平面和立体

解析几何的理论与问题

JOSEPH H. KINDLE 著
姜培润　　　　　　编译

河北大学教材科

平 面 和 立 体

解析几何的理论与问题

JOSEPH H. KINDLE 著
姜培润 编译

河 北 大 学 教 材 科

译者的话

《解析几何的理论与问题》一书，汇编了较多的解析几何的例题与习题，其中平面解析几何的篇幅占近四分之三，鉴于目前我国的平面解析几何已在中学讲授，因此本书不仅可作为大专院校学生的参考书，也可作为高中学生的课外读物，同时它也是中学数学教学的一本较好的参考书。

在翻译本书过程中，译者修改了原著某些提法不确切之处，订正了原著中个别印刷上的错误，在空间解析几何部分，为了与现行的一般教材一致起见，将原著图形中的左手坐标系改为右手坐标系。

由于译者水平有限，错误在所难免，欢迎同志们批评指正。

序

这本习题集是大专院校和科学技术方面的解析几何的补充材料，它针对提纲密切配合了解析几何的教材，其中详细解答的典型例子共有345个，为了配合练习，各种深浅不一的补充题有910个，现在这些题是按照每一个课题的自然发展而排列的。因为解析几何，首先就是一个解题的课程，在大多数的数学课程中，学得差的主要原因之一，就是没有掌握一定的解题规律，我们坚信，如果对这本书使用恰当的话，会是很有用的，尤其是对于想复习解析几何的基本定理和提高解题的能力的学生来讲，更是有用的。

正确地使用这本书，主要是理解这本书的主要内容是什么，它的确不是一本正式教材，所以不应该借学习它为理由，而回避正课学习，书中每一章对所需的定义、原理和定理都作了概述并把例题与补充题作了分类。

解题对学习数学的重要性，无论你怎么强调，都不算过分，草率地阅读一本教材，记录了几条公式，漫不经心地学了一些书本的例题，结论只会给你一种幻觉，你确实不费力气，但实际上，对这份材料只得到一种模糊的印象，为了有效地使用这本书，自己应该作书面作业。

要弄懂每一个步骤的原因和方法，从每一个例题中，你

都能学到一些东西，当你学到之后，你再作大量的补充题和处理教材中的问题时，就会感到困难少了。

J. H. K.

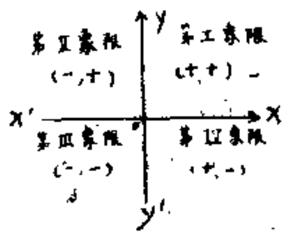
辛辛那提　　俄亥俄

11月　　1950年

目 录

第一章　直角坐标系

直角坐标　在代数与三角学里，一开始就使用直角坐标，在直角坐标系中，由交于点O的两条垂线，把平面分成4个象限，水平线$X'OX$称为x—轴，铅直的线$Y'OY$称为y—轴，这两条互相垂直的直线叫做坐标轴，点O称为原点，从一点到y—轴的距离，称为该点的x—坐标，或横标，从一点到x—轴的距离，称为该点的y—坐标，或纵标，两个距离总合起来，称为这一点的坐标，记作(x,y)，在y—轴的右边测量时横标是正的，在其左边测量时，横标为负，在x—轴上方测量时，纵标为正，在x—轴下方测量则为负。



如果给出点组的坐标，在坐标轴上标出相应的大小，这些点的位置，就完全确定了，并且很容易画出这些点来。

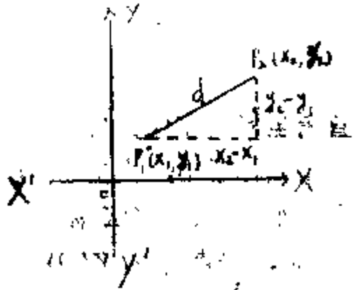
两点间的距离：已知两点P_1 (x_1,y_1)和P_2 (x_2,y_2)之间的距离d是：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

