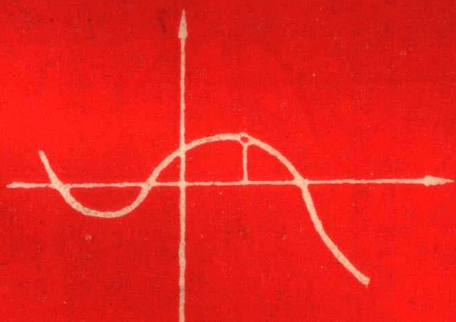
数学教学参考资料之一

初等代数题解集



$x^3+px^2+qx+r=0$

扬州师范学院数学系
教学参考资料编写组

说　　明

生产的发展，推动了数学的发展。数学来源于实践，反过来又作用于实践。当前为了实现我国工业、农业、国防和科学技术的现代化，提高全民族的科学文化水平，学好数学基础知识，掌握好基本技能技巧，已成为大家迫切的愿望和自觉的要求了，广大数学教学工作者也正在积极地为搞好教学工作作出贡献。

我系部分教师正是应各方面的需要，在讲授相应课程的基础上，将积累的资料汇编成数学教学参考资料，如能给使用者有所帮助，则不胜幸甚。

数学教学参考资料以中学数学题解为主，适当辅以基础知识，适用于中学数学教师和中学高年级学生参考。全书暂分《初等代数题解集》、《初等几何证题集》、《平面三角题解集》、《解析几何题解集》、《中学数学综合题解》五册，分别印出，供内部参考。

《初等代数题解集》由高古风、许美玉等同志编写。内容分为数、代数式、方程、不等式、指数与对数、数列、排列组合七个部分，每部分都选有各种类型的题目，兼顾对概念的理解和对解题技能的锻炼。

在编写过程中，由于时间匆促，仅就现有资料汇集而成，内容和类型自然不够全面，方法也不尽完美，请同志们批评指正。

数学教学参考资料编写组

一九七九年五月

目　　录

初等代数常用公式、定理、方法摘要

一、数

1 整除

(1) 若二整数 a，b 都能被整数 c 整除，则 $a \pm b$ 也能被 c 整除。

(2) 连续 n 个整数的积必能被 n 整除。

(3) 若整数 a、b 被整数 c 除得的余数相等，则 $a-b$ 能被 c 整除。逆定理也成立。

2 两个重要定理

(1)若 $ab=0$，则 a，b 中至少有一个等于零。

(2)若 a，b 是实数，且 $a^2+b^2=0$，则 a，b 都等于零。

3 复数

(1) $i^{4n+k}=i^k$ ($k=0$，1，2，3)

(2) $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(3) 三次虚单位根：$\varepsilon_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$\varepsilon_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$。

$\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1$， $\varepsilon_1\ \varepsilon_2=1$； $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$， $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1$

二、代数式

1 乘法公式

(1) $(a+b)^n=a^n+c_n^1a^{n-1}b+c_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+c_n^nb^n$

(2) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+\cdots+$
$+2a_{n-1}a_n$

(3) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

(4) $(a+b)(a^{2k-1}-a^{2k-2}b+\cdots+ab^{2k-2}-b^{2k-1})=a^{2k}-b^{2k}$

(5) $(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+\cdots-ab^{2k-1}+b^{2k})=a^{2k+1}+b^{2k+1}$

(6) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=(a+b+c)(a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c)(a+\varepsilon^2 b+\varepsilon c)$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc。$$

2　解决关于多项式恒等变形问题的方法

(1) 利用关于两个多项式恒等的定理

(2) 利用某些多项式的特殊性，如对称性、轮换性、齐次性等

(3) 利用余数定理、因式定理及综合除法

(4) 利用配平方法

(5) 利用待定系数法

(6) 利用数学归纳法

3　比和比例

(1) 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=K$,

则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=K$。

(2) 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{\alpha}$，　则 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{\alpha}$。

5　根式

(1) $(\sqrt{a})^2=a$，　$\sqrt{a^2}=|a|$

(2) $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，

其中：$x+y=a$，$xy=b$，$x>y$。

6　代数式中字母的取值范围

（1）整式中字母可取一切实数

（2）分式中字母可取使分母不为零的一切实数

（3）奇次根式中的字母可取一切实数，偶次根式中的字母取使被开方数不为负的一切实数．

三、方程

1　基本思想

（1）解高次方程的基本思想是降次，用的方法是换元，或因式分解．

（2）解方程组的基本思想是消元，用的方法是代入法，加减法．

（3）解分式方程的基本思想是化为整式方程，用的方法是去分母；解根式方程的基本思想是化为有理方程，用的方法是乘方．

2　实系数的一元二次方程：$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$

（1）求根公式：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$$

（2）$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$．

（3）$\triangle>0 \rightleftharpoons x_1\neq x_2$

$\triangle=0 \rightleftharpoons x_1=x_2$

$\triangle<0 \rightleftharpoons$ 无实数根．

3　高次方程：$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$．

$(a_0\neq 0)$

（1）若系数都是实数且有一根是 $a+bi$，则 $a-bi$ 也是它的根。

（2）若系数都是整数且有有理根 $\frac{p}{q}$（p，q 互质），

则 p 是 a_n 的约数，q 是 a_0 的约数。

（3）韦达定理：若方程的根是 x_1，x_2，…，x_n，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

