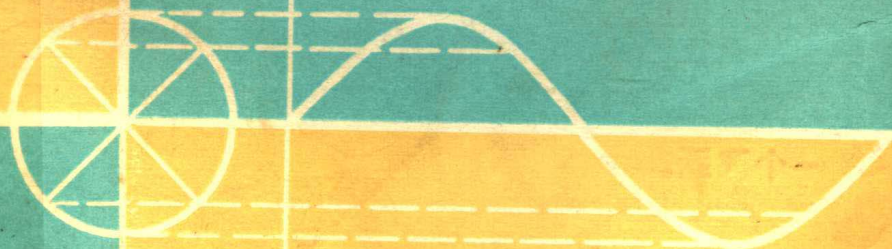


基础数学

(中册)



湖南邵阳师专数学科编

毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还须再回到实践去。认识的能动作用，不但表现于从感性的认识到理性的认识之能动的飞跃，更重要的还须表现于从理性的认识到革命的实践这一个飞跃。

目 录

第六章 三元一次方程和平面

第一节 空间直线和平面

一、平面的确定	(1)
习题二十七	(4)
二、直线和平面平行	(5)
习题二十八	(9)
三、直线和平面相交	(9)
习题二十九	(14)
四、平行平面	(15)
习题三十	(17)
五、平面和平面相交	(17)
习题三十一	(22)

第二节 空间直角坐标系和空间向量

一、空间直角坐标系	(23)
二、向量的坐标	(26)
三、向量的模和方向余弦	(27)
习题三十二	(29)

第三节 空间向量的运算

- 一、向量的和差及数与向量的积……………(30)
 - 习题三十三……………(33)
- 二、空间向量的乘法……………(34)
 - 习题三十四……………(49)

第四节 平面的方程

- 一、平面的普通方程……………(51)
- 二、平面的法线式方程……………(56)
- 三、两平面的位置关系……………(59)
 - 习题三十五……………(66)

第五节 空间直线

- 一、空间直线的方程……………(69)
- 二、空间直线与平面的位置关系……………(72)
- 三、空间两直线的位置关系……………(75)
 - 习题三十六……………(80)

第六节 三元一次方程组

- 一、三元一次方程组的概念……………(83)
- 二、三元一次方程组的解法……………(84)
- 三、三元一次方程组解的几何意义及平面束方程……………(92)
 - 习题三十七……………(95)

第七章 二次方程、二次曲线与二次曲面

第一节 二次函数及其图象

- 一、二次函数的概念·····(99)
- 二、二次函数的图象·····(100)
- 三、二次函数的极值·····(106)
- 习题三十八·····(111)

第二节 一元二次方程

- 一、一元二次方程的概念·····(113)
- 二、一元二次方程的解法·····(114)
- 三、一元二次方程根与系数的关系·····(122)
- 四、可化为一元二次方程来解的方程·····(122)
- 习题三十九·····(125)

第三节 一元二次不等式

- 一、一元二次不等式的概念·····(128)
- 二、一元二次不等式与二次函数的关系·····(129)
- 三、一元二次不等式的解法·····(130)
- 习题四十·····(135)

第四节 二次曲线

- 一、曲线与方程的概念·····(136)

- 二、圆.....(138)
- 三、椭圆.....(143)
- 四、双曲线.....(153)
- 五、抛物线.....(161)
- 六、圆锥曲线的内在联系.....(166)
- 习题四十一.....(168)

第五节 二元二次方程的图形

- 一、 $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$ 型方程的化简.....(173)
- 二、 $AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ 型方程的
 化简.....(175)
- 三、一般二元二次方程的讨论.....(178)
- 四、圆锥曲线的切线.....(188)
- 习题四十二.....(195)

第六节 二元二次方程组

- 一、由一个二元一次方程与一个二元二次方程所组成
 的方程组的解法.....(197)
- 二、由两个二元二次方程所组成的方程组的解法.....(201)
- 习题四十三.....(206)