于是两点（4，－1）和（7，3）之间的距离为：

$$d=\sqrt{(7-4)^2+(3+1)^2}=5\text{个单位。}$$

分点：分点是划分线段为已知比的点，考虑直线上两点P_1（x_1，y_1）和P_2（x_2，y_2），其方向是从P_1到P_2，令$P(x,y)$是第三个点，它分直线所成的比是$\frac{P_1P}{PP_2}=\gamma$，因为在直线上P_1P和PP_2是指向同一方向的，故比值为正，若分点P（x，y）在两个方向之中的任何一个方向的延长线上，则$\frac{P_1P}{PP_2}=\gamma$是负的，这是因为P_1P与PP_2方向相反。

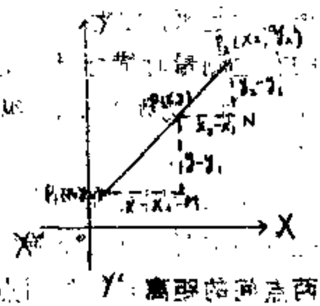


由相似三角形知

$$\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{P_1P}{PP_2}=\gamma.$$

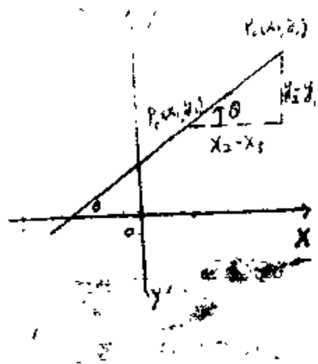
解出x，$x=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}$。

同样地，$y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}$。



若P（x，y）是线段P_1P_2的中点，则$\gamma=1$，$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$。

直线的倾角和斜率：直线L的倾角（与x—轴不平行）：从x—轴的正向按逆时针方向转到L的最小正角，定义为直线L的倾角，除非特别声明，L的正向总是考虑为向上的方向。若L与x—轴平行，它的倾角定义为零。



直线的斜率是由倾角的正切定义的。

例如 $m=\mathrm{tg}\theta$，此处θ是倾角，m是斜率。

经过两点P_1（x_1，y_1）和P_2（x_2，y_2）的直线不论P_1和P_2落在哪个象限里，这条直线的斜率都是

$$m=\mathrm{tg}\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

平行与垂直的直线

若两条直线平行，则他们的斜率相等。

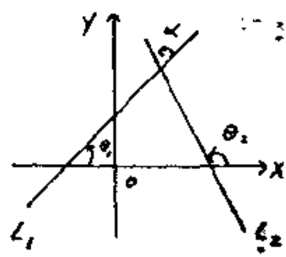
若两直线L_1和L_2垂直，则其中一直线的斜率是另一直线的斜率的负倒数。例如：若m_1是L_1的斜率，m_2是L_2的斜率，

$$则\ m_1=\frac{-1}{m_2}，或\ m_1m_2=-1.$$

两相交直线的夹角

设角α是从以m_1为斜率的直线L_1按逆时针方向转到以m_2为斜率的直线L_2的夹角，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}.$$



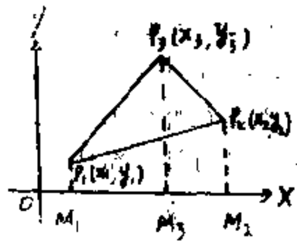
证明：$\theta_2=\alpha+\theta_1$或$\alpha=\theta_2-\theta_1$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\theta_2-\theta_1)$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\theta_2-\operatorname{tg}\theta_1}{1+\operatorname{tg}\theta_2\operatorname{tg}\theta_1}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}.$$

已知顶点的任意多边形的面积

令$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P_3(x_3,y_3)$为三角形的顶点，以它们为顶点的三角形的面积A是



$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3).$$

证明：三角形的面积＝梯形$M_1P_1P_3M_3$的面积＋梯形$M_3P_3P_2M_2$的面积－梯形$M_1P_1P_2M_2$的面积。

$$故A=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\frac{1}{2}(y_3+y_2)$$

$$\cdot(x_2-x_3)-\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

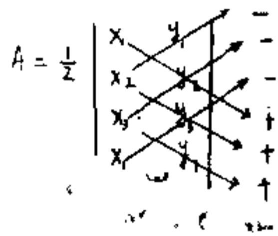
$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2).$$