四、不等式

1　基本性质

（1）$a>b \Leftrightarrow b<a$，

（2）若 $a>b$ 则 $a\pm c>b\pm c$，

（3）若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，

若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

2　重要定理

若二数之积（商）大于零，则这二数都大于零或都小于零。

若二数之积（商）小于零，则这二数中的一个大于零而另一个小于零。

3　若 $a>0$，则（1）$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$，

（2）$|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$，

4　几个重要的不等式

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$　（a，b 为任意实数，等号仅当 $a=b$ 时成立）

(2) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$　（a，b 都是正数，等号仅当 $a=b$ 时成立）

(3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$　（a，b 同号，等号仅当 $a=b$ 时成立）

(4) 更一般地，有：正实数 a_1，a_2，…，a_n 的算术平均不小于它们的几何平均：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立。

5　证明不等式的几种方法

(1) 应用比较法，即欲证 $a>b$，只须证明 $a-b>0$。

(2) 应用不等式的性质

(3) 应用已知的不等式

6　求极值的基本方法

(1) 二次函数的配方法

(2) 利用二次三项式的判别式

(3) 利用定理：若 n 个正数之和为定值，则当这 n 个数相等时，它们的积有极大值；若 n 个正数之积为定值，则当这 n 个数相等时，它们的和有极小值。

五、指数、对数

1　指数概念的推广与指数运算法则

(1) $a^0=1\quad(a\neq 0)$；　　$a^{-s}=\dfrac{1}{a^s}\quad(a\neq 0)$；

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad(a\geqslant 0)$。

(2) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$； $(a^m)^n=a^{mn}$； $(ab)^n=a^nb^n$。

2　指数函数与对数函数

(1) $y=a^x\quad(a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域是一切实数，函数值永为正。$y=log_a x\quad(a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域是一切正数，函数值是一切实数。

(2) 若 $a>1$，函数上升；若 $a<1$，函数下降。

3　对数恒等式及换底公式

(1) $a^{\log_a N}=N$

(2) $log_b a=\dfrac{log_c a}{log_c b}$，　$log_{a^n}b^n=log_a b$。

4　解指数方程、对数方程的方法

(1) 充分利用解代数方程的一切方法

(2) 对方程的两端取对数或去对数

(3) 利用指数和对数的性质

六、数列

1　等差数列与等比数列

若　a,b,c 成等差数列，则 $a-b=b-c$，或

$2b=a+c$，或　$b=\dfrac{a+c}{2}$。

若　a,b,c 成等比数列，则 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ 或 $b^2=ac$，

或　$b=\pm\sqrt{ac}$。

2　特殊数列求和的方法

(1) 仿效等差数列与等比数列求和的方法

（2）将数列的每一项拆为两项的差

（3）利用递推公式

七、排列、组合；二项式定理

1　重复排列

（1）从 n 个不同的元素里，每次取出 r 个元素的重复排列数是 n^r。

（2）如果 n 个元素里，有 p 个元素相同，又有 q 个元素相同，…，又有 r 个元素相同（$p+q+\cdots+r\leqslant n$），这 n 个元素全取的排列数是 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots r!}$

2　处理排列、组合问题的三个基本原理

（1）完成某事，可以单独采用甲法或乙法就可完成，若甲法有 m 种，乙法有 n 种，那末，完成此事共有 $m+n$ 种方法。

（2）完成某事，必须经过两个步骤才能完成，若第一步有 m 种，第二步有 n 种，那末，完成此事共有 $m\ n$ 种方法。

（3）完成某事，不考虑条件有 m 种，如果必须除去某些不符合条件的 n 种，那末，完成此事共有 $m-n$ 种方法。

3　组合恒等式

（1）$C_m^n=C_m^{m-n}$，　　（2）$C_{m+1}^n=C_m^n+C_m^{n-1}$。

4　二项式定理

$(x+a)^n=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots+C_n^na^n$

（1）通项公式　$T_{k+1}=C_n^ka^kx^{n-k}$

（2）重要公式　$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$。

一　数

（一）整数

1　计算：　$3\cdot5\cdot17\cdots(2^{2^n}+1)$。

解：　$3\cdot5\cdot17\cdots(2^{2^n}+1)=1\cdot3\cdot5\cdot17\cdots(2^{2^n}+1)$

$=(2^{2^0}-1)(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)$

$=(2^{2^1}-1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)$

$=(2^{2^2}-1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^n}+1)$

$=\cdots=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$。

2　若　$48(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)(7^{16}+1)(7^{32}+1)+1$

