电子计算机上常用

数値方法汇編

沈阳计算技术研究所

一九七三年

电子计算机上常用

数值方法汇编

沈阳计算技术研究所

一九七三年

电子计算机上常用数值方法汇编

·前 言·

几年来，我们在工作中体会到，对一些常用的数值方法进行整理並编制成标准程序，对于在电子计算机上解算实际问题是非常必要和十分有效的。为了推广和普及电子计算机的使用，使计算数学更好地为巩固社会主义经济基础服务，查找数值方法方便、避免编制程序的错误、缩短解题周期以及满足一部分充实实际解题工作的读者的需要，促使我们做一次大胆地尝试，编写了这本"电子计算机上常用数值方法汇编"。如果能达到我们的部分愿望，也尽到我们的一点义务。

在全室同志努力下，整理出22篇常用计算方法，其结构有别于目前国内出版的计算方法。每篇都包含有方法讨论、框图设计，並写出ALGOL程序。

由于我们水平所限和经验不足，会存在谬误之处，我们衷心希望同志们在阅读和应用过程中提出批评意见，以便改正。

计算数学研究室

一九七三年七月

目　录

1、插值法

插值法是在数值计算中不可缺少的一种数学工具。它不仅在函数逼近、数值积分之研究中占有重要地位，而且在常、偏微分方程的数值计算方法之研究中也起着很重要的作用。

文中介绍的主要是常用的插值法。

一、拉哥朗日插值法

1、凡德尔蒙得（Vandermonde）行列式

$$(1)\quad W(x_0,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

称作由数 x_i（$i=0,\cdots,n$）所组成的 $n+1$ 阶凡德尔蒙得行列式。

行列式（1）具有性质： 1） x_i 和 x_k（$i\neq k$）互换相当于两列互换，因而行列式之值变号； 2） 若 x_i（$i=0,n$）中有相等的，行列式等于零。

x_n 换为 x 时可得到

$$(2)\quad W(x_0,\cdots,x_{n-1},x)=A(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$
$$A=W(x_0,\cdots,x_{n-1}).$$

递推关系式如下：

$$W(x_0,x_1)=x_1-x_0$$
$$W(x_0,x_1,x_2)=W(x_0,x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$
$$(3)\quad \cdots$$
$$W(x_0,\cdots,x_n)=W(x_0,\cdots,x_{n-1})(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})$$
$$=\prod_{p<q}^{0\cdots n}(x_q-x_p).$$

由上式可推断，若诸数 x_i（$i=0,n$）彼此互异，则凡德尔

蒙得行列式不等于零。

2、插值多项式的推导

设有 n+1 个点 (x_i, y_i) $(i=0,n)$。求一 n 次多项式 $P(x)$，使它满足

$$(4)\qquad P(x_i)=y_i \quad (i=0,n).$$

设该多项式为

$$(5)\qquad P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n.$$

由（4）得到

$$(6)\qquad \begin{aligned} &c_0+c_1x_0+\cdots+c_nx_0^n=y_0\\ &c_0+c_1x_1+\cdots+c_nx_1^n=y_1\\ &\cdots\\ &c_0+c_1x_n+\cdots+c_nx_n^n=y_n \end{aligned}$$

其係数行列式就是 $W(x_0,\cdots,x_n)\neq 0$（只要 x_i 互异），因此方程组（6）存在唯一解 c_i $(i=0,n)$。

从(5)和(6)中消去 c_i $(i=0,\cdots,n)$ 相当于增广行列式

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2\cdots & x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2\cdots & x_0^n\\ \cdots & & & & \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2\cdots & x_n^n \end{vmatrix}=0.$$

由此得到

$$\begin{aligned} P(x)W(x_0,\cdots,x_n)&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i y_i W(x,x_0,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\\ &=\sum_{i=0}^{n} y_i W(x_0,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n) \end{aligned}$$

或

$$(7)\qquad P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{W(x_0,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)}{W(x_0,\cdots,x_n)}.$$

