

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述 5-1-30

§ 5-2 线性系统的最佳设计 5-2-1

5-2-1 最佳设计问题的提出 5-2-1

5-2-2 最佳设计的性能指标 5-2-4

5-2-3 最佳滤波原理 5-2-7

一、维纳最佳滤波原理 5-2-7

二、卡尔曼滤波原理 5-2-14

5-2-4 最佳控制原理 5-2-19

一、确定性系统最佳控制原理 5-2-19

二、随机性系统最佳控制原理 5-2-21

三、随机性系统最佳控制问题的分解原理 5-2-23

§ 5-3 线性系统的基本特性 5-3-1

5-3-1 引言 5-3-1

5-3-2 线性系统的可观性 5-3-2

一、系统可观性概念 5-3-2

二、系统完全状态可观性准则 5-3-2

三、系统一致可观性概念 5-3-14

5-3-3 线性系统的可控性 5-3-29

一、系统可控性概念 5-3-29

二、系统完全状态可控性准则 5-3-30

三、系统完全输出可控性准则 5-3-39

四、系统一致可控性概念 5-3-40

5-3-4 线性系统的稳定性	5-3-57
一、系统稳定性概念	5-3-57
1. 系统的描述	5-3-57
2. 平衡状态	5-3-58
3. 稳定性概念	5-3-58
二、李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、利用李雅普诺夫函数	
估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4 线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1 状态变量的线性变换及	
系统的不变量	5-4-1
5-4-2 线性系统的若当规范形式	5-4-3
5-4-3 线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4 线性系统的可观规范形式	5-4-31
§ 5-5 常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1 常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2 常系数、线性系统的可观实现	5-5-7
5-5-3 常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、并联可控实现	5-5-9
二、并联可观实现	5-5-13

5-5-4	常系数、线性系统的串联形实现	5-5-15
5-5-5	常系数、线性系统的最小实现	5-5-21
§ 5-6	状态反馈问题	5-6-1
5-6-1	反馈问题	5-6-1
5-6-2	极点配置问题	5-6-8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题	5-6-9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题	5-6-18
5-6-3	稳定性问题	5-6-26
一、	能稳定性	5-6-26
二、	衰减速度	5-6-28
三、	减少反馈量	5-6-29
四、	轨出反馈的稳定性	5-6-33
5-6-4	分离性控制问题	5-6-35
§ 5-7	观文口原理	5-7-1
5-7-1	引言	5-7-1
5-7-2	观文口和“可检测系统”	5-7-1
一、	观文口构成的基本思想	5-7-1
二、	观文口和“可检测系统”	5-7-5
5-7-3	观文口的基本关系	5-7-13
5-7-4	基本观文口	5-7-26
5-7-5	降维观文口	5-7-29

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

六、举例	6-2-44
6-2-2 连续、线性系统的最佳滤波原理	6-2-67
一、连续、线性系统的最佳滤波问题	6-2-67
二、等效的离散、线性系统	6-2-68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的 极限情况	6-2-68
2 等效的离散、线性系统	6-2-72
三、连续、线性系统滤波的基本标式	6-2-74
四、举例	6-2-81
§ 6-3 最佳滤波的稳定性和误差分析	6-3-1
6-3-1 最佳滤波的稳定性	6-3-1
一、最佳滤波的稳定性概念	6-3-1
二、稳定性准则	6-3-2
6-3-2 最佳滤波的误差分析	6-2-8
一、误差协方差矩阵微分方程和 差分方程的解析解	6-3-8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解	6-3-8
2 误差协方差矩阵差分方程的解析解	6-3-18
二、误差协方差矩阵的上、下界	6-3-22
三、误差协方差矩阵的渐近特性	6-3-33
§ 6-4 模型误差分析，最佳滤波的 发散现象和克服发散的方法	6-4-1

6-4-1 模型误差分析	6-4-1
一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2 泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3 克服发散的方法	6-4-16
一、限定下界法	6-4-16
二、状态扩充法	6-4-20
三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
四、限定记忆泸波	6-4-31
五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-8 灵敏度分析

