工 程 数 学

复 变 函 数

（参 考 资 料）

江苏广播电视大学
高等数学教研室 编印

説　明

为帮助电大数学辅导教师更好地开展高等数学(三)——复变函数的教学工作，特编写本材料。

本材料是根据中央电大开设复变函数课的教学大纲，教学要求和选用的教材（工程数学“复变函数”——西安交大数学教研组编）而编写的。在编写过程中，从电大教学辅导的角度上，力求简明扼要，突出重点和难点，对基本定理和重要定理的叙述、证明到推广，均从复变函数理论本身，注意了系统性、严谨性及用其方法解决实际的重要性。根据教学的需要，各章节中另配有一定数量的例题，并对每章习题给以选解，以供辅导教师和学员在教学中参考。

由于编写水平有限，时间匆促，缺点错误在所难免，不妥之处，请师生在教学使用中提出批评指正。

本材料由徐建兰同志编写，并经无锡市教师进修学院徐渭彬、殷显华老师审阅，谨以致谢。

江苏广播电视大学
高等数学教研室

1980年8月

序

复变函数是由于客观实际的需要而产生和发展起来的研究复变数之间相互依赖关系的一门学科。

复变函数理论是近百年来经过许多数学家的研究而逐步完善起来的。主要是由柯西，魏尔斯脱拉斯和黎曼三个数学家各自以不同的观点研究的综合。柯西是从在一个区域内为单值可导的复变函数出发，建立了其着名的积分定理和公式，系统地发展了复变函数的积分，并证明这样的函数在其定义区域内以任一点为中心的充分小的园内可以用泰勒级数来表达；魏尔斯脱拉斯是从泰勒级数及其解析开拓所定义的函数出发来研究复变函数的理论，并尽可能系统地利用泰勒级数来研究复变函数的性质，使复变函数的理论更系统化.通过魏尔斯脱拉斯的解析开拓理论的研究可以使柯西研究的完全解析函数的单值分支得到同样的结果；黎曼则是从几何方面出发，奠定了复变函数的几何理论基础，给出了保角映射的基本定理和调和函数的物理解释，并给出了黎曼球面，使柯西的理论进一步得到发展和完善。

复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如空气力学，流体力学，电磁学，热学，弹性理论中的平面问题的有力工具。近几十年来，数学家们成功地利用复变函数的保角映射和级数展开的方法计算了绕流对机翼所引起的升力和力矩，并同样成功地运用这些方法处理了渗流中的应力计算等问题。因此随着现代科学技术的发展不仅丰富了复变函数的内容而且极大地推动复变函数理论的发展，我国数学家陈建功所研究的与力学的许多问题有密切联系的”拟似保角映射”是近代研究复变函数理论的新分枝。青年数学家杨乐、张广厚在整函数与亚纯函数近代理论的研究中作出了具有世界先进水平的成果，进一步发展了函数论的理论。

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数域内的推广和发展，因此它们之间有许多相似之处。但是复变函数理论自有其特点，如复指数函数e^z除保除了实指数函数e^x的基本性质：
$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$，$e^{z_1}/e^{z_2}=e^{z_1-z_2}$等外，还具有以$2\pi i$为周期的周期性的特性，即

$$e^{z+2k\pi i}=e^z\cdot e^{2k\pi i}=e^z(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)=e^z \quad (k\text{为整数})$$

这是实指数函数所没有的特性。

复变数函数论中研究的中心对象是解析函数。解析函数 $f(z)$ 的微商与实变函数 $f(x)$ 的微商虽在定义的形式上相同且有密切的联系，但它们所反映的实际对象又是有区别的。在数学分析中，如果把 $f(x)$ 看成质点直线运动中依赖于时间的运动路程，$f(x)$ 的微商 $f'(x)$ 就表示质点运动的速度；而解析函数研究的对象一般是平面问题，若复自变量记为 $Z=x+iy$，如果把 $f(z)$ 看成流体流动的复势，则它的微商 $f'(z)$ 的共轭函数就表示一个平面流速场 V。

复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 它的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是 x, y 的二元实变函数。复变函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分可表示为两个二元实变函数曲线积分的一种组合，即

$$\int_C f(z)dz=\int_C[udx-vdy]+i\int_C[udy+vdx]$$

这与二元函数的线积分在形式上有所不同，但反映实际的对象的本质却又是一样的。另外，数学分析中的一些问题只有以复变数的观点来分析，才能对问题理解清楚。如，在数学分析中，因为对于 $\frac{1}{1+x}$ 函数，当 $x=-1$ 时，函数无定义，所以对该函数的麦克劳林展开式的收敛半径为1还可以理解，但是对于函数 $\frac{1}{1+x^2}$，因为当 x 的任何实数时，它都有确定的值，于是对该函数的麦克劳林展开式的收敛半径也是1就不大好理解了。事实上，如用复变数概念来分析，因为复变函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 的奇点 $Z=\pm i$ 均在 $|Z|=1$ 上，所以它的泰勒展式 $\frac{1}{1+Z^2}=1-Z^2+Z^4-\cdots\cdots$ 的收敛半径是1，就可理解了。

所以复变函数是数学分析在复数域中的进一步发展。

学习复变函数，要在抓住复变函数与实变函数间的区别和联系的基础上，正确理解和掌握复变函数中的基本概念、基本理论和计算方法，逐步培养利用复变函数的概念、定理和方法的特点去处理和解决实际问题的能力。