第七节 二次曲面及其标准方程

- 一、椭球面.....(208)
- 二、单叶双曲面.....(213)

三、双叶双曲面·····	(218)
四、椭圆抛物面·····	(221)
五、双曲抛物面·····	(223)
六、二次柱面·····	(225)
七、二次锥面·····	(228)
习题四十四·····	(235)

第八章 基本初等函数

第一节 幂函数

一、幂函数的概念·····	(237)
二、幂函数的性质和图象·····	(238)
习题四十五·····	(241)

第二节 指数函数

一、无理指数幂的概念·····	(241)
二、指数函数的概念·····	(243)
三、指数函数的图象和性质·····	(244)
习题四十六·····	(249)

第三节 对数函数

一、对数的概念·····	(250)
二、反函数及其图象·····	(252)

三、对数函数的概念	(255)
四、对数函数的图象和性质	(256)
习题四十七	(259)

第四节 对数的应用

一、对数的运算法则	(261)
二、常用对数的概念和性质	(263)
三、常用对数表与反对数表	(266)
四、利用对数进行计算	(267)
五、对数换底公式	(272)
习题四十八	(274)

第五节 三角函数的性质和图象

一、三角函数的性质	(276)
二、三角函数的图象	(294)
习题四十九	(306)

第六节 反三角函数

一、反三角函数的概念及其多值性	(309)
二、反正弦函数的概念、性质和图象	(310)
三、反余弦函数的概念、性质和图象	(315)
四、反正切、反余切函数的概念、性质和图象	(319)
五、三角方程	(326)
习题五十	(334)

第九章 数列与极限

第一节 数列的概念

- 一、数列的概念.....(338)
- 二、数列的分类.....(340)
- 习题五十一.....(340)

第二节 等差数列

- 一、等差数列及其通项公式.....(341)
- 二、等差数列的求和公式.....(342)
- 习题五十二.....(346)

第三节 等比数列

- 一、等比数列及其通项公式.....(347)
- 二、等比数列的求和公式.....(349)
- 习题五十三.....(352)

第四节 数列的极限

- 一、数列极限的初步描述.....(353)
- 二、数列极限的定义.....(354)
- 三、数列极限的性质.....(357)
- 四、无穷大.....(364)
- 习题五十四.....(365)

第五节 等比级数

一、等比级数·····	(366)
二、等比级数的和·····	(367)
三、循环小数化分数·····	(371)
习题五十五·····	(374)

第六章 三元一次方程和平面

第一节 空间直线和平面

在前面几章，已研究过平面图形的性质及其应用，但在三大革命实践中，我们所接触到的更多的是空间图形。例如，修筑堤坝时，如何考虑堤坝与地面的交角的大小；在工程设计中，怎样画出一个建筑物的平面图或一个机器的零件图等。这些问题的解决都需要我们研究空间图形的性质。

空间图形与平面图形不同。构成平面图形的元素——点、线都在同一平面内；而构成空间图形的元素除点、线外，还有面，而且图形的各部分不都在同一平面内。直线和平面是组成空间图形的两个重要元素，空间直线和平面的位置有些什么关系？有什么性质？怎样分析？这里介绍一些基本知识。

一、平面的确定

1. 平面的表示法

平坦的地面，平静的水面，都具有平整的表面，给人们以平面的形象。对各种表面是平面的实物来说，其表面有大有小，但在数学中，正如我们可以把直线看成是无限延伸一样，也可

以把平面想象为无限伸展而没有大小的限定。无限伸展的平面不可能全部画出来，所以只能用平面的一部分来代表。通常就画一个平行四边形来代表平面。为什么要画成平行四边形？这是为了直观，比如画一张方桌，如果把方桌面画成正方形，就没有立体感，反而不象。我们还通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边等于另一边的两倍。如果一个平面的一部分被另一面遮住，那么被遮部分的线段应画成虚线或者不画，如图6—1。