引进符号 $A(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$，则 $A'(x_i)=(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$，而且（7）化为

$$(8)\qquad P(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{A(x)}{A'(x_i)(x-x_i)} .$$

这便是所寻求之拉哥朗日插值多项式。

不利用凡德尔蒙得行列式也可直接推出拉哥朗日插值多项式。

3、余项估计

令截断误差

$$(9)\qquad R(x)=f(x)-P(x) ,$$

其中 $f(x)$ 是被插函数。设 x 是插值点，且异于节点 $x_i(i=0,n)$ 之常数。引进新变数 X 并令

$$(10)\qquad K=\frac{R(x)}{A(x)} .$$

令

$$(11)\qquad F(X)=R(X)-KA(X)\equiv f(X)-P(X)-KA(X) .$$

于是，根据推广的洛尔定理有

$$F^{(n+1)}(\xi)=0,\quad \alpha<\xi<\beta ,$$

其中 $\alpha=min\{x_0,\cdots,x_n,x\}$，$\beta=max\{x_0,\cdots,x_n,x\}$.

于是，得到

$$f^{(n+1)}(\xi)=K(n+1)!$$

由(10)有

$$(12)\qquad R(x)=\frac{A(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

或

$$(13)\qquad |R(x)|\leq M_{n+1}(\alpha,\beta)\frac{|A(x)|}{(n+1)!} ,$$

其中 $M_{n+1}(\alpha,\beta)=\max\limits_{\alpha\leq X\leq\beta}\left|f^{(n+1)}(X)\right|$.

(12)称哥西(Cauchy)型余项。

根据切比雪夫(Chebyshev)多项式之极值性质，对插值区间 $[-1,1]$ 而言，如果取 $A(x)=T_{n+1}(x)$，则 $\max\limits_{-1\leq x\leq 1}|A(x)|$ 最小，

即 $|R(x)|$ 最小。 由于 $|T_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$，

$$(14) \qquad |R(x)| \leqslant M_{n+1}(\alpha,\beta)\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}.$$

以上事实告诉我们，节点取切比雪夫多项式之零点为最好。

4、二元情形

设有二元函数 $F(x,y)$，$F(x_i,y_j)=F_{i,j}$。 求一 $n+m$ 次多项式 $P(x,y)$，使它满足 $P(x_i,y_j)=F_{i,j}$ $(i=0,n;\ j=0,m)$。所求多项式就是

$$(15) \quad P(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\times\frac{\sigma(y)}{(y-y_j)\sigma'(y_j)}F_{i,j},$$

其中 $\omega(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$，$\sigma(y)=(y-y_0)\cdots(y-y_m)$。

余项公式为

$$R(x,y)=\frac{F_x^{(n+1)}(\xi_1,y)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+\frac{F_y^{(m+1)}(x,\eta_1)}{(m+1)!}\prod_{j=0}^{m}(y-y_j)$$

$$-\frac{F_{x,y}^{(n+1),(m+1)}(\xi_2,\eta_2)}{(n+1)!(m+1)!}\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{m}(x-x_i)(y-y_j),$$

其中 ξ_1，ξ_2 在数 $x_0,\cdots,x_n$，x 之间，η_1，η_2 在 $y_0,\cdots,y_m$，y 之间。

5、优缺点

优点：

1）适合于不等距节点之插值。

2）简单的互换一下 x 和 y 的位置，可用于反插值。

3）当被插函数有若干个，即 $f^{(i)}(x)$ $(i=1,2\cdots)$ 时，要想对同一组节点 x_i $(i=0,n)$，在同一点 x 同时对上述若干个函数进行插值，那么插值系数不必每次重新计算。

