示为 $\{x | x > 5\}$.

9. 文氏图法是_____的方法. 如, 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 可表示为 $\textcircled{1, 2, 3, 4}$.

10. 不含任何元素的集合叫做_____, 记作_____.

11. 集合按元素个数分类, 分为_____和_____.

本小节的重点是集合的基本概念与表示方法, 正确使用符号“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”. 难点是运用集合的表示方法, 正确表示一些简单的集合, 学习中要认真理解和辨析.

二、要点解析

1. 怎样理解集合的概念

集合是数学中不加定义，只需理解的最基本的原始概念。

2. 怎样理解集合元素的特性

(1) 确定性 设 A 是一个给定的集合， x 是某一具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素；两种情况有且只有一种情况成立。如 $\sqrt{2}$ ，它属于实数集，即为 $\mathbf{R}$ 的一个元素，而 $\sqrt{2}$ 不是有理数集的元素。

(2) 互异性 对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的，即集合中的相同元素只能算作一个。如：方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 的两个根 $x_1 = x_2 = 2$ ，用集合记为 $\{2\}$ ，而不能写成 $\{2, 2\}$ 。

(3) 无序性 集合中的元素顺序可以任意交换，如集合 $\{a, b, c\}$ 与 $\{b, c, a\}$ 表示同一个集合。

3. 怎样理解集合的表示方法

(1) 列举法 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号“ $\{ \}$ ”内，这样的表示方法叫列举法，但应注意用“ $,$ ”把各元素分隔开。列举法可以明确集合中的具体元素或元素个数。它常用来表示有限集或元素具有特殊规律的无限集。用列举法表示元素具有特殊规律的无限集时，必须把元素间的规律表示清楚后才能用删节号（省略号）。

(2) 描述法 把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内的方法叫描述法，描述的语言形式有三种：即文字语言、符号语言、图形语言。其中符号语言形式的描述法形如 $\{x \in A \mid P(x)\}$ [即满足条件 $P(x)$ 的 A 中各元素之集]，若从上下文看 $x \in A$ 是明确的，也可写成 $\{x \mid P(x)\}$ ，这里 x 是该集合的元素的代号，它指明了该集合中的元素是“谁”、是“什么”， A 是特定条件， $P(x)$ 是该元素的特性。对于用描述法表示的集合要准确读懂该集合的元素（即属性）是什么？该元素满足的条件（即集合的含义）是什么？，这是解决集合问题的关键。

(3) 文氏图法 用一条封闭曲线，将所要研究的对象放在一起表示一个集合，文氏图法可以将集合形象直观地表示出来。

除此外，还有些特殊的集合如前页所述的 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{N}^*$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 及以后将学到的区间等。

4. 怎样理解空集

空集是不含任何元素的集合，记作 $\emptyset$ ，如平方等于 -1 的实数的集合就是空集； $\emptyset$ 也是一个集合， $\emptyset$ 中没有任何元素。 $\{0\}$ 中有一个元素“ 0 ”，即 $0 \in \{0\}$ ， $\{\emptyset\}$ 是以 $\emptyset$ 作为元素的集合， $\therefore \emptyset \in \{\emptyset\}$ 。

5. 怎样理解点集与数集

点集与数集的表示方法是不同的，要注意区别。如 $\{(-2, 4), (0, 1)\}$ 表示点集，这个集合中有 2 个元素 $(-2, 4)$ 和 $(0, 1)$ ，而 $\{-2, 4, 0, 1\}$ 是数集，它有 4 个元素 $-2, 4, 0, 1$ 。例如： $\{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$ 是点集， $\{y \mid y = 2x + 1\}$ 是数集，即函数 $y = 2x + 1$ 的所有函数值， $\{x \mid -1 < x < 2\}$ 是数集；集合 $\{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ 是数集，即方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的解集。

三、案例剖析

例 1 判断下列各组对象能否构成集合，若能，则用集合表示出来，若不能，请说明

理由.

- (1) 大于-7而小于7的奇数; (2) 非常大的无理数;
(3) 某工厂的所有优秀工人; (4) 全体实数; (5) 所有多项式;

分析: 判断某些对象能否构成集合的关键是看它是否符合集合中元素的三大特性之一的确定性, (2) 中的“非常大”不确定, (3) 中的“优秀”也不确定, 故(2)(3)不是.

- (1) $\{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$; (4) $\{\text{实数}\}$; (5) $\{\text{多项式}\}$.

例2 判断下列表述是否正确, 请说明理由.