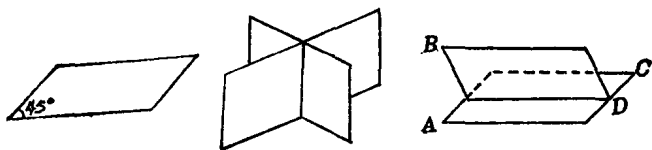


图 6—1

平面一般用希腊字母 α 、 β 、 γ 、……来表示。有时也用写在平行四边形相对的两个顶点上的大写字母来表示，如图6—1中的平面AC、BD。

2. 平面的基本性质

构成空间图形的元素除点、线外，还有面。最简单的面是平面，要分析空间直线与平面的关系和性质，首先要了解平面有些什么性质和特征。人们在长期实践中认识到：

公理 1 如果一条直线有两个点在一个平面上，那么这条直线完全落在这个平面上。

根据这个道理，工人师傅检验一个面平不平时，常用直尺

紧贴在工件表面上，如果直尺和工件表面密合很好，就表示很平。

实践经验还表明，两个平面相交，总是交成一条直线，这又是一个基本性质：

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

怎样确定一个平面的位置？实践是检验真理的标准，经过一条直线的平面有无数个，例如门上装两个合页时，门可以随便旋转到什么位置，但是如果插上插销，门就固定了。这类经验总结为：

公理 3 不在同一条直线上的三点确定一个平面。

钳工师傅在工件上划线时，常用三个千斤顶支起工件确定基准面就是根据这个道理。

根据确定平面的基本条件和平面的性质，还可以推出下列三种确定平面的条件，如图6—2。

- (1) 一直线和直线外一点确定一个平面；
- (2) 两条相交直线确定一个平面；
- (3) 两条平行直线确定一个平面。

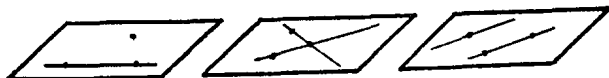


图 6—2

木工师傅常用两条相交或两条平行的木条钉在几块条木上，把它们拼成一块大木板，就是利用两条相交或平行直线确

定一个平面的道理。

由上面的讨论可知，两条相交直线必在一个平面上，两条平行直线也必在一个平面上。空间几条直线或几个点，如果在同一平面上，叫做共面。

是否空间任何两条直线都是共面的呢？观察蜗轮轴线和蜗杆轴线的位置，可以看出，它们不在同一平面上，既不相交，也不平行。不共面的两条直线叫做异面直线。

画两条异面直线，应画出它们各自所在的平面，或者画出其中一条所在的平面，如图6—3所示。这样就比较容易显示出两条直线不在同一平面内的特点。

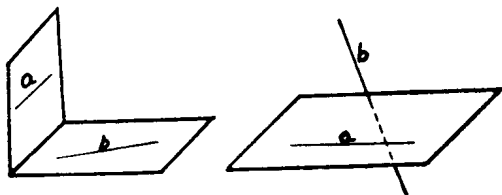
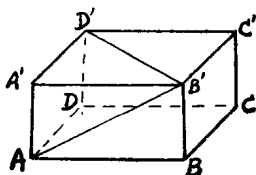


图 6—3

习 题 二 十 七

1. 自行车后面的支架起什么作用？
2. 空间四点，一般共可确定几个平面？
3. 怎样检验桌子四条腿的下端是否在同一平面上？
4. 一条直线和两条平行线都相交。这三条直线是否共面？
5. 一条直线和一个平面 α 相交于一点，试说明经过这条直线的任何平面一定和平面 α 交于一条直线。

6. 如图表示一个长方体，由所画的线共可确定几个平面？其中有哪些线平行？哪些线相交？哪些线是异面直线？
7. 分别在两个平面上的两条直线，一定是异面直线吗？



第 6 题

8. 一条直线和两条异面直线都相交，这三条直线共可确定几个平面？
9. ①垂直于同一直线的两直线是否一定平行？
②过直线外或直线上一点是否只能作一条直线和这条直线垂直，为什么？

