韓　譯

范氏高等代數學

下　卷

韓桂叢　譯述

傅種孫
程廷熙　校訂

北京師範大學出版部印行

范氏高等代數學

下　卷

★

譯述者　韓桂叢

校訂者　傅種孫
程廷熙

北京師範大學出版部印行

韓譯范氏高等代數學(下卷)

譯述者　韓桂叢
校訂者　傅種孫　程廷熙
印刷者　北京師範大學出版部
發行者　北京師範大學出版部
地址：宣內大街甲169號
電話：②1358

XII. 無理函數.根式及分指數

根式之化簡

579. 方根. 今後a,b,…諸文字均表正數或表假定爲正值之文字式.

又$\sqrt[n]{a}$表a之n次主根,卽表n次方冪等於a之正數;換言之,卽由公式$(\sqrt[n]{a})^n=a$所定之正數.

當n表奇數時,$\sqrt[n]{-a}$表$-a$之n次主根,卽$-\sqrt[n]{a}$.

且今後所謂方根,卽指主根而言.

580. 註. 此處之方根乃狹義的用法;蓋凡n次方冪等於a之數,均爲a之n次根之一,而此種數永有n個.俟後當證明之.

例如,$2^2=4$,且$(-2)^2=4$,故2與-2二者均爲4之平方根.此後以$\sqrt{4}$指主根2,以$-\sqrt{4}$指他一根-2.

當n表奇數而a表實數時,則a之n次根有一爲實數,且與a同符號,其餘各根則均爲虛數.

當n表偶數而a表正數時,則a之n次根有二爲實數,數值相等而符號相反,其餘各根則均爲虛數.

當n表偶數而a表負數時,則a所有之n次根均爲虛數.

在較高深算學書中,尋常$\sqrt[n]{a}$表a之任一n次根,非如此處專指主根而言也.

581. **根式.** 凡如$\sqrt[n]{a}$或$b\sqrt[n]{a}$形狀之式均稱爲根式(radical); n稱爲根指數(index), a爲根底(radicand), 而b爲根式之係數.

當a, b二者均表有理數或有理式時,則$b\sqrt[n]{a}$稱爲簡根式(simple radical).

例如$5\sqrt[3]{4}$爲一簡根式,其根指數爲3,根底爲4,而係數爲5.

582. **計算根式之公式.** 計算根式之法則基於下列各公式,其中m, n, p均表正整數.

$$1.\quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

$$2.\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}. \qquad 3.\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$4.\quad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}. \qquad 5.\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

就1而言,若根式中根指數與根底之指數同以某正整數乘之,或將二者之公因數對消,則其值不變;例如$\sqrt[9]{a^6}=\sqrt[3]{a^2}$. 此法則與化簡分式之法則頗極相似.

上述諸公式可由定義$(\sqrt[n]{a})^n=a$,指數定律$(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$,及等式法則,§261, 3,

"若二正數之某同次方羃相等,則二數必相等"

證明之. 即

1. 因$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$; $(\sqrt[n]{a^m})^{n\cdot p}=(a^m)^p=a^{mp}$.

二者之np次方羃相等,故$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.

2. 因 $(\sqrt[n]{ab})^n=ab$; $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

二者之n次方冪相等，故 $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

3. 因 $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$; $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$.

二者之n次方冪相等，故 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

4. 因 $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$; $[(\sqrt[n]{a})^m]^n=[(\sqrt[n]{a})^n]^m=a^m$.

二者之n次方冪相等，故 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

5. 因$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a$; $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m\cdot n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$.

二者之mn次方冪相等，故 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

下列各例可表明以上各公式之用處

1. $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{8ab^3}=\sqrt{4b^2}\cdot\sqrt{2ab}=2b\sqrt{2ab}$.

3. $\sqrt[3]{\frac{3c}{d^3e^6}}=\frac{\sqrt[3]{3c}}{\sqrt[3]{d^3e^6}}=\frac{\sqrt[3]{3c}}{de^2}$.

4. $\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}}=\sqrt[10]{32x^{15}y^5}=\sqrt{2x^3y}$.

5. $(\sqrt[3]{2xy^2})^2=\sqrt[3]{(2xy^2)^2}=\sqrt[3]{4x^2y^4}=y\sqrt[3]{4x^2y}$.

583. **化簡根式** 若根式之根底化為最簡整式時，則視之為最簡根式．故根式得由下列各法則化簡之，其法顯然為由上述公式所推得者．

1. 若根底爲一式之方冪形狀,其指數與根指數有公因數,則將此公因數對消.

例如, $\sqrt[9]{27x^3y^6}=\sqrt[9]{(3xy^2)^3}=\sqrt[3]{3xy^2}$.

2. 若根底中之某因式爲方冪形狀,其指數恰被根指數除盡,則以根指數除此指數,而後將此因式移在根號以外.