- (1) $\mathbf{R} = \{\text{实数集}\} = \{\mathbf{R}\}$; (2) $\{\text{全体正偶数}\}$;
(3) 方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的根组成的集合是: $\{3, 3\}$;
(4) 由 0, 1, 3, $|-5|$, 5, 这些数组成的集合有 5 个元素;
(5) $\{3, 6, 9\} = \{6, 3, 9\}$; (6) $\{(-2, 0)\} = \{-2, 0\}$.

分析: 集合的表示, 必须严格遵守规定, 因为符号 $\{ \}$ 本身就具有“所有”、“全体”、“集”的意思, 故(1), (2)均错; 同时, 一组对象要构成集合, 一定满足集合中元素的三大特性: 确定性、互异性、无序性. 由此, (3), (4)都错, 而(6)中 $\{(-2, 0)\}$ 表示点集, $\{-2, 0\}$ 表示数集, 故(6)错.

答案: (1)、(2)、(3)、(4)、(6) 错; (5) 正确.

例3 (1) 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空: 设 A 为偶数集, B 为奇数集, 若 $a \in A$, $b \in B$, 则: ① $a+b$ _____ A , ② $a+b$ _____ B , ③ $a \cdot b$ _____ A , ④ $a \cdot b$ _____ B .

(2) 给出下列关系: ① $\frac{1}{5} \in \mathbf{Z}$, ② $|-5| \notin \mathbf{N}^*$, ③ $0 \notin \mathbf{N}$, ④ $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, ⑤ $-10 \in \mathbf{R}$,

⑥ $\frac{9}{4} \in \mathbf{N}^*$, 其中正确的是_____.

分析：元素与集合的关系用“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”来表示，但须准确判断各元素是否在集合中。同时，要熟悉常用数集及其符号。

答案：(1) ① $\notin$ ，② $\in$ ，③ $\in$ ，④ $\notin$ ； (2) ②。

四、思维拓展

例4 $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$ ，试判断 $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ 与集合 A 的关系。

分析：要判断 $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ 与集合 A 的关系，只需考察 $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ 是否具有 $a + b\sqrt{2}$ 这种特征。

答案： $\frac{1}{3-\sqrt{2}} \in A$ 。

例5 已知含有三个实数的集合可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$ ，也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$ 。

求： $a^{2002} + b^{2003}$ 。

分析：欲求 $a^{2002} + b^{2003}$ ，首先应求出 a, b ，由集合中元素的确定性知， $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$ 与 $\{a^2, a+b, 0\}$ 是同一集合，则 $0 \in \{a, \frac{b}{a}, 1\}$ ，于是知 $b=0$ ，再将 $b=0$ 代入集合便可获解。

答案：1。

五、方法提炼

1. 对于集合问题,要确定集合是属于哪一类集合(数集、点集或图形集),然后再确定处理此类问题的方法.

2. 含参数的集合问题,多根据集合的互异性处理,有时需用到分类讨论,以及数形结合等思想.

3. 在判断一组对象能否构成集合时,要运用集合元素的确定性、互异性、无序性进行考虑.

题海冲浪

一、基础训练

1. 下列说法正确的有().

① 某校高中三年级四班的高个子同学可以构成集合;

② $-1, 3, 6, \frac{1}{3}, \left| -\frac{1}{3} \right|, 0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素;

③ 集合 $A = \{y | y = 2x^2 - 3x + 1\}$ 与集合 $B = \{(x, y) | y = 2x^2 - 3x + 1\}$ 是同一集合;

④ $\{(0, 0)\} = \{0\} = \emptyset$

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

2. 方程组 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ 的解 (x, y) 的集合是().

A. $\{2, 3\}$

B. $\{x = 2, y = 3\}$

C. $\{(2, 3)\}$

D. $\{(3, 2)\}$

3. 设 x, y, z 都是非零实数, 则 $T = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取值的集合是().

A. $\{4\}$

B. $\{4, -4\}$

C. $\{4, 0, -4\}$

D. $\{4, 0, -4, 2\}$

4. 下列各题中的 M 与 N 表示同一集合的是().

A. $M = \{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}, N = \{x | x^2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

B. $M = \{(x, y) | y = x^2 + 2, x \in \mathbf{R}\}, N = \{(x, y) | x = y^2 + 2, y \in \mathbf{R}\}$

C. $M = \{y | y = x^2 + 4, x \in \mathbf{R}\}, N = \{x | x = (y - 3)^2 + 4, y \in \mathbf{R}\}$

D. $M = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = 4n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$

5. 集合 $A = \{1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots\}$ 用描述法表示正确的是().