电大开设复变函数课的教学重点是：解析函数的基本概念；柯西积分定理和公式，解析函数的泰勒和罗朗展式，留数定理及其应用，保角映射的概念和分式线性变换。

目　录

第一章　复数与复变函数

本章是在复习复数及其运算的基础上，引进复变函数的定义和复变函数的极限与连续性的概念，为研究复变函数的主要对象——解析函数作准备。

一、要　求

1°正确掌握复数的各种表示法以及相互转化的关系。

2°熟练掌握复数的四则运算法则，复数的乘方、开方运算以及棣莫佛公式。

3°正确理解区域的有关概念。

4°清楚理解复变函数的定义和它的几何意义——映射的概念，并对比实变函数 $y=f(x)$，正确理解复变函数的极限和连续性概念。

二、主要内容及补充例题

(一)复数及其运算

1.复数：形如 $Z=x+iy$ 称为复数

其中 x，y 为实数，$x=\mathrm{Re}Z$，$y=\mathrm{Im}Z$，$i^2=-1$

在复数中，不定义大小关系。

复数有相等关系，$x_1+iy_1=x_2+iy_2$ 等价于 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$。

2.复数的表示法：

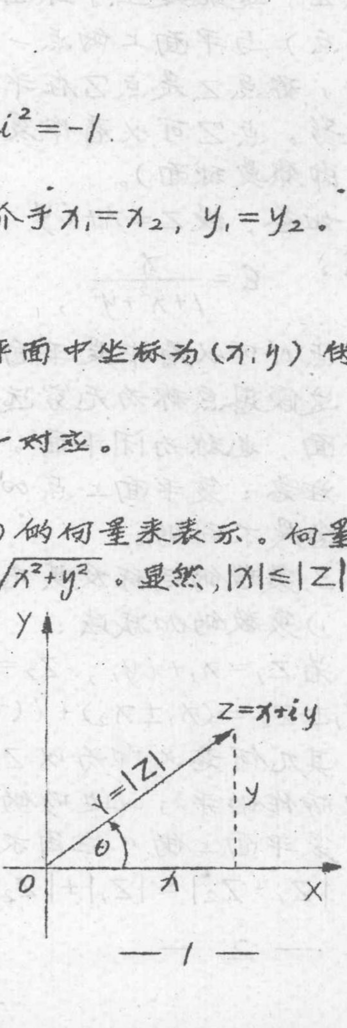
1)点表示法（直角坐标表示法）

复数 $Z=x+iy$ 可用给定了直角坐标系的平面中坐标为 (x,y) 的点来表示。此平面称复数平面。

这样，全体复数与复平面上的所有点一一对应。

2)向量表示法：

复数 $Z=x+iy$ 可用从原点指向点 (x,y) 的向量来表示。向量的长称为 Z 的模（或绝对值），记作：$|Z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$。显然，$|x|\leq|Z|$，$|y|\leq|Z|$，$|Z|\leq|x|+|y|$。



向量与 x 轴的交角 θ 为 Z 的幅角，记作：$\mathrm{Arg}Z=\theta$。

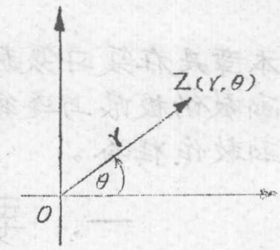
当 $Z\neq0$ 时，满足 $-\pi<\theta_0\leq\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}Z$ 的主值，记为：$\theta_0=\arg Z$。则

$\mathrm{Arg}Z=\theta_0+2K\pi$（K为任意整数）

当 $Z=0$ 时，因为 $|Z|=0$，所以幅角不确定。

又因为 $tg(Arg Z)=\frac{y}{x}$，所以可以由点 (x,y) 所在的位置来确定幅角所在的象限和主值的大小。

3) 三角表示法（极坐标表示法）

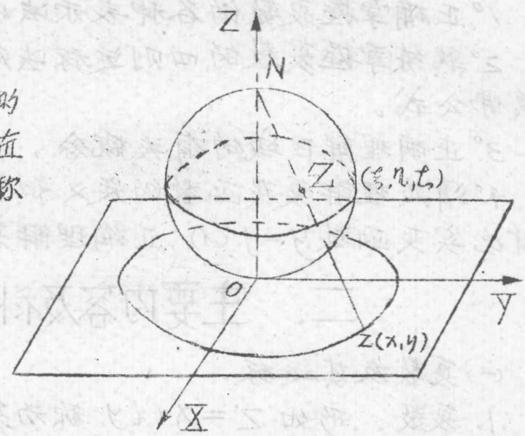


因为 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2}=|Z|$, $\theta=Arc\,tg\frac{y}{x}=Arg Z$，所以称 $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 为复数的三角表示法。

4) 指数表示法：

由尤拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得 $Z=re^{i\theta}$ 为复数的指数表示法。

5) 球面表示法



取一个在原点O与复平面相切的直径为1的球面，并通过O作一垂直于平面的直线与球面交于N点（N称为极点），分别用直线段将点N与球面上的Ƶ相连，其延长线交平面于一点Z，这就建立了球面上的点（除去N点）与平面上的点一一对应的关系，称点Ƶ是点Z在平面上的球极投影。点Ƶ可以看作复数Z的球面图形，这样的球面称为复数球面（即黎曼球面）。