4）对给定的节点 x_i $(i=0,n)$ 和插值点 x，可以事先示好插值係数 $A(x)/(x-x_i)A'(x_i)$。

5）该插值多项式的递推关系简单，因此编程序较方便。

缺 点：

1） 为提高精度或别的原因需要增加插值节点，如(x_{n+1}, y_{n+1})，此时需重新计称全部系数。

2） 如果插值点 x 变了，系数还要重新计称，因 A（x）变了。

3） 对给定的（x_i, y_i）数表，为达到所需精度，要先确定节点数目是比较困难的。

LAGRANGE ALGOL过程 （一元）

```
Procedure LAGRANGE(N, u, x, y, ANS);
  real array x, y; integer N; real u, ANS;
begin integer i, j; real L;
  ANS := 0.0;
  for j:=1 step 1 until N+1 do
begin L := 1.0 ;
  for i:=1 step 1 until N+1 do
begin if i≠j then L:=L×(u-x(i))/(x(j)-x(i))
end ;
    ANS := ANS+L×y(j)
end end
```

说明：x，y 分别表示横、从坐标数组，u 是要插值的点，ANS 是存放结果的单元。

二、用差商表示的插值公式

为克服 Lagrange 插值公式不易增加节点的缺点，今导出用差商表示的插值公式：

定义：

$$\omega(f;x_0)=f(x_0),$$

$$\omega(f;x_0,x_1)=\frac{\omega(f;x_1)-\omega(f;x_0)}{x_1-x_0},$$

$$\omega(f;x_0,x_1,x_2)=\frac{\omega(f;x_1,x_2)-\omega(f;x_0,x_1)}{x_2-x_0},$$

$$\cdots$$

$$\omega(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{\omega(f;x_1,x_2,\cdots,x_n)-\omega(f;x_0,\cdots,x_{n-1})}{x_n-x_0}$$

为m级差商（或差分比），$m=\overline{0,n}$.

由定义可以推出

(2) $$\omega(f_1c_1+\cdots+f_kc_k;x_0,\cdots x_m)=c_1\omega(f_1;x_0,\cdots,x_m)+\cdots+c_k\omega(f_k;x_0,\cdots,x_m).$$

用归纳法可推出

(3) $$\omega(f;x_0,\cdots,x_m)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m\\ \cdots\\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1}\\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_m)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_m\\ \cdots\\ x_0^{m-1} & x_1^{m-1} & \cdots & x_m^{m-1}\\ x_0^m & x_1^m & \cdots & x_m^m\end{vmatrix}.$$

由此可知，

(4) $$\omega(x^k;x_0,\cdots,x_m)=\begin{cases}0, & k<m,\\ 1, & k=m,\end{cases}$$

即，若 $f(x)$ 是低于m次的多项式，则 $\omega(f;x_0,\cdots,x_m)=0$.

此外，

(5) $$\omega(A_k;x_0,\cdots,x_m)=\begin{cases}0, & k\neq m,\\ 1, & k=m.\end{cases}$$

令插值多项式

(6) $$P(x)=\sum_{m=0}^{n}c_mA_m(x)$$

其中 $A_0(x)=1$, $A_m(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{m-1})$ $m=\overline{1,n}$.

由（6）、(2)、(5) 可以得到

$$(7)\quad \omega(P;x_0,\cdots,x_m)=\sum_{k=0}^{n}C_k\,\omega(A_k;x_0,\cdots,x_m)=C_m\,(m=0,n).$$

将它代入（6）中，则

$$(8)\quad P(x)=\sum_{m=0}^{n}\omega(P;x_0,\cdots,x_m)A_m(x).$$

注意到条件 $P(x_m)=f(x_m)\ (m=0,n)$ 与条件

$$(9)\quad \omega(P;x_0,\cdots,x_m)=\omega(f;x_0,\cdots,x_m),\ m=0,n$$

等价，得到

$$(10)\quad P(x)=\sum_{m=0}^{n}\omega(f;x_0,\cdots,x_m)A_m(x).$$

或展开它，则

$$(11)\quad \begin{aligned}P(x)=&\ \omega(f;x_0)+\omega(f;x_0,x_1)(x-x_0)+\cdots+\\ &\ \omega(f;x_0,\cdots,x_n)(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).\end{aligned}$$

公式（11）亦称作不等距Newton插值公式。

对等距节点 $x_m=a+mh\ (m=0,1,\cdots)$，

$$\omega(f;a,\ a+h,\cdots,a+mh)=\frac{\Delta^m f(a)}{m!\,h^m},$$

因此，公式（11）就变成了牛顿插值公式。

本插值公式的精确余项

$$(13)\quad R(x)=\omega(f;x,x_0,\cdots,x_n)A(x),$$

其中 $A(x)=A_{n+1}(x)$.