二、直线和平面平行

我们知道，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线就在这个平面内。除此以外，空间直线和平面的位置关系还有：

- (1) 直线与平面只有一个公共点，称直线与平面相交；
- (2) 直线与平面没有公共点，称直线与平面平行。

比如，电线杆和地面以及加固电线杆的钢绳与地面的位置关系，都可看成是直线与平面相交的例子，而架空电线与平坦地面的位置关系，可以看成是直线与平面平行的例子。

直线 a 和平面 α 平行，可记作 $a \parallel \text{平面}\alpha$ 。画图时，通常把直线画在表示平面的平行四边形外面，并且使它和平行四边形的一边平行，或者和平面内的一条直线平行，这样，看起来比较直

观，如图6—4所示。

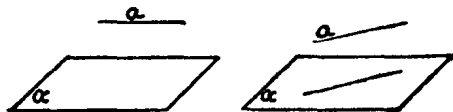


图 6—4

判断直线和平面平行，有以下定理：

定理 1 平面外的一条直线，如果平行于这个平面内的一条直线，那么这条直线就和这个平面平行。

已知 直线 l 在平面 α 外，直线 m 在 α 上， $l \parallel m$ (图6—5)。

求证 $l \parallel \alpha$ 。

证明 因为 $l \parallel m$ ， l 和 m 确定一个平面 β ， m 就是 α 和 β 的交线。

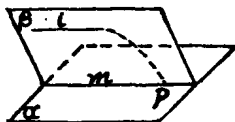


图 6—5

假如 l 和 α 不平行，便有交点 P ，这点既在 α 上，又在 β 上 ($\because l$ 在 β 上)，那就必定在交线 m 上。这样， l 和 m 就相交于 P ，和已知 $l \parallel m$ 矛盾。所以 l 不能和 α 相交，即 $l \parallel \alpha$ 。

例 1 如图6—6，已知 A 、 B 是直线 l 上两点， P 、 Q 是直线 m 上两点， $AP \perp BQ$ ， α 是经过 m 的一个平面，那么，因为 $APQB$ 是平行四边形，于是 $l \parallel m$ ，根据以上定理可知 $l \parallel \alpha$ 。

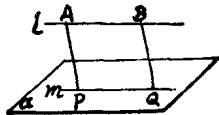


图 6—6

平常装日光灯管就利用这个道理，只要两根吊线平行而且

一样长，灯管就和天花板平行。

值得注意的是，这里分析一条直线和一个平面的关系，利用了直线和直线的关系，这是分析直线和平面关系常用的方法。容易证明，直线和平面平行有下述性质。

定理 2 如果一直线平行于一个已知平面，那么，通过这条直线的平面与已知平面的交线必平行于这条直线。

已知 $l \parallel \alpha$ ，平面 β 过 l 与 α 交于 m (图6—7)。

求证 $l \parallel m$ 。

证明 因为 $l \parallel \alpha$ ，所以 l 与 α 没有公共点，又 m 在 α 内，所以 l 、 m 不可能有公共点。 l 、 m 都在 β 内，又没有公共点，所以 $l \parallel m$ 。



图 6—7

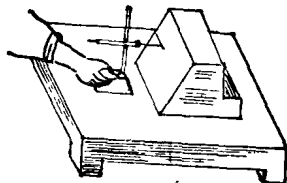


图 6—8

在斜面上划线时，常利用这个性质，如图6—8要在工件的斜面上划一条平行于底边的直线，可以在平台上用高度尺按照要求定好尺寸，然后移动高度尺底座，划针就在工件上划出一条直线。根据例1可知划的线 and 平台平行，而工件底边正好是通过这条直线的斜面和平台的交线，根据定理2，划的线是平行于底边的。

根据定理1、2可得以下推论，