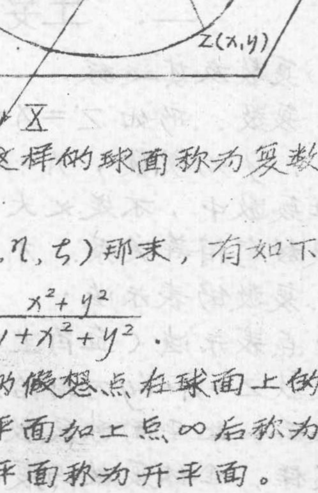
如图，设 $Z=x+iy$，又设Ƶ的坐标为 (ξ,η,ζ) 那末，有如下关系式：

$$\xi=\frac{x}{1+x^2+y^2},\quad \eta=\frac{y}{1+x^2+y^2},\quad \zeta=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

点N可以看作是平面上一个模为无限大的假想点在球面上的图形，这假想点称为无穷远点，记作：∞，复平面加上点 ∞ 后称为扩充平面，也称为闭平面。不包括无穷远点的平面称为开平面。

注意：复平面上点 ∞ 只有一个，这与数学分析中的 $+\infty$，$-\infty$ 的概念是不同的。

3. 复数的运算及其几何意义



1) 复数的加减法：

若 $Z_1=x_1+iy_1$，$Z_2=x_2+iy_2$，

则 $Z_1\pm Z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$

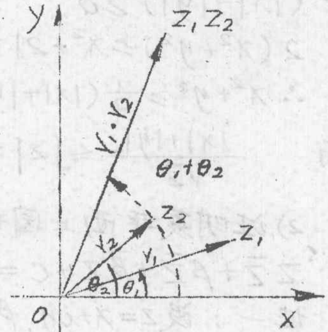
其几何意义即为以 Z_1, Z_2 对应的向量为边所作的平行四边形的两对角线。

复平面上的"三角不等式"为：

$|Z_1+Z_2|\le|Z_1|+|Z_2|$, $|Z_1-Z_2|\ge|Z_1|-|Z_2|$.

2）复数的乘法：

若 $Z_1=x_1+iy_1$，$Z_2=x_2+iy_2$，则 $Z_1\cdot Z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$
这样复数的乘同实数一样，只需注意 $i^2=-1$，但这样定义的乘积与向量的"。"和"×"乘都不一样。



采用三角式：

若 $Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$
则 $Z_1\cdot Z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$|Z_1\cdot Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2|$，$\operatorname{Arg}(Z_1Z_2)=\operatorname{Arg}Z_1+\operatorname{Arg}Z_2$

其几何意义即 Z_1Z_2 所对应的向量是把 Z_1 拉长 r_2 倍，再把它旋转 θ_2 角度。

由乘法定义得：$Z_1Z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
由此，若 $Z_K=r_K(\cos\theta_K+i\sin\theta_K)=r_Ke^{i\theta_K}$ $(K=1,2,\cdots n)$
则 $Z_1\cdots Z_n=r_1\cdots r_n[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)]=r_1\cdots r_ne^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}$

特别，当 $Z_1=\cdots\cdots=Z_n=\cos\theta+i\sin\theta$ 时，得棣莫佛公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

3）复数的除法：

若 $Z_1=x_1+iy_1$，$Z_2=x_2+iy_2$ $(Z_2\neq0)$ 则 $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

或 $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$，$\operatorname{Arg}\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)=\operatorname{Arg}Z_1-\operatorname{Arg}Z_2$.

4）乘方：

$$Z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta}\quad(n\text{为正整数})$$

5）方根：

若 $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$W=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 则由 $W^n=Z$.
可得 $\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
于是 $\rho^n=r$，$n\varphi=\theta+2K\pi$ $(K=0,\pm1,\cdots\cdots)$
由此：$\rho=r^{\frac{1}{n}}$，$\varphi=\dfrac{\theta+2K\pi}{n}$
所以 $W=\sqrt[n]{Z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta+2K\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2K\pi}{n}\right)$ $(k=0,1,\cdots\cdots n-1)$

其几何意义即以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

4. 共轭复数

复数 $Z=x+iy$ 的共轭复数为：$\bar{Z}=x-iy$.
它们是关于实轴的对称点，且 $|Z|=|\bar{Z}|$，$\operatorname{Arg}Z=-\operatorname{Arg}\bar{Z}$.
其性质有：$\overline{Z_1\pm Z_2}=\bar{Z}_1\pm\bar{Z}_2$，$\overline{Z_1Z_2}=\bar{Z}_1\bar{Z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)}=\dfrac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$.

$\bar{\bar{Z}}=Z$，$Z\bar{Z}=|Z|^2$，$Z+\bar{Z}=2\operatorname{Re}Z$，$Z-\bar{Z}=2i\operatorname{Im}Z$.

5. 例题：

1) 证明：$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |Z| \leq |x|+|y|$

证：设 $Z=x+iy$，则 $|Z|=\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+2|xy|+y^2}=|x|+|y|$

又 $\because (|x|-|y|)^2 \geq 0$，　$\therefore x^2+y^2 \geq 2|xy|$

$2(x^2+y^2) \geq x^2+2|xy|+y^2=(|x|+|y|)^2$

$\therefore x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(|x|+|y|)^2$，即 $|Z|=\sqrt{x^2+y^2} \geq \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$

因而　$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x|+|y|$

2) 证明复平面上圆形方程可写成：

$Z\overline{Z}+\beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z+C=0$（其中 C 为实数，β 为复数）

证一：设 $Z=x+iy$，$\beta=\beta_1+i\beta_2$，则 $\overline{Z}=x-iy$，$\overline{\beta}=\beta_1-i\beta_2$．

由 $Z\overline{Z}=x^2+y^2$，　$\beta\overline{Z}=(\beta_1 x+\beta_2 y)+i(-\beta_1 y+\beta_2 x)$

$\overline{\beta}Z=(\beta_1 x+\beta_2 y)+i(\beta_1 y-\beta_2 x)$

$\therefore \beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z=2(\beta_1 x+\beta_2 y)$，故 $Z\overline{Z}+\beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z+C=x^2+y^2+2\beta_1 x+2\beta_2 y+C=0$.