从差商之定义可推出如下一串等式：

$$(14)\quad \begin{aligned}&f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\omega(f;x,x_0),\\ &\omega(f;x,x_0)=\omega(f;x_0,x_1)+(x-x_1)\omega(f;x,x_0,x_1),\\ &\cdots\\ &\omega(f;x,x_0,\cdots,x_{n-1})=\omega(f;x_0,\cdots,x_n)+(x-x_n)\omega(f;x,x_0\cdots,x_n).\end{aligned}$$

由此推出

(15) $f(x)=f(x_0)+\sum_{m=1}^{n}\omega(f;x_0,\cdots,x_m)A_m(x)+\omega(f,x,x_0,\cdots,x_n)$
$A_{n+1}(x)$,

即余項公式(13)成立。

可以证明

(16) $\omega(f;x_0,\cdots,x_n)=f^{(n)}(\xi)/n!$,

其中 $min\{x_0,\cdots,x_n\}<\xi<max\{x_0,\cdots,x_n\}$. 事实上，由洛尔定理 $R^{(n)}(\xi)=0$．又由公式(10)或(11)

(17) $R^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-P^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-n!\omega(f;x_0,\cdots,x_n)$,

即(16)成立。从而有

(18) $\omega(f;x,x_0,\cdots,x_n)=f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$,

其中 ξ 是 $x_0,\cdots,x_n$ 和 x 之间的某一數。

三、牛頓插值公式

1、差分（或有限差）

表达式

(1) $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)\quad(h>0)$

称作函數 $f(x)$ 在 x 点的一阶差分。仿此类推，

(2) $\Delta_{n+1}f(x)=\Delta\Delta_n f(x)$

称作 $n+1$ 阶差分。

从差分之定义不难推出

(3) $\Delta_n f(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}C_n^m f(x+mh)$,

$$f(x+nh)=\sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta_m f(x). \tag{4}$$

2、阶乘多项式

定 义

$$\Phi_n(x-a,h)=\frac{1}{n!h^n}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)$$

(5)

$$\Phi_0(x-a,h)\equiv 1,\quad n=1,2,\cdots$$

称作 n阶的阶乘多项式。

从定义可推出

$$\Delta\Phi_{n+1}(x-a,h)=\Phi_n(x-a,h), \tag{6}$$

$$\Phi_n(0,h)=0\ (n=1,2,\cdots). \tag{7}$$

根据阶乘多项式的性质，任意n次多项式$P(x)$可按阶乘多项式展成

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} C_i\Phi_i(x-a,h). \tag{8}$$

为确定其系数C_i（$i=0,n$），用算子Δ作用在(8)之两边，並注意到(6)，则

$$\Delta P=C_1\Phi_0(x-a,h)+\cdots+C_n\Phi_{n-1}(x-a,h)$$

$$\Delta_2 P=C_2\Phi_0(x-a,h)+\cdots+C_n\Phi_{n-2}(x-a,h) \tag{9}$$

$$\cdots$$

$$\Delta_n P=\qquad\qquad C_n\Phi_0(x-a,h).$$

在(8)和(9)中取$x=a$，则

$$C_0=P(a),\quad C_1=\Delta P(a),\cdots,C_n=\Delta_n P(a).$$

代入(8)中，则

$$P(x)=P(a)+\Delta P(a)\frac{(x-a)}{1!\,h}+\Delta_2 P(a)\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}+\cdots$$

$$+\Delta_n P(a)\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)}{n!\,h^n}. \tag{10}$$

