中学数学教材教法

第一分册　代数部分

扬州师范学院数学系

说　明

中学数学教材教法课程，是高等师范院校数学系开设的必修课程之一，它直接关系到师范院校数学系的培养目标，因此，普遍受到大家的重视。

《中学数学教材教法》教材，过去国内出版甚少，且因中学数学教材的删减、增加和渗透，变动亦多。近年来已有些出版社组织编写了一些材料，但多数系参考性资料。为此，我系在多年教学实践的基础上，同时参阅学习了国内外有关资料，由数学教学法教研室主任毛鸿翔和高古凤付教授等编写了这部《中学数学教材教法》。

《中学数学教材教法》编写的指导思想：基于高等师范院校数学系单独讲授《解析几何》、《数学分析》和《概率与数理统计》等课程，中学数学有关内容的教材教法，在这些课程的教学中一并处理。《中学数学教材教法》集中讲授大学不单独开设课程而内容又是中学数学的主要部分，结合教学法，阐述力求深透，而不拘泥于现行中学数学内容，面面俱到。全部内容分代数、几何、教学法三部分，并附必要的习题作业。通过学习，不但对中学数学的教材和教学方法要求有较好的掌握，同时对初等数学方面的素养获得必要的提高。

《中学数学教材教法》除作教材外，也可用作中学数学教师的进修和参考材料，祈望对读者有所俾益，由于我们的

经验尚不丰富，材料的搜集取舍，也存有局限性，错误难免，请不吝指正。

扬州师范学院数学系

一九八二年十一月

目　录

引言 中学代数课程的内容与安排

关于什么是代数以及代数的基本问题是什么这两个问题的观点，随着代数这门科学的发展有着几次改变。十六世纪后期韦达引进了字母表示法，当时人们把代数看成是关于字母的计算，关于由字母拼成的公式的变换以及关于解代数方程等等的科学，它与算术的不同在于算术仅仅是对具体数字的运算。在十七世纪六十年代欧拉写的著作“代数学引论”中明显地体现了这种观点，他把代数定义成各种量的计算的理论。在十八世纪末及十九世纪初，代数的中心问题之一，即代数方程的解法，逐渐被人们认为是中心问题，许多数学家创造了关于研究一元n次代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的复杂理论，人们把代数理解为研究方程理论的科学。例如在十九世纪中叶谢尔的两卷代数里，把代数定义成代数方程理论，就体现了这种观点。十九世纪后半期内，代数这门科学开始在力学、物理学以及数学本身找到了越来越多的研究对象（向量、矩阵、张量、超复数等等），对于这些对象很自然地要考虑到它们的运算，然而这些运算满足一些不同于有理数的其他规律。与此相应，代数学就起了质的变化，人们把代数理解为是研究各种代数结构的科学，（如果对于某种对象的集合，给出了一些运算及这些运算所满足的规律，那末就说给出了某一个代数的结构），这也就是所谓公理化的代数或抽象代数。这一观点，回到了韦达时代的代数是字母

计算学的观点，但是已经上升到更高级的形态。

作为中学数学科目的代数与作为科学的近代代数，就其性质和内容来说，有着显著的差别。在数学课程现代化运动中虽然有人也企图以结构化、公理化的思想来改革中学数学，但目前我们使用的教材，引入代数这门课程的内容是很庞杂的，涉及到数学的好几个分支。这些内容，大体上可以归纳为以下一些项目：

1、数的概念及其运算　在算术数的基础上，逐步引进负数、无理数、虚数把数集从算术数集扩展到有理数集、实数集、复数集，学习在各种数集里的各种代数运算，以及在实数集里对正实数的对数运算。

2、解析式的恒等变形　在小学数学中已学过一些代数初步知识（用字母表示数、解最简单的方程等）的基础上，系统地学习整式、分式、根式（主要是二次根式）的变形和运算，结合初等函数的研究，学习指数式、对数式、三角函数式的恒等变形。

3、方程和方程组　随着数和式的知识的扩展，以研究一元一次方程、一元二次方程、二元、三元线性方程组为重点，学习其他一些简单方程、方程组的解法，大体的顺序是：

（1）在有理数集里解一元一次方程、二元、三元一次方程组，以及可用它们来解的分式方程、分式方程组，列出方程和方程组解应用题。

（2）在实数集里解一元二次方程，并对一元二次方程进行讨论。以此为基础，学习简单的高次方程、分式方程、无理方程的解法，并在已有的解一次方程组的基础上，学习不太复杂的二元二次方程组的解法。