任何系统的运行情况和品质指标，都是由系统的参数所决定的，但是，实际系统的参数值与其设计值总是存在差异的，或者系统的某些参数会因某种原因而变化，因此，有必要定量地讨论，系统参数变化对系统品质指标的影响。这就是灵敏度分析所要解决的问题。所谓灵

敏度，就是系统参数变化对其品质影响的一种数学表征。例如，设 y 为系统的某一品质指标，而 x 为系统的某一参数值，则 y 对 x 的灵敏度定义为：

$$S_x^y = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x}{x}} = \frac{x}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} \quad (5-8-1)$$

式中 S_x^y 是 y 对 x 的灵敏度。式 (5-8-1) 的意思是 y 对 x 的灵敏度用两者变化的百分值之比来表示。

5-8-1 经典灵敏度和闭环极点偏移与增益偏移以及开环零点，极点偏移间的关系

设有系统结构图如图 5-8-1

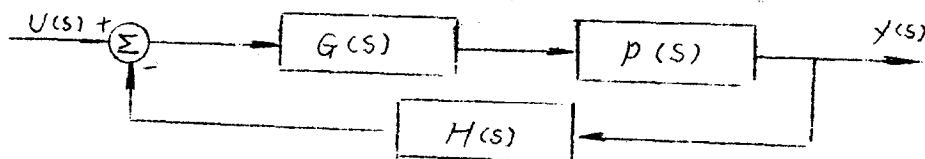


图 5-8-1 系统结构图

由此得闭环系统传递函数为

$$W(S) = \frac{P(S)G(S)}{1 + P(S)G(S)H(S)}$$

则

$$\begin{aligned} S_P^W &= \frac{P(S)}{W(S)} \cdot \frac{\partial W(S)}{\partial P(S)} \\ &= \frac{P(S)}{\frac{P(S)G(S)}{1 + P(S)G(S)H(S)}} \\ &= \frac{G(S)(1 + P(S)G(S)H(S)) - P(S)G(S)G(S)H(S)}{(1 + P(S)G(S)H(S))^2} \\ &= \frac{1 + P(S)G(S)H(S)}{G(S)} \cdot \frac{G(S)}{(1 + P(S)G(S)H(S))^2} \\ &= \frac{1}{1 + P(S)G(S)H(S)} \quad (5-8-2) \end{aligned}$$

称为上述系统的经典灵敏度。当 S_P^W 为一实数时，式 (5-8-2)

所示的系统的经典灵敏度也可解释为 $W(S)$ 的变化百分值与 $P(S)$ 的变化百分值之比。但是往往 S_P^W 并不是实数，因此上述解释就比较困难。这就是经典灵敏度的局限性。

下面讨论闭环极点偏移与增益偏移以及开环零点和极点偏移间的关系

设系统的开环传递函数为

$$W_o(S) = W_o(S, K, Z_j, p_i) \quad (5-8-3)$$

式中

K —— 开环放大倍数，即开环增益；

$-z_j$ —— 开环零点 (n 个)；

$-p_i$ —— 开环极点 ($m+n$ 个)。

则得

$$\begin{aligned} dW_o(S) = & \frac{\partial W_o(S)}{\partial S} dS + \frac{\partial W_o(S)}{\partial K} dK + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_o(S)}{\partial Z_j} dZ_j \\ & + \sum_{i=1}^{m+n} \frac{\partial W_o(S)}{\partial p_i} dp_i \end{aligned} \quad (5-8-4)$$

设系统闭环极点为 $S = -qi$ ，它是特征方程

$$1 + W_o(S) = 0 \quad (5-8-5)$$

之根，因此得

$$qi = qi(K, Z_j, p_i) \quad (5-8-6)$$

对式 (5-8-6) 取全微分得：

$$\begin{aligned} dq_i = & K \frac{\partial q_i}{\partial K} \frac{dK}{K} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial Z_j} dZ_j + \sum_{j=1}^{m+n} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} dp_j \\ = & S_K^i \frac{dK}{K} + \sum_{j=1}^n S_{Z_j}^i dZ_j + \sum_{j=1}^{m+n} S_{p_j}^i dp_j \end{aligned} \quad (5-8-7)$$