节点取为 $x_m=a+mh\ (m=0,n)$， 并令

(11) $$p(a+mh)=f(a+mh)\ (m=0,n).$$

此时，(11) 等价于条件

(12) $$\Delta_m p(a)=\Delta_m f(a),\ m=0,n.$$

这时，(10) 化为

(13) $$p(x)=f(a)+\Delta f(a)\frac{x-a}{1!\,h}+\Delta_2 f(a)\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!\,h^2}+\cdots$$
$$+\Delta_n f(a)\frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)}{n!\,h^n}.$$

本插值公式之余项同于拉哥朗日插值公式之余项。

令 $t=\dfrac{x-x_0}{h}$，则

$$(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})=h^k t(t-1)\cdots(t-k+1).$$

于是，牛顿插值公式 (13) 可写成

$(13)_1$ $$P(x_0+th)=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta_2 f(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta_n f(x_0).$$

此公式称依表初牛顿插值公式。它适合于 x 位于 x_0 附近之情形。

如果节点取成 $x_k=x_0-kh\ (h>0,\ k=0,n)$ 並令 $t=(x-x_0)/h$，则由 (13) 可推出表末牛顿插值公式

$(13)_2$ $$P(x_0+th)=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0-h)+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta_2 f(x_0-2h)+\cdots$$
$$+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta_n f(x_0-nh).$$

此公式适合于 x 位于表后面节点附近之情形。

3、优缺点

优 点：

1) 增加一个节点，如 (x_{n+1},y_{n+1})，只需要计标

$\frac{\Delta_{n+1}f(a)}{(n+1)!}(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-nh)$，同样，可以去掉一个节点（区间的端点）。

2）差分表能给出所需精度的插值多项式的表达成，即对给定点列，如果对它们可用 n 次多项式精确表示，那么，第 n 个差分列成为常数。

3）差分表中容易发现函数值的随机误差（randonerror）。如差分表不稳定，即在某处有突变，则可以指出这时用多项式拟合给定点列效果不会满意。

缺　点：

1）差分形式的插值公式要求节点等距，这当然是一种不利的限制。

2）由于 1），不适合反插值，只进行线性插值的情形是例外。

3）要想对若干个被插函数对同一节点进行插值，就要构造出和被插函数一样多个差分表。

四、Gauss、Stirling、Bessel 和 Everrett 插值公式

以下所述公式均适合于插值点 x 位于表中间的情形。

节点取成

$x_0,\ x_1=x_0+h,\ x_2=x_0-h,\ x_3=x_0+2h,\ x_4=x_0-2h,\cdots,$

$x_n=x_0+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]h,$

那么，可从牛顿插值公式推出

$$P(x_0+th)=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta_2 f(x_0-h)+\frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta_3 f(x_0-h)+$$

$$(1)\qquad +\frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\Delta_4 f(x_0-2h)+\cdots$$

$$+\frac{t(t-1)(t+1)\cdots(t+(-1)^{n-1}[\frac{n}{2}])}{n!}\Delta_n f(x_0-[\tfrac{n}{2}]h).$$

此公式称作Gauss 第一插值公式。

如果节点取成

$$x_0, x_1=x_0-h, x_2=x_0+h, \cdots, x_n=x_0+(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]h,$$

则得到 Gauss 第二插值公式：

$$
\begin{aligned}
P(x_0+th)=&f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0-h)+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta_2 f(x_0-h)+\frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta_3 f(x_0-2h)\\
&+\frac{t(t+1)(t-1)(t+2)}{4!}\Delta_4 f(x_0-2h)+\cdots\\
&+\frac{t(t+1)(t-1)\cdots(t+(-1)^n\left[\frac{n}{2}\right]h)}{n!}\Delta_n f(x_0-\left[\frac{n+1}{2}\right]h).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