$=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0$

（a_i都是数码），求 n 和 a_0。

解：　$48(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)(7^{16}+1)(7^{32}+1)+1$

$=(7^2-1)(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)(7^{16}+1)(7^{32}+1)+1$

$=7^{64}=49^{32}=(49^2)^{16}=2401^{16}$，　　$\therefore\quad a_0=1$

为了求 n，只须求2400^{16}是几位数。

$\because$　$\lg 2400^{16}=16(\lg 24+\lg 100)=16(3\lg 2+\lg 3+2)$

$=54.0833$

$\therefore$　2400^{16}是55位数，　　$\therefore$　$n=54$。

3　设 n 是自然数，证明 n^3+5n 能被 6 整除。

证：　$n^3+5n=(n^3-n)+6n=n(n-1)(n+1)+6n$

$(n-1)n(n+1)$是三个连续整数的乘积，能被 6 整除，$6n$ 也能被 6 整除，所以 n^3+5n 能被 6 整除。

4　证明：若 n 为偶数，则数 13^n+6 能被 7 整除。

证：　∵　$13^n+6=(14-1)^n+(7-1)$

若　$n=2k$，则 $13^{2k}+6=(14-1)^{2k}+(7-1)$

$=14^{2k}-C_{2k}^1\cdot 14^{2k-1}+\cdots-C_{2k}^{2k-1}\cdot 14+7$

显然能被 7 整除。

5　如果形式为 7^n-1 的数能被 8 整除，又能被 6 整除，问 n 是什么整数？

解：∵　$8=7+1$，$6=7-1$，

∴　要使 7^n-1 能被 8 和 6 整除，就要使它能被 $(7-1)(7+1)=7^2-1$ 整除，因此 n 应该是偶数。

6　设 n 为正整数，且 $n\neq 1$，求证 $3^{3n}-26n-1$能被676整除。

证：∵　$676=26^2$

又　$3^{3n}-26^n-1=(26+1)^n-26n-1$

$=(26^n+C_n^1\cdot 26^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 26+1)-26n-1$

$=26^n+C_n^1\cdot 26^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}\cdot 26^2$

显然，　$3^{3n}-26n-1$ 能被 676 整除。

7　当 n 是正整数时，求证 $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除。

证：若　$n=1$，命题显然成立。

若　$n\geqslant 2$，则由二项式定理，

$(n+1)^n-1=n^n+C_n^1\cdot n^{n-1}+C_n^2\cdot n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}n$

其中每一项都能被 n^2 整除，故 $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除。

8　证明：$n(n^2-1)(n^2-5n+26)$可以被120整除

（n 是大于 1 的整数）

证：设　$f(n)=n(n^2-1)(n-5n+26)$

则　$f(2)=120$　　$f(3)=480$

即　当 $n=2$，$n=3$ 时结论成立。　　若　$n>3$

则　$f(n)=n(n^2-1)[(n^2-5n+6)+20]$

$$=(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)+20(n+1)n(n-1)$$

这里，$(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$ 为五个连续自然数的乘积，必能被 120 整除：$(n+1)n(n-1)$ 为三个连续自然数的乘积必能被 6 整除，故 $20(n+1)n(n-1)$ 能被 120 整除，于是 $f(n)$ 能被 120 整除。故得证.

9　设　a, b, c, d 为互不相等的整数。

证明：$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ 必被12整除。

证：　令　$S=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$。

∵　任一整数被 3 除所得的余数必为 0,1,2 三者之一。

∴　a, b, c, d 被 3 除所得余数中必至少有两个相同，故 S 能被 3 整除。

又∵　a, b, c, d 中不管奇数、偶数各几个，S 中都至少有两个因数能被 2 整除，故 S 能被 4 整除。

且∵ 3，4 互质，所以 S 能被 12 整除。

10　若 n 为奇数，则$(n^2+3)(n^2+7)$为32的倍数。

证：设 $n=2k+1$，则

$$(n^2+3)(n^2+7)=[(2k+1)^2+3][(2k+1)^2+7]$$
$$=(4k^2+4k+4)(4k^2+4k+8)$$
$$=16(k^2+k+1)(k^2+k+2)$$