式中

$$S_K^i = K \frac{\partial q_i}{\partial K} \text{ —— 增益灵敏度；}$$

$$S_{Zj}^i = \frac{\partial q^i}{\partial Z_j} \text{——零点灵敏度；}$$

$$S_{pj}^i = \frac{\partial q^i}{\partial p_j} \text{——极点灵敏度。}$$

这些灵敏度可如下求得：

由式(5-8-5)得

$$dW_0(S) \Big|_{S=-q^i} = 0$$

也就是说，当 $S = -q^i$ ，即 $dS = -dq^i$ 时， $dW_0(S) = 0$ ，将此结果代入式(5-8-4)得：

$$\begin{aligned} dq^i = & \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial K}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \Big|_{S=-q^i} \cdot dK + \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial Z_j}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \Big|_{S=-q^i} \cdot dZ_j \\ & + \sum_{j=1}^{m+n} \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial p_j}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \Big|_{S=-q^i} \cdot dp_j \quad (5-8-8) \end{aligned}$$

比较式(5-8-3)和式(5-8-7)得

$$S_K^i = K \frac{\partial q^i}{\partial K} = K \left. \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial K}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \right|_{S=-q^i} ;$$

$$S_{Zj}^i = \frac{\partial q^i}{\partial Z_j} = \left. \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial Z_j}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \right|_{S=-q^i} ;$$

$$S_{pj}^i = \frac{\partial q^i}{\partial p_j} = \left. \frac{\frac{\partial W_0(S)}{\partial p_j}}{\frac{\partial W_0(S)}{\partial S}} \right|_{S=-q^i} ;$$

$$\text{设 } W_0(S) = KW_1(S) = \frac{K \prod_{j=1}^n (S + Z_j)}{\prod_{i=1}^{m+n} (S + p_i)}$$

则得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_0(S)}{\partial K} = W_1(S) = \frac{W_0(S)}{K} ; \\ \frac{\partial W_0(S)}{\partial Z_j} = \frac{W_0(S)}{(S + Z_j)} ; \\ \frac{\partial W_0(S)}{\partial p_j} = \frac{-W_0(S)}{(S + p_j)} . \end{array} \right.$$

因此有

$$\begin{cases} W_o(-qi) = -1 ; \\ \left. \frac{\partial W_o(S)}{\partial K} \right|_{S=-qi} = -\frac{1}{K} ; \\ \left. \frac{\partial W_o(S)}{\partial Zj} \right|_{S=-qi} = -\frac{1}{Zj - qi} ; \\ \left. \frac{\partial W_o(S)}{\partial pj} \right|_{S=-qi} = -\frac{1}{qi - pj} . \end{cases}$$

所以得

$$\begin{cases} s_K^i = -\frac{1}{\left. \frac{\partial W_o(S)}{\partial S} \right|_{S=-qi}} ; \\ s_{Zj}^i = \frac{s_K^i}{Zj - qi} ; \\ s_{pj}^i = \frac{s_K^i}{qi - pj} \end{cases} \quad (5-8-10)$$

最后得：

$$dq^i = s_K^i \left\{ \frac{dK}{K} + \sum_{j=1}^n \frac{dZj}{Zj - qi} + \sum_{j=1}^{m+n} \frac{dpj}{qi - pj} \right\} \quad (5-8-10)$$

式(5-8-10)就是闭环极点偏移与增益偏移以及开环零点偏移间的关系。

由于

$$W(S) = \frac{W_0(S)}{1 + W_0(S)} = \sum_{i=1}^{m+n} \frac{Q_i}{(S + q_i)}$$

式中

$$Q_i = \frac{(S + q_i)W_0(S)}{1 + W_0(S)} \Big|_{S = -q_i} \quad (\text{如果无重极点})$$