其中 β_1, β_2, C 均为实数，x, y 为实数，显见为圆方程。

反之，复平面上圆方程为

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$。　令 $x=\frac{1}{2}(Z+\overline{Z})$，$y=\frac{1}{2i}(Z-\overline{Z})$

则得　$Z\overline{Z}+(\frac{D}{2}-\frac{E}{2}i)Z+(\frac{D}{2}+\frac{E}{2}i)\overline{Z}+F=0$

令 $\beta=\frac{D}{2}+\frac{E}{2}i$，　$\overline{\beta}=\frac{D}{2}-\frac{E}{2}i$，　$C=F$

即得　$Z\overline{Z}+\beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z+C=0$。　　证毕．

证二：$\because Z\overline{Z}+\beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z+C=0$，即 $\overline{Z}(Z+\beta)+\overline{\beta}(Z+\beta)+C-\beta\overline{\beta}=0$.

$\therefore (Z+\beta)(\overline{Z}+\overline{\beta})=\beta\overline{\beta}-C$　　即 $(Z+\beta)^2=|\beta|^2-C$.

当 $|\beta|^2-C>0$ 时，即得 $|Z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-C}=r$（实数）为以点 $Z_0=-\beta$ 为圆心，r 为半径之圆。

因为运算可逆，故 $Z\overline{Z}+\beta\overline{Z}+\overline{\beta}Z+C=0$ 表示为圆方程。

3) 试证：$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$，　$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.

证：$\because (\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$，　令 [illegible] $=3$

得 $(\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x)+i(3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x)=\cos 3x+i\sin^3 x$

故 $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$，　$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.

4) 求 $\sqrt[3]{1+i}$

解：$\because 1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$\therefore \sqrt[3]{1+i}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$　$(k=0,1,2)$

即 $W_0=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=\sqrt[6]{2}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$

$W_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12})=W_0\varepsilon$

$W_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12})=W_0\varepsilon^2$

$(\varepsilon=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$　$\varepsilon^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i))$

（二）区域

1. 平面点集：

有限个或无限个点的集合称为一个点集。因为平面上的点和复数是一一对应的，所以平面点集也可视为复数的集合。

2. 邻域

设z_0为平面上一点，对任何给定的正数δ满足：$|z-z_0|<\delta$（或$0<|z-z_0|<\delta$）的点的集合称点z_0的邻域，记以：$N(z_0,\delta)$。

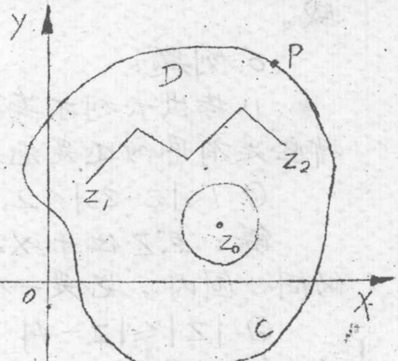
若$z_0=\infty$，K为任何正数，满足$|z|>K$的点的集合称无穷远点邻域，记以：$N(\infty,K)$。

3. 区域

平面点集D称为一个区域，如果满足下列两个性质：

1) 开集性：D的每一点至少有一个邻域，这个邻域内的所有点都属于D；

2) 连通性：D中的任意两点可用一条折线连起来，这条折线整个属于D。

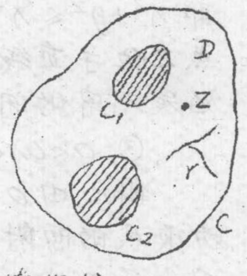


4. 边界和闭域：

若点P不属于D，但它任意一个P的邻域都包含D的点，则P称为D的一个边界点。D的全部边界点构成一个点集C，称为D的边界。

边界可能由几条曲线和一些孤立点所构成。

区域D和它的边界C一起构成闭区域，记作：$\overline{D}=D+C$。



如果一个区域D可被包含在一个以原点为中心的圆里面，则称D为有界的，否则称为无界的。

5. 单连域与多连域：

1) 连续曲线：

若$x(t)$和$y(t)$是两个连续的实变函数，则方程组 $x=x(t),\ y=y(t)\ (a\le t\le b)$ 为平面上一条连续曲线。

如果令 $Z(t)=x(t)+iy(t)$，那末方程 $Z=Z(t)\ (a\le t\le b)$ 为平面连续曲线的复数表达式。

2) 光滑曲线：

如果在区间 $a\le t\le b$ 上，$x'(t)$和$y'(t)$是连续的，且对于t的每一个值，有$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，那么曲线 $Z=x(t)+iy(t)$ 称为光滑的。（有连续变动的切线）

3) 简单闭曲线：

若 $Z(a)=Z(b)$，且当 $t_1 \neq t_2$ 时，$Z(t_1) \neq Z(t_2)$，则连续曲线 C：$Z=Z(t)$ $(a \leq t \leq b)$ 称为简单闭曲线。