例如, $\sqrt[4]{16x^7y^9}=\sqrt[4]{2^4x^4x^3y^8y}=2xy^2\sqrt[4]{x^3y}$.

3. 若根底爲分式則理母. 理母之法,以相當最簡式乘分子分母,以便將分母移在根號以外.

例如, $\sqrt[3]{\dfrac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4xyz}{8z^3}}=\dfrac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}$.

584. 相似根式 數根式若各化爲最簡形狀,僅係數不相同者,謂之相似(similar).

例如, $\sqrt{4x^3y}$ 及 $\sqrt{81x^5y^3}$ 卽相似根式,因其最簡形狀 $2x\sqrt{xy}$ 及 $9x^2y\sqrt{xy}$,僅係數不同也.

585. 將根式之係數移在根號以內.

因 $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^na}$,根式之係數,若以根指數乘其指數,則可移在根號以內.

習 題 33.

將下列各根式化爲最簡形狀.

1. $\sqrt{18}$. 2. $\sqrt{588}$. 3. $\sqrt[3]{-27^2}$. 4. $\sqrt[9]{-1000}$.

5. $\sqrt{3/2}$. 6. $\sqrt[3]{3/2}$. 7. $\sqrt[3]{3/4}$. 8. $\sqrt[5]{3/16}$.

9. $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$. 10. $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}$. 11. $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}$.

12. $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}$. 13. $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}$. 14. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

15. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$. 16. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.

17. $\sqrt[3]{x^6-x^2y^3}$. 18. $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^2}}$. 20. $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. 21. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}$.

22. $\sqrt[3]{1-\dfrac{a^3}{b^3}}$. 23. $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+2}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$. 24. $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.

將下列各根式之係數移在根號以內.

25. $3a\sqrt{3a}$. 26 $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$. 27. $3ax\sqrt[4]{1/27a^3x^3}$.

試證下列各組根式為相似.

28. $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, 及 $\sqrt{1/8}$. 29. $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$, 及 $\sqrt[3]{8/9}$.

30. $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)}$ 及 $\sqrt{x^4y^2+x^2y^3+x^2y^4}$.

根 式 之 演 算

586. 加法及減法. 根式相加減之法則如下:

欲將二個以上根式之代數和化為最簡形狀,先將各個根式化簡而後令其中相似根式之係數相加以集項即可.

例如,加 $\sqrt{16a^2b}$, $-\sqrt{9a^2b}$, $3\sqrt{2}$, 及 $-2\sqrt{1/2}$.

$$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{1/2}$$
$$=4a\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=a\sqrt{b}+2\sqrt{2}.$$

須注意二不相似根式之和不能化爲簡根式.

例如,除當x或y爲0時,不能得$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$;因平方之,則得$x+y+2\sqrt{xy}=x+y$, $\therefore 2\sqrt{xy}=0$, $\therefore xy=0$, $\therefore x=0$ 或 $y=0$.

587. **化根式爲有公根指數.** 由公式$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$可知二個以上根式常可化爲有公根指數之等值根式. 其最小公根指數(least common index)即其已知各根指數之最小公倍數.

例如將$\sqrt[6]{a^5}$及$\sqrt[8]{b^3}$化爲最小公根指數.

已知根指數6及8之最小公倍數爲24. 於是$\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[24]{a^{20}}$, 而$\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[24]{b^9}$.

588. **比較根式之大小.** 若欲比較已知根式之大小,則將其化最小公根指數.

例1. 比較$\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$及$\sqrt[6]{3}$之大小.

已知根指數15, 10, 6之最小公倍數爲30,而

$\sqrt[15]{16}=\sqrt[30]{16^2}=\sqrt[30]{256}$, $\sqrt[10]{6}=\sqrt[30]{6^3}=\sqrt[30]{216}$; $\sqrt[6]{3}=\sqrt[30]{3^5}=\sqrt[30]{243}$.

因$256>243>216$, 故$\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

例2. 比較$2\sqrt{3}$及$\sqrt[3]{41}$之大小.

將第一根式之係數移在根號以內, §585, 然後再將二根式化爲有公根指數6者,即得

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728};\ \sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

因$1728>1681$, 故$2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$.

589. **乘法及除法.** 由公式

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \text{ 與 } \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$$

得下列法則:

欲以一根式乘或除他一根式,遇必要時,先化之爲有最小公根指數. 然後分別求其係數與係數根底與根底之積或商即可.

例 1. $4\sqrt{xy}$ 乘以 $2\sqrt[3]{x^2y^2}$.

$4\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt[3]{x^2y^2}=8\sqrt[6]{x^3y^3}\cdot\sqrt[6]{x^4y^4}=8\sqrt[6]{x^7y^7}=8xy\sqrt[6]{xy}$.

例 2. 以 $2\sqrt[4]{xy}$ 除 $6\sqrt{xy}$.