如果节点是奇數个（$n=2k+1$），那么取公式（1）和（2）之称术平均值就得到Stirling 插值公式

$$
\begin{aligned}
P(x_0+th)=&f(x_0)+\frac{t}{1!}\frac{\Delta f(x_0)+\Delta f(x_0-h)}{2}+\frac{t^2}{2!}\Delta_2 f(x_0-h)\\
&+\frac{t^2(t^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta_3 f(x_0-h)+\Delta_3 f(x_0-2h)}{2}\\
&+\frac{t^2(t^2-1)^2}{4!}\Delta_4 f(x_0-2h)+\cdots\\
&+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots\left[t^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right](\Delta_{n-1}f(x_0-\frac{n-2}{2}h)+\Delta_{n-1}f(x_0-\frac{n}{2}h)}{2}\\
&+\frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots(t^2-(\frac{n-2}{2})^2)}{n!}\Delta_n f(x_0-\frac{n}{2}h).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

根据差分之定义，Gauss 第一插值公式可改写成

$$
\begin{aligned}
P(x_0+th)=&\frac{f(x_0)+f(x_0+h)}{2}+\frac{t-\frac{1}{2}}{1!}\Delta f(x_0)+\frac{t(t-1)}{2!}\frac{\Delta_2 f(x_0-h)+\Delta_2 f(x_0)}{2}\\
&+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{3!}\Delta_3 f(x_0-h)+\cdots\\
&+\frac{t(t-1)(t+1)\cdots(t-\frac{n-1}{2})}{(n-1)!}\frac{\Delta_{n-1}f(x_0-\frac{n-1}{2}h)+\Delta_{n-1}f(x_0-\frac{n-3}{2}h)}{2}\\
&+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)(t+1)\cdots(t-\frac{n-1}{2})}{n!}\Delta_n f(x_0-\frac{n-1}{2}h),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

此公式称作Bessel插值公式。

利用差分之定义，从Gauss第一插值公式中消去奇阶差分项就得到Everrett插值公式：

$$P(x_0+th)=(1-t)f(x_0)+tf(x_0+h)-\frac{t(t-2)(t-1)}{3!}\Delta_2 f(x_0-h)$$

$$+\frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta_2 f(x_0)-\frac{t(t-3)(t-2)(t^2-1^2)}{5!}\Delta_4 f(x_0-2h)+\cdots$$

$$(5)\quad -\frac{t\left(t-\frac{n+2}{2}\right)\left(t-\frac{n}{2}\right)(t^2-1^2)\cdots\left[t^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right]}{(n+1)!}\Delta_n f\left(x_0-\frac{n}{2}h\right)$$

$$+\frac{t(t^2-1)\cdots\left[t^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]}{(n+1)!}\Delta_n f\left(x_0+\left(1-\frac{n}{2}\right)h\right)\ (n\text{—偶数}).$$

下面不加推导的给出以上各插值公式的余项公式如下：

$$(6)\quad R(x)=\frac{h^{n+1}t(t-1)(t+1)\cdots\left(t+(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (\text{Gauss第一}).$$

$$(7)\quad R(x)=\frac{h^{n+1}t(t+1)(t-1)\cdots\left(t+(-1)^{n+1}\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (\text{Gauss第二}).$$

$$(8)\quad R(x)=\frac{h^{n+1}t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots\left(t^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (\text{Stirling}).$$

$$(9)\quad R(x)=\frac{h^{n+1}t(t-1)(t+1)\cdots\left(t+\frac{n-1}{2}\right)\left(t-\frac{n+1}{2}\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ (\text{Bessel}).$$

$$(10)\quad R(x)=\frac{h^{n+2}t\left(t-\frac{n+2}{2}\right)(t^2-1^2)\cdots\left(t^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)}{(n+2)!}f^{(n+2)}(\xi)\ (\text{Everrett}).$$

在以上公式中，$\min\{x,x_0,\cdots,x_n\}<\xi<\max\{x,x_0,\cdots,x_n\}$.

五、三、四点插值或微商公式

1、三点情形，对Gauss第一公式取前二项，

$$(11)\qquad P(x)=C_{i-1}y_{i-1}+c_i y_i+C_{i+1}y_{i+1},$$