简单闭曲线将平面分为两个区域，其中一个是有界的（称为内部），另外一个是无界的（称为外部）

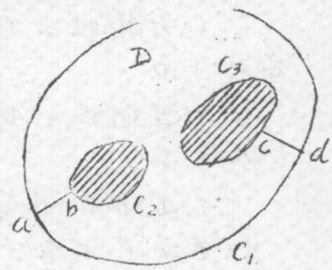
4) 单连域：

凡属于 D 内的简单闭曲线的内部仍属于 D，则称 D 为单连通域。非单连通域为多连通域。

D 若为单连通域则在 D 内任取一简单闭曲线 Γ 必在 D 内连续收缩成 D 内某点。

一个多连通域可适当引入一些割线，使它变成单连通域。

例如，图中是以 C_1、C_2、C_3 三条闭曲线为界的三连通域，用割线 ab 连结 C_1、C_2，又用割线 cd 连结 C_1、C_3，则割裂后的区域 D 就为单连通域。

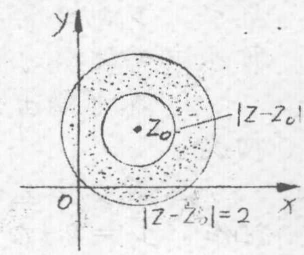


6. 例题：

1) 指出下列不等式所确定的区域，并指出哪些是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连通的还是多连通的：

① $1<|Z-Z_0|<2$.

解：点 Z 位于以 Z_0 为圆心，以 2 和 1 为半径的同心圆内。它是一有界的开的多连域。

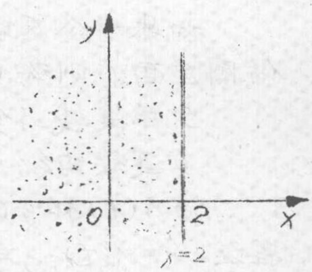


② $|Z| \leq |Z-4|$

解：设 $Z=x+iy$，则 $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{(x-4)^2+y^2}$，

即 $x^2+y^2 \leq x^2-8x+16+y^2$，　$\therefore x \leq 2$.

点 Z 位于直线 $x=2$ 的左侧（包括直线在内）。它是无界的闭的单连域。

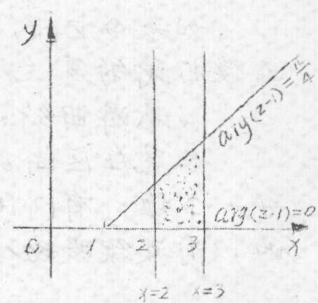


③ $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$，$2<\mathrm{Re}Z<3$.

解：由 $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$ 得 Z 位于以 $(1,0)$ 为顶点的两射线 $\arg(z-1)=0$，$\arg(z-1)=\frac{\pi}{4}$ 构成的角形域内（不包括两射线）。

由 $2<\mathrm{Re}Z<3$，得 Z 位于两直线 $x=2$，$x=3$ 构成的带形域内（不包括两直线）。

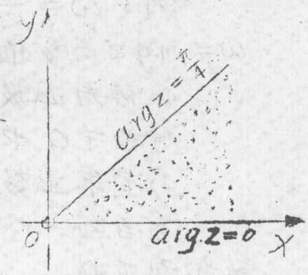
故 Z 位于上述两公共域内，是有界的开的单连域。



④ $0 \leq \arg Z \leq \frac{\pi}{4}$

解：$\because$ 当 $Z=0$ 时，$\arg Z$ 是不确定的（无意义的）。

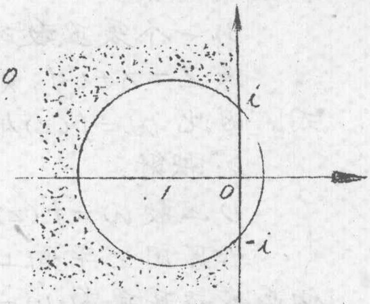
④ $0\leq \arg Z\leq \frac{\pi}{4}$ 是除 $Z=0$ 点外的两条射线构成的角形域.(包括两条射线在内),因而既不构成区域也不构成闭区域,仅是开的无界的单连通的平面点集。



⑤ $0<\arg \frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$.

解:$\because \frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$。

又 $\because 0<\arg \frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$ $\therefore \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$



由此有
$$\begin{cases}-2x>0\\ x^2+y^2-1>0\\ -2x<x^2+y^2-1\end{cases}\Longrightarrow \therefore \begin{cases}x<0\\ x^2+y^2>1\\ (x+1)^2+y^2>2\end{cases}$$

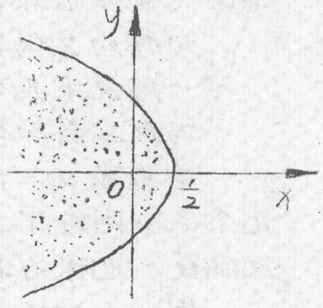
故 Z 位于圆 $(x+1)^2 y^2=(\sqrt{2})^2$ 外,且属于左半平面(不包括 $x=0$ 和圆在内)的所有的点的集合,是开的无界的单连通区域。

⑥ $|Z|<1-\mathrm{Re}Z$.

解:设 $Z=x+iy$,则 $\sqrt{x^2+y^2}<1-x$,

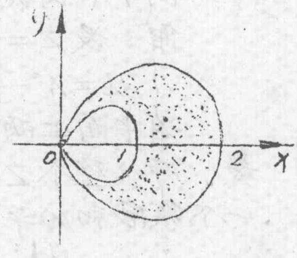
即 $x^2+y^2<1-2x+x^2$, $\therefore y^2<1-2x$,

故 Z 位于抛物线 $y^2=1-2x$ 之内部,是无界的开的单连域。



2) 问满足条件 $\cos\theta<r<2\cos\theta$, $0\leq\theta<2\pi$ 的点 $Z=re^{i\theta}$ 的集合是什么区域?