$6\sqrt{xy}/2\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{x^2y^2}/\sqrt[4]{xy}=3\sqrt[4]{xy}$.

590. **乘方.** 由公式

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m} \text{ 與 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

得下列法則;

欲將一 $\sqrt[n]{a^q}$ 形狀之根式乘方至 m 次方冪,先將 m 與根指數之公因數對消,然後以 m 之其餘因數乘根底之指數即可.

例. 求 $2\sqrt[6]{xy^2}$ 之 9 次方冪.

$$(2\sqrt[6]{xy^2})^9=2^9(\sqrt[6]{xy^2})^9=512(\sqrt{xy^2})^3$$
$$=512\sqrt{x^3y^6}=512xy^3\sqrt{x}.$$

591. **開方** 由公式

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \text{ 與 } \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

得下列法則:

欲求一$\sqrt[n]{a^q}$形狀之根式之m次根,先將m與根底之指數之公因數對消,然後以m之其餘因數乘根指數即得.

例1. 求$\sqrt[5]{x^2y^4}$之6次根.

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{x^2y^4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{xy^2}}=\sqrt[15]{xy^2}.$$

例2. 求$54a\sqrt{b}$之立方根.

$$\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2a\sqrt{b}}=3\sqrt[3]{\sqrt{4a^2b}}=3\sqrt[6]{4a^2b}.$$

592. 簡根代數式. 所謂簡根代數式(simple radical expression)者即指僅含簡根式之代數式也. 如,$\sqrt{a}+\sqrt{b}$爲簡根代數式. 若不含有以根式爲分母之分式,則稱爲整簡根代數式.

由上述諸法則,整簡根代數式之和,差,積與方冪均可化爲簡根式之代數和. 其商亦然,將於§607證明之. 但簡根代數式之方根,如$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$,平常不能化之爲簡根代數式.

例1. $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$乘以$2\sqrt{3}-\sqrt{10}$.

$$(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}$$
$$=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}.$$

例2. 求$\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$之平方.

$$(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}=2+4\sqrt[6]{2}+2\sqrt[3]{2}.$$

習　題　34

將下列各式化爲有最小公根指數.

1. $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, 與 $\sqrt[15]{3}$.　　2. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$ 與 $\sqrt[6]{7b^5}$.

比較下列各數之大小.

3. $3\sqrt{2}$ 與 $2\sqrt[3]{3}$.　　4. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, 與 $\sqrt[4]{5}$.

將下列各式化爲最簡形狀之簡根式.

5. $\sqrt{35}\div\sqrt{7/5}$.　6. $10\div\sqrt{5}$.　7. $4\div\sqrt[3]{2}$.

8. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$.　　9. $\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt[3]{90}\cdot\sqrt[3]{15}$.

10. $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.　　11. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$.

12. $\sqrt[6]{3}\div\sqrt[4]{5}$.　　13. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$.

14. $\sqrt{a^8b^5c^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$　　15. $\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}$.

16. $\sqrt{a^3b^8}\div\sqrt[6]{a^6b^5}$.　　17. $\sqrt[3]{a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{ab^2c^4}$.

18. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6n]{a}$.　　19. $\sqrt[6]{a/b}\div\sqrt[9]{a/b}$.

20. $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{ab^5}\div(\sqrt[10]{a^7b^9}\cdot\sqrt[15]{a^{12}b^{14}})$.

21. $(\sqrt{12})^3$.　　22. $(\sqrt[3]{a^2})^6$.　　23. $(2\sqrt[4]{xy^2z^3})^6$

24. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$.　　25. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$.　　26. $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6/c^9}}$

27. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}$.　　28. $\sqrt{2\sqrt{2}}$.　　29. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$.

30. $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}$.　　31. $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$.　　32. $\left(\sqrt[2m]{\sqrt[2n]{a}}\right)^{mnp}$.

化簡下列各式

33. $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

34. $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{1/20}$.

35. $\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{1/2}$.

36. $\sqrt{a/bc}+\sqrt{b/ca}+\sqrt{c/ab}$.

37. $\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$.

38. $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

39. $\sqrt{ax^3+6ax^2+9ax}-\sqrt{ax^3-4a^2x^2+4a^3x}$.

40. $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

41. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}$.

42. $(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{14})\div\sqrt{2}$.

43. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.

44. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

45. $(1+\sqrt{3})^3$.

46. $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$.

分指數及負指數

593. 有時用分指數(fractional exponents)計算根式,極爲簡便.

前此僅當n表正整數時a^n有一定意義. 此類式之計算法則,卽

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, (2) $(a^m)^n=a^{mn}$, (3) $(ab)^n=a^nb^n$,
乃代數計算中之最簡單者. 於是自然起一種疑問:
"當n非正整數時,a^n能否有適用之意義,以適合上