（3）结合初等函数的研究，学习简单的指数方程，对数方程、三角方程的解法。

（4）引进二阶、三阶行列式，利用行列式解线性方程组并进行讨论。作为选学教材，还引进矩阵的初步知识，介绍用高斯消去法解线性方程组。

（5）在引进复数以后，学习关于一元n次方程的一些简单理论，以及某些特殊高次方程的解法。

4、不等式　首先在有理数集里学习一元一次不等式的解法，在数集扩展到实数集学过二次函数以后，进一步学习一元一次不等式组和一元二次不等式的解法；最后再在高中阶段系统地学习关于代数不等式的一些重要知识，至于初等超越不等式则不作专门研究。

5、函数　在初中阶段先学习函数的初步知识，在高中阶段系统地学习应用初等方法研究有理指数的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

6、等差数列和等比数列，数学归纳法。

7、排列、组合和二项式定理。

8、概率初步。

9、逻辑代数初步（作为选学内容）。

以上这些内容的学习，穿插在中学的各个年级，所占的教学时数约为数学教学总时数的$\frac{3}{8}$。

从以上列举的这些项目可以看出中学代数这门课程的内容既不同于近代代数，也不完全是古典代数。过去代数与三角是作为两门课程在中学里设置的，现在则把三角的内容并归代数，所以也与传统的中学代数课程不全相同。

对于上面所列举的这些内容的具体安排，可以有不同的

方案，其中数、式、方程、不等式和函数这些内容，相互间有密切联系，必须交错地进行学习，有些知识还要考虑到与几何以及其它有关学科的配合，在研究分析教材时，首先就要抓住线索，这样才能使教学工作有目的有计划地循序前进。

第一章　数　系

§1·1　概　述

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学。研究数学，应用数学这一工具来解决各种实际问题，首先必须建立起数的概念。在中小学数学课程中，使学生从认识自然数开始，逐步引进一些新的数。扩展数的概念是主要教学任务之一。

数的概念的形成和发展的过程大体可表示为：

自然数→分数（正有理数）→非负实数→实数→复数

值得注意的是，在数的概念的发展过程中，数和形是相互作用的。分数、无理数的概念都是和测量连续量有关，而负数、复数也分别和数轴上的点、平面上的点联系起来。因此，形数结合对于理解数的理论和中学数学教学，都有极重要意义。

研究数的理论，首先就要建立自然数系，然后再在这个基础上逐步加以扩展。扩展一般采用两种形式，一种是把新元素添到已建立的数系中而扩展；另一种是从理论上创造一个集合，即通过定义与之等价的类来建立新数系，然后指出新数系的一个真子集是和以前的数系同构。因此，作为科学的

数系建立过程一般采用如下的扩展过程：

$$N\longrightarrow I\longrightarrow Q\longrightarrow R\longrightarrow C$$

（自然数）（整数）（有理数）（实数）（复数）

中小学生由于知识水平和年龄特征的限制，是不适宜过份强调理论的，抽象的研究作用。因此，我国现行的通用教材，依据我国具体的实际情况，采用渗透近代数学观点的办法，而不采用抽象的公理化体系，随着年级的提高，逐步加强理论比重。

目前我国中小学课程关于数的扩展内容大致采用如下过程：

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{（添零）}}\text{扩大自然数集}\xrightarrow{\text{（添分数）}}\text{算术数集}\xrightarrow{\text{（添负数）}}$$

$$\text{有理数集}\xrightarrow{\text{（添无理数）}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{（添虚数）}}\text{复数集}$$

作为中学数学教师，熟悉用代数结构的观点和严格公理系统来处理数的概念的扩展，对分析、处理中学教材进行教学是有好处的。例如，对中学教材可以明确地分清哪些是基本概念，哪些是定义，哪些是公理，哪些是需要证明的性质，哪些是定义合理性的说明等等。

§1·2　自然数、零

（一）基数理论

大家知道，自然数有两种作用，一是用来计数（有几个？）；二是用来排序（第几个？），因此，抽象出来的自然数的理论，主要就有两种，一种是自然数的基数理论；另一种是自然数的序数理论。

基数理论以不定义的概念“集合”为基础，把一切等价（等势或等浓度）集合的共同象征叫做基数（或势），而把每一个有限集合的基数就定义为自然数，例如人的两只手、两只眼睛、两条腿……都是等价集合，这类集合的基数就用符号2来表示，2是一个自然数。

在定义了自然数以后，就利用集合的知识来定义自然数集中元素间的大小关系和加法运算、乘法运算。

定义1　设有限集合A和B的基数分别是自然数a和b。当

1°　A和B等价时，则说自然数a等于b，记作$a=b$；

2°　A和B的一个真子集等价时。则说自然数a小于b，记作$a<b$；

3°　A的一个真子集与B等价时，则说自然数a大于b，记作$a>b$。

定义2　设两个不具有公共元素的有限集合A和B的基数分别是a和b，如果$C=A\cup B$，就称集合C的基数c为a与b的和，记作$a+b=c$，a叫做被加数，b叫做加数，求两数和的运算叫做加法。