解:当 $0\leq\theta<2\pi$ 时,$\cos\theta$ 从 $1\to 0\to -1\to 0\to 1$,$2\cos\theta$ 从 $2\to 0\to -2\to 0\to 2$,$\therefore r$ 随着 θ 的变化而变化;但要满足 $\cos\theta<r<2\cos\theta$ 的 θ 只能是在 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}\leq\theta<2\pi$ 内变化,故点 Z 在这两条曲线内所围成的点的集合(不包括 $Z=0$ 点),是一个有界的单连域。



(三) 复变函数的基本概念

1. 复变函数:

1) 定义:设 G 是复数平面上的一个点集,若 Z 可代表 G 的任一点,则 Z 称为复变数,G 称为 Z 的变化域。

若对每一个 $Z\in G$ 有确定的复数 ω 和它对应,则 ω 称为 Z 的复变函数,记以:$\omega=f(z)$。

若 Z 的一个值对应着一个 ω 值,那末称复函数 $f(z)$ 是单值的;若 Z 的一个值对应着两个或两个以上的 ω 值,那末称复函数 $f(z)$ 是多值的。

例：$w=\frac{1}{z}$，$w=\frac{z}{z^2+1}$ 等都是单值复变函数，而 $w=z^{\frac{1}{2}}$，$w=\mathrm{Arg}\,z$ 为多值复变函数。

G 称为函数 $f(z)$ 的定义域。

对应于 G 中的有 Z 的一切 w 值所成之集合 G′ 称为函数值集合。

2) 有界函数：

若当每一个 $Z\in G$ 有 $|f(z)|<K$（K 为正数），则 $f(z)$ 称为有界函数或囿函数。

3) 一个复函数可看成两个二元实函数对。

设 $Z=x+iy$，则 $w=f(z)$，可写成：$w=u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式。因此 $w=f(z)$ 相当于以下两个方程：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

2. 映射：

1) 函数 $w=f(z)$ 的映射

如果用 Z 平面上的点表示自变量 Z 的值，而用另一个 w 平面上的点表示其函数 $w=f(z)$ 的值，那末函数 $w=f(z)$ 在几何上就可看作是将 Z 平面上的一个点集 G（定义集合）变到 w 平面上的一个点集 G′（函数值集合）的映射。简称由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射。

w 称为 Z 的象（映象），而 Z 称为 w 的原象。

一般说来函数是就数的对应而言，映射是就点的对应而言。

2) 反函数和逆映射

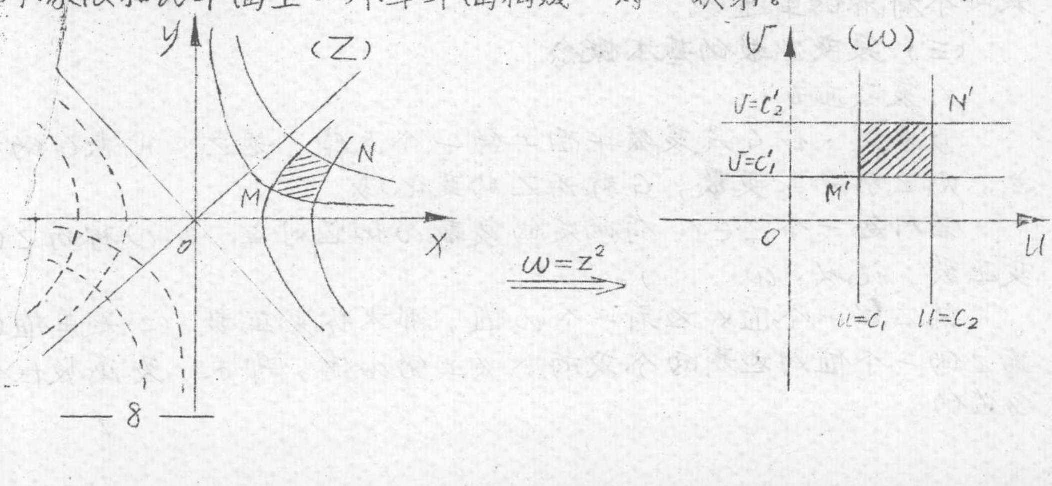
若函数 $w=f(z)$ 的函数集合 G′ 中每一个点对应着 G 中的一个或几个点，则在 G′ 上就确定了函数 $Z=\varphi(w)$，它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数。也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射。

例 1．讨论函数 $w=z^2$ 的映射

解：设 $Z=x+iy$，$w=u+iv$，则 $u+iv=(x+iy)^2$

$\therefore\ u=x^2-y^2$，$v=2xy$。

若平面上两双曲线 $x^2-y^2=C_1$，$2xy=C_2$，由于双曲线包含两枝，所以整个 Z 平面和整个 w 平面不构成一对一映射，但 Z 平面上一个象限和 w 平面上一个半平面构成一对一映射。

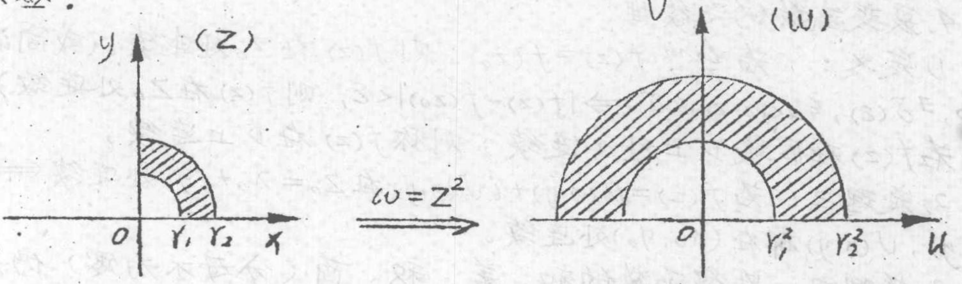


图中Z平面上曲线矩形MN和W平面上矩形M'N'为对应区域。

又如令$Z=re^{i\theta}$，则$\omega=r^2e^{2i\theta}$.