也可以用行列式的形式表示：

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

求三角形的面积，使用下面的形式即阵列的形式是方便的，尤其对求多于三个边的多边形的面积时更有用。

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_3y_2 - x_2y_1\right)$$



注意： 阵列的第一行是重复的。

例　　题

两点间的距离：

1. 决定两点之间的距离，（a）（$-2,3$）和（$5,1$），（b）（$6,-1$）和（$-4,-3$）。

（a）$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

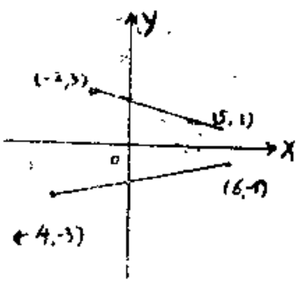
$= \sqrt{(5+2)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$。

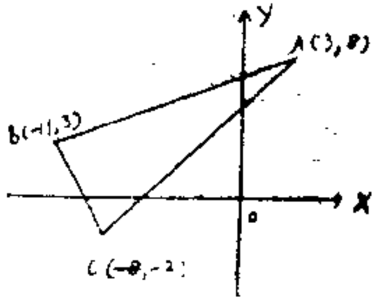
(*b*) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(-4-6)^2+(-3+1)^2}$

$=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.



第1题



第2题

2. 证明点A(3, 8), B(-11, 3), C(-8, -2)是等腰三角形的顶点。

$AB=\sqrt{(3+11)^2+(8-3)^2}=\sqrt{221}$.

$BC=\sqrt{(-11+8)^2+(3+2)^2}=\sqrt{34}$.

$AC=\sqrt{(3+8)^2+(8+2)^2}=\sqrt{221}$.

$\because\ AB=AC$

$\therefore\ \triangle ABC$是等腰三角形。

3. (*a*) 证明点A(7, 5), B(2, 3), C(6, -7)是直角三角形的顶点。

(*b*) 求此直角三角形的面积。

(a) $AB=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$.

$BC=\sqrt{(2-6)^2+(3+7)^2}=\sqrt{116}$.

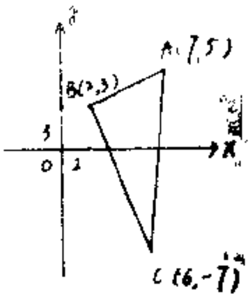
$AC=\sqrt{(7-6)^2+(5+7)^2}=\sqrt{145}$.

因为 $(AB)^2+(BC)^2=(AC)^2$ 或 $29+116=145$。

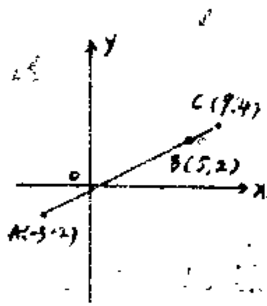
所以$\triangle ABC$是直角三角形。

(b) $\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}(AB)\cdot(BC)$

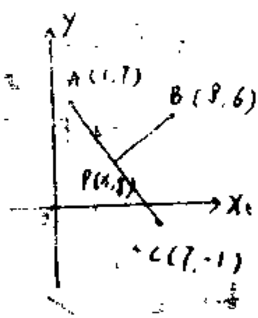
$=\frac{1}{2}\sqrt{29}\sqrt{116}=29$平方单位。



第3题



第4题



第5题

4. 证明点$A(-3, -2)$，$B(5,2)$，$C(9, 4)$落在一条直线上。

$AB=\sqrt{(5+3)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$.

$BC=\sqrt{(9-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$.

$AC=\sqrt{(9+3)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{5}$.

因为 $AB+BC=AC$ 或 $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$.

所以 A。B。C三点落在一条直线上。

5. 求到点$A(1, 7)$，$B(8, 6)$，$C(7, -1)$等距离的点。

令$P(x, y)$是所求的点。则$PA=PB=PC$。

由$PA=PB$，$\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$

$=\sqrt{(x-8)^2+(y+6)^2}$.