在这个基础上，给出自然数乘法的定义。

定义3　设b个等价集合A_1，A_2，……，A_b（两两间不具有公共元素）的基数都是a，由这b个集合构成的并集。

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_b=C$$

就称集合C的基数c为a与b的积，记作$a\times b=c$*，a叫做被乘数，b叫做乘数，求两数积的运算叫做乘法。

采取了以上这些定义，也就容易利用集合的知识，论证

*或记作$a\cdot b=c$

在自然数集里，两个自然数的和与积都是唯一存在的。进一步还可以论证自然数的加法、乘法的基本运算律和自然数的次序之间的基本顺序律成立：

加法的交换律： $a+b=b+a$；

加法的结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法的交换律： $a\cdot b=b\cdot a$；

乘法的结合律： $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

乘法对于加法的分配律： $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

次序的全序性：对于两个自然数a和b，下面三种关系必有一种且仅有一种成立：

$a=b$；　$a>b$；　$a<b$。

次序的自反性： $a=a$；

次序的对逆性： $a>b\Rightarrow b<a$；

次序的传递性： $a=b$，　$b=c\Rightarrow a=c$；

$a>b$，　$b>c\Rightarrow a>c$；

加法的单调性： $a<b$且$c\leqslant d\Rightarrow a+c<b+d$；

乘法的单调性： $a<b$且$c\leqslant d\Rightarrow a\cdot c<b\cdot d$；

阿基米德公理： 对于任意两个自然数a和b，必存在一个自然数n，使 $na>b$。

至于数集中的减法和除法两种运算，则都可以用逆运算的关系来定义。

定义4　设a，b是两个自然数，如果存在一个自然数c，能使 $b+c=a$，则称c为a与b的差，记作$a-b=c$，a叫做

被减数，b叫做减数，求两个数的差的运算叫做减法。

定义5　设a、b是两个自然数，如果存在一个自然数c能使$b\cdot c=a$，则称c为a除以b所得的商，记作$a\div b=c$（或$\frac{a}{b}=c$），a叫做被除数，b叫做除数，求两个数的商的运算叫做除法。