① $\{x | x = 2^n \pm 1, n \in \mathbf{N}\}$

② $\{x | x = (-1)^n(2n - 1), n \in \mathbf{N}\}$

③ $\{x | x = (-1)^n(2n + 1), n \in \mathbf{N}\}$

④ $\{x | x = (-1)^{n+1}(2n - 1), n \in \mathbf{N}\}$

A. ④

B. ①④

C. ②④

D. ③④

6. 若 $A = \{-1, 1, 5, 6\}, B = \{x | x = t^2, t \in A\}$, 用列举法表示 B 应为 $B =$ _____.

7. 若 $x \in \mathbf{N}^*$, 则不等式 $2x - 7 < 3$ 的解集是 _____.

8. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 与 $B = \{0\}$ 是同一个集合, 则 $a =$ _____.

9. 已知 $A = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x - 4\}$, $a \in A$ 且 $a \in B$, 求 a .

10. 已知集合 A 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + 4 = 0$, ($a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$) 的解集.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值并写出 A ;

(2) 若 A 中有两个元素, 求 a 的取值范围.

二、能力提高

11. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{8}{4-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}\right\}$, 试用列举法表示集合 A .

12. 由实数 x , $-x$, $|x|$, $\sqrt{x^2}$, $\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合最多有多少个元素?

13. 已知数集 $A = \{a+3, (a-1)^2, a^2+5a+5\}$, 且 $-1 \in A$, 求实数 a 的值和集合 A .

1.2 子集、全集、补集

【导学提要】

一、内容导读

1. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A _____ 集合 B , 或集合 B _____ 集合 A , 记作 _____ (或 _____), 这时, 我们称集合 A 是集合 B 的 _____.

2. 当集合 A 不包含于集合 B , 或集合 B 不包含集合 A 时, 则记作 _____ 或 _____.

同时, “ $\subseteq$ ”也可以用“_____”表示, “ $\supseteq$ ”也可以用“_____”表示; “ $\subsetneq$ ”也可以用“_____”表示, “ $\not\subseteq$ ”也可以用“_____”表示.

3. _____ 是任何集合的子集, 即 _____.

4. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 同时, 集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 我们就说集合 A _____ 集合 B , 记作 _____.

5. 任何一个集合是它本身的 _____.

6. 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$ 时 (即 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不在 A 中), 我们就说集合 A 是集合 B 的 _____, 记作 _____ (或 _____).

7. 对于集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, 那么_____.
8. 空集是任何非空集合的_____.
9. 对于集合 A 、 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么_____.
10. 一般地, 设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 (即 $A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的_____, 记作_____, 即 $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.
11. 如果一个集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个_____, 通常用“ $\cup$ ”表示.

本节的重点是子集、补集的概念, 难点是弄清元素与集合, 属于与包含的区别.

二、要点解析

1. 怎样理解子集

(1) “ A 是 B 的子集”的含义是: A 的任何一个元素都是 B 的元素, 即由任意 $x \in A$, 能推出 $x \in B$.

(2) 在子集的定义中, 不能理解为子集 A 是集合 B 中的“部分元素”所组成的集合.

(3) 子集和真子集都具有传递性, 即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C \Rightarrow A \subsetneq C$.

(4) 若某集合有 n 个元素, 则它的所有子集的个数是 2^n ; 所有真子集的个数是 $2^n - 1$.

2. 如何理解真子集

(1) 从定义理解: 若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集. 判断时首先确定 A 是 B 的子集, 且 B 中含有 A 中不含有的元素.

(2) 从实例理解: 如集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \subseteq B$, 而 $4 \in B$, $4 \notin A$, 即 $A \neq B$, 所以, A 是 B 的真子集.

(3) 用图示法理解: 如图 1-1 所示, A 是 B 的真子集.

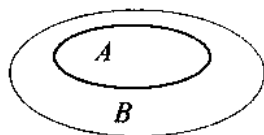


图 1-1

3. 怎样理解集合与集合, 元素与集合的关系

(1) 集合与集合间的关系是“包含”或“相等”或“不包含”的关系, 用符号表示为“ $\supseteq$ ”, “ $=$ ”或“ $\not\supseteq$ ”; 而元素与集合的关系是“属于”或“不属于”, 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”表示. 要注意它们的区别, 如 a 和 $\{a\}$ 的关系是: $a \in \{a\}$, 不能写成 $a = \{a\}$ 或 $a \subseteq \{a\}$.