∵　k^2+k+1，k^2+k+2 是连续两个整数，其中必有一个是 2 的倍数。

$\therefore\quad (n^2+3)(n^2+7)$是32的倍数。

11　设 m，n，p，q 都是整数，若 $mn+pq$ 能被 $m-p$ 整除，证明：$mq+np$ 也能被 $m-p$ 整除。

证：显然　　$(m-p)q$ 能被 $m-p$ 整除，

$-(m-p)n$ 能被 $m-p$ 整除；

现在又知 $mn+pq$ 能被 $m-p$ 整除，

那末以上三数之和，即 $mq+np$ 也能被 $m-p$ 整除。

12　求证每个奇数的平方被 8 除必余 1 。

证：　$\because\quad (2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$=4n(n+1)+1$

由于 $n(n+1)$必是 2 的倍数，$4n(n+1)$必是 8 的倍数，所以命题得证。

13　证明　$53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除。

证：　53 的末位数是 3，53^2 的末位数是 9，

53^3 的末位数是 7，53^4 的末位数是 1，

$\because\quad 53=4\times13+1$，　　$\therefore\quad 53^{53}$ 的末位数是 3，

同样的道理，33^{33} 的末位数也是 3，

$\therefore\quad 53^{53}-33^{33}$ 的末位数是 0，因而它能被 10 整除。

14　从任意给定的 n 个自然数中总可以找到 k 个数($1\leqslant k\leqslant n$)，且每个数至多只取一次，使它们的和能被 n 整除。

证：设所给定的数是 a_1，a_2，…，a_n；

令　　$s_1=a_1$，$s_2=a_1+a_2$，…，$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

若　某一 s_i 能被 n 整除，则命题已证。

若　每一个 s_i 都不能被 n 整除，则这 n 个数 s_1，s_2，…，s_n 中至少有两个被 n 除时余数相等，因而它们的差能被

n 整除，且在这个差中，每个数至多只取一次，因而命题得证。

15　若 $2n+1$ 是一个质数，证明 1^2，2^2，3^2，…，n^2 各被 $2n+1$ 除得不同的余数。

证：假定 1^2，2^2，3^2，…，n^2 中有两项 l^2，m^2 $(1\leqslant l<m\leqslant n)$各被 $2n+1$ 除时余数相同，则

$m^2-l^2=(m+l)(m-l)$能被 $2n+1$ 除整。

又因 $2n+1$ 是质数，且$m+l<2n+1$，$m-l<2n+1$，所以 $m+l$ 和 $m-l$ 都和 $2n+1$ 互质，从而 m^2-l^2也与 $2n+1$ 互质，这与m^2-l^2能被$2n+1$整除矛盾。因此，问题得证。

16　求以 11 除 101^{10} 所得的余数。

解：　$101^{10}=(99+2)^{10}$

右边这个展开式中的前十项都能被 99 整除，因而都能被 11整除，而最后一项 $2^{10}=1024$ 被 11 除时余 1，所以 101^{10} 被 11除所得的余数是 1。

17　证明：任意两个连续整数的平方和被8除时，余数非1即5。

证：任意两个连续整数总可表示成 $2p$ 与 $2p+1$（p 为整数），于是

$(2p)^2+(2p+1)^2=8p^2+4p+1$

若　p 为偶数，　即　$p=2k$ 时，则

$$
\begin{aligned}
8p^2+4p+1&=4p(2p+1)+1\\
&=8k(4k+1)+1
\end{aligned}
$$

显然被 8 除时余 1。

若　p 为奇数，即 $p=2k+1$时，则

$8p^2+4p+1=4p(2p+1)+1$

$$=(8k+4)(4k+3)+1$$
$$=8k(4k+5)+13$$
$$=8(4k^2+5k+1)+5$$

显然被8除时余5．

18 若a为自然数，证明 $a(a+1)+1$ 必非平方数，

而 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ 必为平方数，

证：∵ 当 a为自然数时必有

$$a^2<a(a+1)+1<(a+1)^2$$

故 $a(a+1)+1$ 不能是某一自然数的平方

又∵ $a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a+1)^2$

故 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$必为某一自然数的平方数．

19 数证明数列11，111，1111，11111，…，中没有完全平方数．

证：因为只有$1^2=1$，$9^2=81$，它们的个位数码是1，所以只有个位数码是1或9的数，个位数码才是1，如果在数列中某一个数A是一个完全平方数，则这数不是$(10n+1)^2$就是$(10n+9)^2$．

若是$(10n+1)^2=100n^2+20n+1$，它的十位数码肯定是偶数，而A的十位数码是1，由此得到矛盾．

若是$(10n+9)^2=100n^2+180n+81$，它的十位数码也是偶数，这也与A的十位数码是1矛盾．

因此，在数列中没有完全平方数．

20 已知一个四位数N开头两个数字相同，后面两个数字相同，如果N是一个完全平方数，求$\sqrt{N}$．

解： 因为N的开头两个数字相同，后面两个数字相同，故N必是11的倍数，又N是完全平方数，