平方并化简得：$7x-y-25=0$ ………………… (1)

由$PA=PC$，$\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$

$=\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}$

平方化简得：$3x-4y=0$ ………………………… (2)

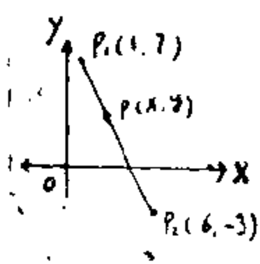
解 (1) 和 (2) 联立方程得：$x=4$，$y=3$。

因此所求点为 $(4, 3)$。

分线段为已知比的点

6. 求点$P(x, y)$的坐标，它分$P_1(1, 7)$到$P_2(6, -3)$的线段的比为

$r=\dfrac{2}{3}$.



因为比是正的，所以P_1P和PP_2必须有相同的方向，并且所求的点$P(x,y)$必须

在线段P_1P_2上（内分）。

$$\gamma=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}\ .$$

$$x=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}=\frac{1+\frac{2}{3}(6)}{1+\frac{2}{3}}=3,$$

$$y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}=\frac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}}=3.$$

所求点为（3，3）。

7. 点$P(x,\ y)$外分$P_1(-2,\ 1)$到$P_2(3,\ -4)$的线段的比为$\gamma=-\frac{8}{3}$，求点$P(x,\ y)$的坐标。

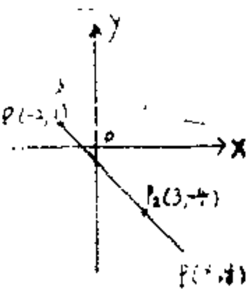
因为比值是负的，故P_1P和PP_2有相反方向，并且$P(x,\ y)$必须在线段P_1P_2的外边（外分），由

$$\gamma=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{8}{3}\ .$$

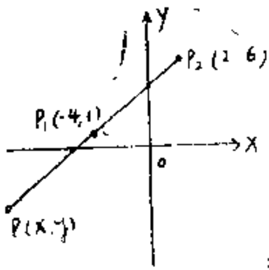
知$x=\dfrac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}=\dfrac{-2+\left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)}=6.$

$$y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}=\frac{1+\left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)}=-7.$$

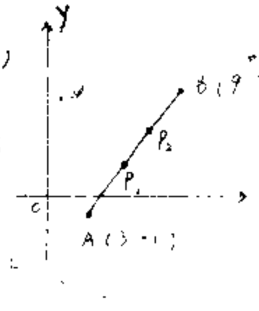
8. 园的中心在$P_1(-4,\ 1)$，直径的一个端点在$P_2(2,\ 6)$求直径另一端点。



第7题



第8题



第9题

因沿着直线P_1P和PP_2的方向相反，故比是负的。

$$x=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}=\frac{-4+\left(-\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-10.$$

$$y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)(6)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-4.$$

9、求三等分联接A（3，－1）和B（9，7）的线段的两点P_1（x_1，y_1）和P_2（x_2，y_2）。

求P_1（x_1，y_1）：$\gamma_1=\frac{AP_1}{P_1B}=\frac{1}{2}$，

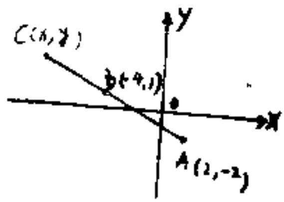
$$x_1=\frac{3+\frac{1}{2}(9)}{1+\frac{1}{2}}=5.$$

$$y_1=\frac{-1+\frac{1}{2}(7)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}.$$

求P_2（x_2，y_2）：$\gamma_2 = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{2}{1}$，$x_2 = \frac{3+2(9)}{1+2} = 7$，

$$y_2 = \frac{-1+2(7)}{1+2} = \frac{13}{3}.$$

10、点B（-4，1）是从端点A（2，-2）到另一个端点C（x，y）的线段上$\frac{3}{5}$处的点，求端点$C(x, y)$。



$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{AC}{CB} = -\frac{5}{2}.$$

因AC与CB方向相反，γ是负的，

$$所以x = \frac{2+\left(-\frac{5}{2}\right)(-4)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)} = -8,$$

$$y = \frac{-2+\left(-\frac{5}{2}\right)(1)}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)} = 3.$$

11、三角形三中线相交于一点P（x，y）称为三角形的形心。它位于从顶点到对边中点距离的$\frac{2}{3}$处，若三角形的顶点是A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3），求P（x，y）的坐标。

考虑中线APD，此处D是BC的中点，D的坐标是