若设

$$\Phi_i(S) = \frac{(S + q_i)W_0(S)}{1 + W_0(S)}$$

则有

$$\Phi_i(-q_i) = Q_i$$

由此得

$$(1 + W_0(S))\Phi_i(S) = (S + q_i)W_0(S)$$

上式两边微分后得

$$W_0'(S)\Phi_i(S) + (1 + W_0(S))\Phi_i'(S) = W_0(S) + (S + q_i)W_0'(S)$$

由此得

$$\Phi_i'(S) = \frac{W_0'(S) + (S + q_i)W_0'(S) - (1 + W_0(S))\Phi_i'(S)}{W_0'(S)}$$

由于 $W_0(-q_i) = -1$ ，代入上式得

$$\Phi_i'(-q_i) = -\frac{1}{W_0'(S)} \Big|_{S = -q_i} = Q_i = S_K^i$$

因此增益灵敏度 S_K^i 是闭环传递函数 $W(S)$ 在极点 $S = -q_i$ 处的函数。

5-8-2 比较灵敏度

上述经典灵敏度当 S_p^W 是复数时，其物理解释就比较困难，并且只能适合于单轨入单轨出系统，为此，就必需对它作进一步的推广，讨论所谓比较灵敏度的概念。

设有单轨入单轨出系统其结构图仍如图 5-8-1 所示，其中 $P(S)$ 认为是具有参数矢量 α 的对象传递函数，为明显起见改写成 $P(S, \alpha)$ ，而 $G(S)$ 和 $H(S)$ 则表示具有不变参数的子系统或称控制口，对象的标称值为 $P_n(S) = P(S, \alpha_0)$ ，其标称轨出为

$$Y_n(S) = Y_c(S, \alpha_0)$$

它与标称对象轨入作用 $u_n(S) = u_c(S, \alpha_0)$ 的关系为

$$Y_n(S) = P_n(S) u_n(S) \quad (5-8-11)$$

式中

$$u_n(S) = G(S) [u(S) - H(S) Y_n(S)] \quad (5-8-12)$$

同样地，对于实际对象 $P(S, \alpha)$ ，闭环系统的轨出 $Y_c(S, \alpha)$ 为

$$Y_c(S, \alpha) = P(S, \alpha) \cdot u_c(S, \alpha) \quad (5-8-13)$$

式中

$$u_c(S, \alpha) = G(S) [u(S) - H(S) Y_c(S, \alpha)] \quad (5-8-14)$$

由此可以得到标称轨出和由于参数变化而引起的实际轨出之间的差值

为：

$$\begin{aligned}
 E_c(S, \alpha) &= Y_n(S) - Y_c(S, \alpha) \\
 &= \frac{[P_n(S) - P(S, \alpha)] G(S) u(S)}{[1 + P_n(S) G(S) H(S)] [1 + P(S, \alpha) G(S) H(S)]} \\
 &\quad (5-8-15)
 \end{aligned}$$

设另外有一个开环系统，如图 5-8-2

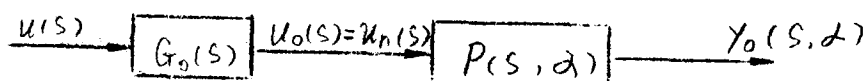


图 5-8-2 开环系统结构图

为了与闭环系统比较，应使此开环系统与闭环系统具有相同的标称值，即要求

$$u_o(S) = u_n(S) \quad (5-8-16)$$

这时就有

$$\begin{aligned}
 Y_o(S, \alpha_o) &= P(S, \alpha_o) u_o(S) = P(S, \alpha_o) u_n(S) \\
 &= Y_c(S, \alpha_o) = Y_n(S)
 \end{aligned}$$

因为

$$u_o(S) = G_o(S) \cdot u(S)$$

而

$$u_n(S) = \frac{G(S)}{1 + P_n(S) G(S) H(S)} \cdot u(S)$$

因此，要使式 (5-8-16) 成立，就必需有