由此$|\omega|=r^2$，$\arg\omega=2\theta$

当Z在第一象限以原点为心，r为半径，描四分之一圆周，则ω在ω平面上的上半平面，以原点为心，r^2为半径，描半圆周，如下图：



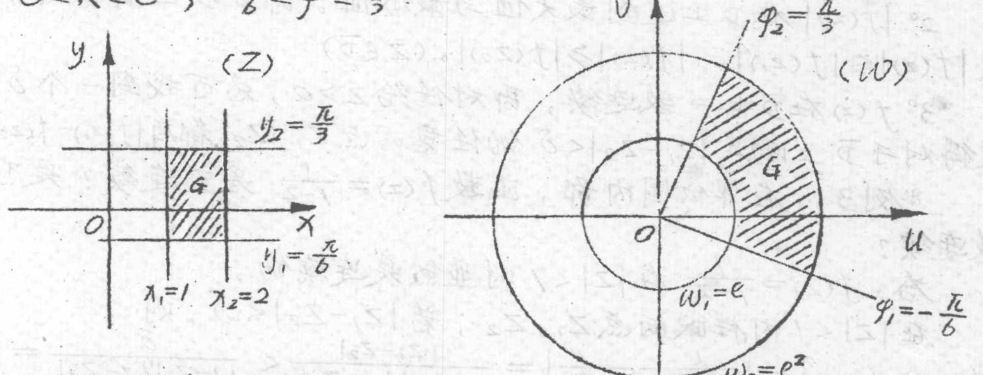
例2. 若映射$\omega=e^z$，求Z平面上闭区域：$1\le \operatorname{Re}Z\le 2$及$-\frac{\pi}{6}\le \operatorname{Im}Z\le\frac{\pi}{3}$在ω平面上的象。

解：设$Z=x+iy$，$\omega=Re^{i\varphi}$. $\because \omega=e^z$，即$Re^{i\varphi}=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$，

$\therefore R=e^x$，$\varphi=y$，故Z平面上闭区域G

$1\le \operatorname{Re}Z\le 2$，$-\frac{\pi}{6}\le \operatorname{Im}Z\le\frac{\pi}{3}$，对应在ω平面上为闭区域G'：

$e\le R\le e^2$，$-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$



3. 复变函数的极限

1) 定义：设函数$\omega=f(z)$在Z_0的邻域$0<|Z-Z_0|<\delta$内有定义，若有一确定数A存在，对于任给$\varepsilon>0$，总可找到$\delta(\varepsilon)$，只要当$0<|Z-Z_0|<\delta$时，总有$|f(z)-A|<\varepsilon$成立，则称A为$f(z)$当Z趋向于Z_0时的极限，记作：$\lim\limits_{Z\to Z_0}f(z)=A$.（或简写成：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)$，$\ni 0<|z-z_0|<\delta \Longrightarrow |f(z)-A|<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{Z\to Z_0}f(z)=A$）

注意：$Z\to Z_0$的方法是任意的。

2) 定理一：设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$Z_0=x_0+iy_0$。

则$\lim\limits_{Z\to Z_0}f(z)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$

3) 定理二：若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim_{z\to z_0} g(z)=B$.

则 1° $\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$,

2° $\lim_{z\to z_0} f(z)\,g(z)=AB$

3° $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

4. 复变函数的连续性

1) 定义：若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则 $f(z)$ 在 z_0 处连续。(或简记：$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)$, 当 $0<|z-z_0|<\delta \Longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处连续)

若 $f(z)$ 在区域 D 上处々连续，则称 $f(z)$ 在 D 上连续。

2) 定理三：若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$, $v(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 处连续。

3) 定理四：连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍为连续函数，连续函数的复合函数仍为连续函数。

4) 有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续函数具有以下三条性质：(与数学分析中相类同).

1° 在 $\bar{D}$ 上 $f(z)$ 有界，即存在一正数 M，使对于 $\bar{D}$ 上所有的点都有 $|f(z)|\leq M$.

2° $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上达到最大值与最小值。即在 $\bar{D}$ 上有两点 z_1, z_2, 使 $|f(z)|\leq|f(z_1)|$, $|f(z)|\geq|f(z_2)|$。$(z\in\bar{D})$

*3° $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致连续，即对任给 $\varepsilon>0$，总可找到一个 $\delta>0$, 使得对于 $\bar{D}$ 上满足 $|z_1-z_2|<\delta$ 的任意两点 z_1, z_2, 都有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

*例3. 在单位圆内部，函数 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 是否连续？是否一致连续？

答：$f(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 时显然是连续的。

在 $|z|<1$ 内任取两点 z_1, z_2，若 $|z_1-z_2|<\delta$, 则

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{1}{1-z_1}-\frac{1}{1-z_2}\right|=\frac{|z_1-z_2|}{|1-z_1||1-z_2|}<\frac{\delta}{|1-z_1||1-z_2|}=k.$$