在给出以上定义以后，当然还得探讨在自然数的集合里，减法运算和除法运算在什么条件下才能够实施，并且论证当运算可以实施时，两个数的差和商都是唯一存在的。

做好了上面这些工作，自然数系就算建立起来了，至于自然数的其它一些性质，都可以藉此推导出来。

（二）序数理论

这种理论完全采用公理化的方法，它以一个基本关系"后继"与四条公理* 为基础，并且还使用"对应"这一不定义的概念。

定义1　任何一个非空集合N的元素叫做自然数，如果在这个集合里的某些元素之间有一基本关系"后继"（用符号"$'$"来表示），满足下面的公理：

1° 存在着数"1"，它不后继于任何数（即$1\in N$，对于任意数a，$a'\neq 1$）；

2° 对于任何一个数a，存在着一个且仅存在着一个后继数a'，（即$a\in N$，则有一个且仅有一个a'存在，且$a'\in N$）；

3° 除1以外，任何数只能是一个数的后继数（即由$a'=b'$，应有$a=b$）；

4°（归纳公理）设N有一个子集M，满足条件：

*这个公理系统是意大利数学家裴雅诺（1858～1932）提出的。

Ⅰ）$1 \in M$；

Ⅱ）若$a \in M$，则$a' \in M$；

则$M = N$；

在这个基础上，应用公理的方法定义自然数的加法、乘法两种运算，由此给出加数、和；被乘数、乘数、积的定义。

定义2　自然数的加法是指这样的对应，由于它，对于每一对自然数a、b，存在唯一的一个自然数$a+b$与之对应，且具有以下的性质：

1°对于任何数a，$a+1=a'$；

2°对于任何数a、b，$a+b'=(a+b)'$

数a和b叫做加数，而$a+b$叫做它们的和。

定义3　自然数的乘法是指这样的对应，由于它，对于每一对自然数a、b，存在唯一的一个自然数$a \cdot b$与之对应，且具有以下的性质：

1°对于任何数a，$a \cdot 1 = a$；

2°对于任何数a、b，$a \cdot b' = a \cdot b + a$；

数a叫做被乘数，b叫做乘数，a和b都叫做因数，$a \cdot b$叫做积；

在给出了定义以后，下一步就论证这样定义下的和与积都是唯一存在的，论证加法、乘法这两种运算服从基本运算律。作为例子，这里只证明加法的结合律和加法的交换律。

例1　证明　$(a+b)+c=a+(b+c)$

证：设a、b固定，M是断言成立时那些c的集合。

Ⅰ）$(a+b)+1=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$

故　$1 \in M$。

Ⅱ）设$c \in M$，即$(a+b)+c=a+(b+c)$

故 $(a+b)+c'=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'$

$$=a+(b+c)'=a+(b+c')$$

从而 $c'\in M$

依归纳公理，对任意自然数a、b、c，

$$(a+b)+c=a+(b+c)。$$

例 2 证明 $a+b=b+a$

证：Ⅰ）首先对于任意数a，证明$a+1=1+a$。

设M是使等式成立的任意数a的集合，显然，$1\in M$。

若$a\in M$，则由于$a+1=1+a$，那么，利用结合律。

得$a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1$

$$=1+(a+1)=1+a'$$

故$a'\in M$，依归纳公理，对任意数a，$a+1=1+a$，

Ⅱ）再设M是对任意给定的数a，使等式$a+b=b+a$，成立的一切数b的集合，则由于Ⅰ），$1\in M$

若$b\in M$，即 $a+b=b+a$，则

$a+b'=(a+b)'=(b+a)'=b+a'$

$$=b+(a+1)=b+(1+a)=(b+1)+a=b'+a$$

故$b'\in M$

依归纳公理，对任意自然数a、b $a+b=b+a$。

利用二数和的概念，可以定义自然数的顺序。

定义 4 设a、b是两个已知的自然数，如果a是b与另一个自然数k的和，即$a=b+k$，则说a大于b，记作$a>b$；或说b小于a，记作$b<a$。

由此可论证关于自然数的基本顺序律成立。

至于自然数的减法、除法这两种运算，可以象基数理论

一样，利用逆运算关系来定义，这样，也就把自然数的序数理论建立起来了。

在序数理论中规定了自然数的大小顺序后，在自然数列中，很明显排在后面的数都大于它前面的任一个数，特别，1是自然数列中的最小数。关于自然数列，还有两个重要性质：

1° 在任意两个邻接的自然数 a 与 a' 之间，不存在自然数 b，满足 $a<b<a'$。（自然数集的离散性）

2° 自然数的任何非空集必存在一个最小数，即小于这个集合中所有其它元素的数。（自然数集的良序性）

以上自然数的两种理论各有特点。自然数的基数理论比较直接地建立在经验的基础上，因此易于理解，但它仅仅反映了自然数表示数量的意义，即回答多少个的问题，而对于自然数表示顺序这一重要意义，回答第几个的问题就揭露得不够。自然数的序数理论，采取了公理化的形式，更深刻、更明确、更完全地反映了自然数的本质。但比较抽象，初学者不易接受。因此在小学教学中讲自然数虽然主要是根据自然数的基数理论，但也不能偏重于这一理论。例如引进自然数列的概念，就已渗透了序数理论的思想。

（三）扩大的自然数集

在基数理论中，我们把"零"定义为空集的基数。从序数理论观点出发，我们把"零"作为唯一的在数"1"前面的数而引入自然数列，这样便获得所谓扩大的自然数集。扩大的自然数集中的任何数叫做整数。

关于0的运算，有如下规定：

$$a+0=0+a=a \qquad a\cdot 0=0\cdot a=0$$

显然，0小于任何自然数。

自然数系和扩大的自然数系都是最简单的代数系，它们都是一个半群。所谓半群，就是具有一种二元运算的集合，并且这种运算满足结合律。因此，扩大自然数集对于普通加法构成一个半群，而且是一个可交换的半群，“0”是它的恒等元素，而自然数集对于普通乘法也构成一个可交换的半群，“1”是它的恒等元素。

（四）数学归纳法

数学归纳法是用来证明某些与自然数 n 有关的数学命题的重要方法。在中学教材中把它放在二项式定理前面来讲，其意图的一方面是为了应用这种方法去论证二项式定理的正确性，但更重要的一方面是使学生了解“依此类推”法不完全性，需要学会一种严格推理的方法。

数学归纳法原理　设 $P(n)$ 是有关自然数 n 的一个命题，如果 i）$P(1)$ 成立； ii）假定 $P(k)$ 成立，则 $P(k+1)$ 也成立；那么，$P(n)$ 对任意自然数 n 都成立。

这个原理的依据就是序数理论中的公理4°。

第二数学归纳法原理　设 $P(n)$ 是有关自然数 n 的一个命题，如果 i）$P(1)$ 成立；ii）假定 $P(x)$ 对于所有适合 $x<k$ 的自然数 x 成立，则 $P(k)$ 成立，那么，$P(n)$ 对任意自然数 n 都成立。

这个原理的依据是自然数集的良序性。

我们应该明确数学归纳法的基本思想是递推，它的两个步骤中的第一步是递推的基础，第二步是递推的依据，二者