(2) 研究集合与集合的关系时, 都是用元素与集合的关系来定义的, 因此, 判断两集合的关系时, 应回到研究元素与集合的关系上去, 即观察一个集合中的任一元素是否是另一个集合的元素.

4. 怎样理解全集与补集

(1) 全集是相对于研究问题而言的相对概念, 它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素, 因此, 全集是因具体的研究问题而异的. 如, 在研究数集时, 常常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集.

(2) 用数学的三种语言表示全集与补集.

普通语言: 设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 ($A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集.

符号语言: $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{且 } x \notin A, A \subseteq S\}$

图象语言: 如图 1-2 所示.

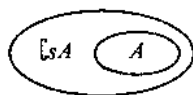


图 1-2

(3) 注意理解补集的特殊性质: $\complement_S S = \emptyset$, $\complement_S \emptyset = S$, $\complement_S (\complement_S A) = A$.

三、案例剖析

例1 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

分析: 由子集定义, 按子集中元素个数依次写出即可.

例2 设集合 $A = \{x \mid x = b^2 + 1, b \in \mathbf{R}\}$ 、 $B = \{x \mid x = b^2 - 6b + 11, b \in \mathbf{R}\}$, 下列关系正确的是().

A. $A \subsetneq B$

B. $B \subsetneq A$

C. $A = B$

D. $A \not\subset B$ 且 $B \not\subset A$

分析: 将题中两集合化简得 $A = \{x \mid x \geq 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbf{R}\}$.

答案: B.

例3 设全集 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $A = \{1, |a - 8|, 9\}$, $\complement_U A = \{5, 7\}$, 求 a 的值.

分析: 由 $\complement_U A$ 及全集 U 可得到 A 中元素, 结合条件中 A 分析可求得 a .

答案: $a = 11$ 或 $a = 5$.

四、思维拓展

例4 设集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 9 = 0, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值或范围.

分析: $B \subseteq A$, 包括 $B \subsetneq A$ 和 $B = A$ 两种情况, 所以该题需分类结合一元二次方程根的情况加以解决.

答案: $a = 3$ 或 $a > \frac{13}{4}$.

例5 设 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{b, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 和 b 的值.

分析: 由 $\complement_U A = \{5\}$ 可知 $5 \in U$, $5 \notin A$, $3 \in A$, 结合 A , 易建立 a 、 b 关系而求得 a 、 b 的值.

答案: $a = -4$, $b = 3$ 或 $a = 2$, $b = 3$.

五、方法提炼

1. 判定两集合间的关系, 其基本方法是归结为判定元素与集合的关系.
2. 证明或解决两集合相等的问题, 主要是根据集合相等的定义.
3. 在求一个集合的子集或真子集时一定不能漏掉空集.
4. 求集合的补集或解决与补集有关的问题要注意文氏图的利用.
5. 处理有关含参数的问题, 要注意对参数进行讨论.

题海冲浪

一、基础训练

- 下列说法中,正确的是().
 - 空集是任何集合的真子集
 - 任何集合都有两个子集
 - 任何集合都是其自身的子集
 - 若 $A \subseteq B$, 则必有 $A \subsetneq B$
- 下列关系中正确的是().
 - $\mathbf{R}^+ \in \mathbf{R}$
 - $\emptyset \notin \{\emptyset\}$
 - $\emptyset \subsetneq \{0\}$
 - $0 \subseteq \{0\}$
- 集合 $\{3, 6, 9, 12\}$ 的子集和真子集个数分别是().
 - 13, 12
 - 15, 14
 - 17, 16
 - 16, 15
- 设 $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 若 $A \subsetneq B$, 则 a 的取值范围是().
 - $a \geq 1$
 - $a \leq 1$
 - $a \leq 3$
 - $a \geq 3$
- 已知 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x \mid x > 3\sqrt{3}\}$, $a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, 则().
 - $a \subseteq \complement_U A$
 - $a \not\subseteq \complement_U A$
 - $\{a\} \subseteq A$
 - $\{a\} \subsetneq \complement_U A$
- 集合 $M = \{2, 4, 6\}$ 的真子集是_____.
- 若 $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{5\}$, $C = \{0, 3\}$, 则 $\complement_A B =$ _____, $\complement_A C =$ _____.
- 已知 $A = \{2, 2x+1, 5x-2\}$, $B = \{2, 4x-3, 3x+2\}$, 若 $A = B$, 则 $x =$ _____.
- 若集合 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\complement_U A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\complement_U B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, 求集合 B .
- 已知集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2 - x + 1\}$, 若 $B \subsetneq A$, 求 x 的值.