显然 k 值随不同之 z_1, z_2 而异，特别 z_1, z_2（或其中任一点）趋向单位圆上 $(1,0)$ 这点时，k 无限增大。

如果把 k 值固定为 ε，则 δ 随不同之 z_1, z_2 而异，特别在 z_1, z_2 趋向单位圆周上 $(1,0)$ 这点时 δ 趋无限小，不能为正常的数，故在单位圆内部 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 不一致连续。

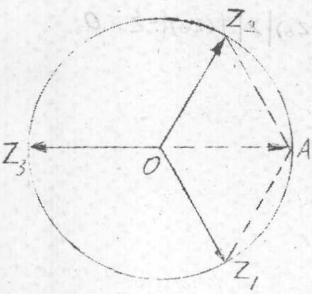
惟限制在 $|z|\leq 1-\lambda$，则 $|1-z_1|\geq\lambda$, $|1-z_2|\geq\lambda$ $(\lambda>0)$ 时，

$|f(z_1)-f(z_2)|<\frac{\delta}{|1-z_1||1-z_2|}<\frac{\delta}{\lambda^2}$ 故可取 $\delta=\lambda^2\varepsilon$ (δ 与 z_1, z_2 无关) 即能使 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$, 对于 $|z|\leq 1-\lambda$ 的任何 z_1, z_2 成立，故函数 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|\leq 1-\lambda$ 上一致连续。

三．习题选解

四. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0$, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 证明：z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

证：令 $\overrightarrow{OA}=z_1+z_2$ 则 Oz_1Az_2 为平行四边形，由条件：



$z_1+z_2=-z_3$. ∴ $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{Oz_3}$. ∴ z_3, O, A 共线。

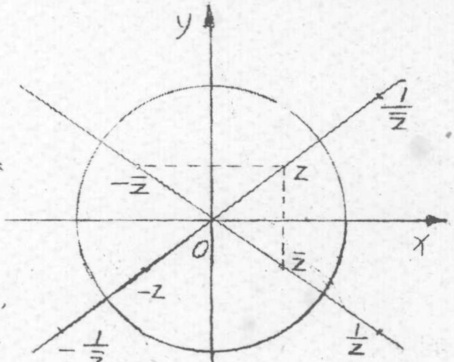
故 $OA=Az_2=Oz_2$。 ∴ $\angle z_2OA=60°$.

$\angle z_3Oz_2=120°$, $\angle z_2Oz_1=120°$.

∴ z_1, z_2, z_3 为内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的三个顶点。

15. 在平面上任意选一点 z，然后在复平面上画出下列各点的位置 $-z, \bar{z}, -\bar{z}, \frac{1}{z}, \frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{z}}$.

解：1) $-z$ 与 z 关于原点对称；2) $\bar{z}$ 与 z 关于实轴对称；3) $-\bar{z}$ 与 z 关于虚轴对称；4) $\frac{1}{\bar{z}}$ 与 z 关于单位圆 $|z|=1$ 对称；5) $\frac{1}{z}$ 与 $\bar{z}$ 关于单位圆 $|z|=1$ 对称；6) $-\frac{1}{z}$ 与 $\frac{1}{z}$ 关于原点对称。

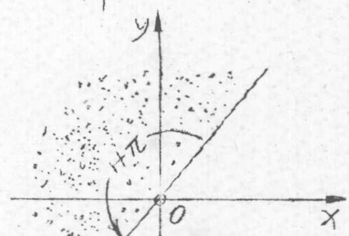


注：在以圆心为起点的一条半直线上，如果有两点 P 与 P' 满足关系式 $OP\cdot OP'=r^2$，那末称这两点关于圆周是互相对称的。

19. 指出下列不等式所确定的区域，并指明是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的：

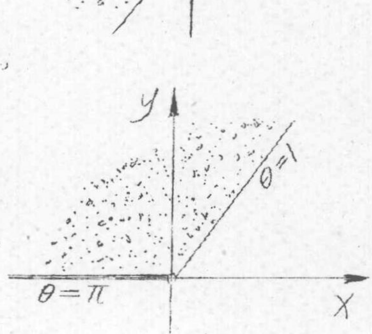
6) $1<\arg z<1+\pi$

解：以射线 $\theta=1$ 和 $\theta=1+\pi$ 为边界的左上方半平面区域，不包括这两条射线在内。是无界的，开的单连通域。



注：这里幅角的主值 $\arg z$ 定义应满足 $0\leq\arg z<2\pi$；而教材中的定义要满足 $-\pi<\arg z\leq\pi$，这两种定义一般是通用的。

但如果严格按教材中的定义，此题应为：以射线 $\theta=1$ 和 $\theta=\pi$ 为边界的左上方平面部分，包括射线 $\theta=\pi$，但不包括射线 $\theta=1$ 在内。是无界的，单连通的平面点集。（不是区域，也不是闭区域）。



24. 设函数 $f(z)$ 在 z_0 连续，且 $f(z_0)\neq0$，

那末可找到 z_0 的小邻域，在这小邻域内 $f(z)\neq 0$。

证：$\because f(z_0)\neq 0$，　$\therefore |f(z_0)|>0$。

取 $\varepsilon>0$，使 $|f(z_0)-\varepsilon|>0$.　由 $f(z)$ 在 z_0 点连续，故 $\forall\varepsilon>0$，
$\exists\,\delta>0,\ni |z-z_0|<\delta \Longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

又 $\because |f(z)-f(z_0)|\geqslant|f(z)|-|f(z_0)|$

$\therefore$ 当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)|\geqslant|f(z_0)|-|f(z)-f(z_0)|>|f(z_0)|-\varepsilon>0$.

$\therefore f(z)\neq 0$。