根据普通高中课程标准实验教科书（人教·A版）编写

“伴你学”
新课程

数学

选修4—5

不等式选讲

新课程 新思想 新理念
XINKECHENG XINSIXIANG XINLINIAN

山东友谊出版社

···“伴你学”新课程···

根据普通高中课程标准实验教科书(人教·A版)编写

数学

选修 4－5

不等式选讲

山东友谊出版社

“伴你学”新课程
数 学
选修 4 – 5
不等式选讲

出　　版：山东友谊出版社
地　　址：济南市胜利大街39号　邮编：250001
电　　话：总编室(0531)82098148　82098756
　　　　　发行部(0531)82098147(传真)
发　　行：山东省新华书店
印　　刷：荣成三星印刷有限公司
版　　次：2006年1月第1版
印　　次：2006年1月第1次印刷
规　　格：787mm×1092mm　16开本
印　　张：5.5
字　　数：110千字
书　　号：ISBN 7－80642－076－2
定　　价：6.10元

编写说明

为了适应高中课程改革的需要，落实《基础教育课程改革纲要》中关于"注重培养学生的独立性和自主性"、"促进学生在教师的指导下主动地、富有个性地学习"的精神，体现教育教学改革最新成果，指导学生进行自主学习，减轻学生过重的课业负担，提高学习效率和质量，我们组织全省知名的教研员和骨干教师编写了这套《"伴你学"新课程》丛书.

《"伴你学"新课程》丛书包括9个学科.丛书编写以高中各学科课程标准为依据，以新的课程理念为指导，着眼于培养学生的创新精神和实践能力，侧重于学法指导和思维能力的培养.在栏目设置、习题编排上，紧扣课程标准的要求和高考改革的动向，突出应用性、新颖性和探究性，让学生巩固知识、发展能力、体验过程.

本书与高中数学实验教科书相配套，与教学同步，科学实用.收编的题目新颖、灵活、典型，知识和技能覆盖面广，重视解题方法、技巧归纳和思维训练等特色，设计理念独到.各模块按章节顺序编排，每章节均设有"学习目标"、"知识网络"、"学路导引"、"范例精析"、"过关评估"、"数学文化"、"单元检测"等自主性、探究性、开放性栏目.

本书主编：韩际清，参加编写的人员有：王宗水、陈秀群、李海水、王栋、王强.

殷切期望广大读者对本书提出宝贵意见，让我们与新课程改革一同成长.

编　者

2005年11月

目 录

第一讲 不等式和绝对值不等式 …… 1
一 不等式 …… 1
1 不等式的基本性质 …… 5
2 基本不等式 …… 6
3 三个正数的算术—几何平均不等式 …… 8
二 绝对值不等式 …… 11
1 绝对值三角不等式 …… 14
2 绝对值不等式的解法 …… 15
单元检测 …… 18
第二讲 证明不等式的基本方法 …… 21
一 比较法 …… 21
二 综合法与分析法 …… 25
三 反证法与放缩法 …… 31
单元检测 …… 37
第三讲 柯西不等式与排序不等式 …… 40
一 二维形式的柯西不等式 …… 40
二 一般形式的柯西不等式 …… 44
三 排序不等式 …… 48
单元检测 …… 54
第四讲 数学归纳法证明不等式 …… 57
一 数学归纳法 …… 57
二 用数学归纳法证明不等式 …… 63
单元检测 …… 68
参考答案 …… 71

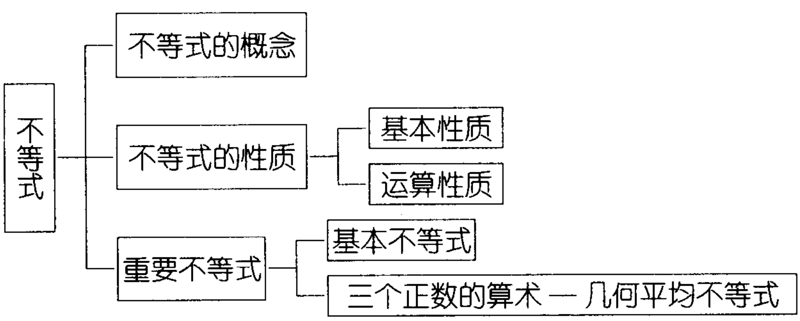
第一讲　不等式和绝对值不等式

一　不等式

学习目标

- 1.理解不等式的性质及其证明.
- 2.掌握两个或三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用.

知识网络



学路导引

学习重点

1.正确使用不等式的性质进行两个代数式大小的比较及判断某个不等式是否成立.

2.能应用数形结合的思想理解基本不等式并给出证明.

3.掌握算术平均数与几何平均数定理及其变形,会用来求函数的最值、证明不等式以及解决一些实际问题.

学习难点

1.正确利用不等式性质及基本不等式进行证明.

2.利用算术平均数与几何平均数定理及其变形求最大值和最小值.

学习指导

1.不等式的性质刻画了在一定条件下两个量的不等关系,值得注意的是,其中有一类具有充要性的特征,条件和结论可互相推出,解不等式的每一变形只能依据这一性质,才能保证变形的同解性;另一类性质只具有充分性的特征,它可以作为证明不等式的依据,但不能作为解不等式的依据.

2.运用不等式的性质时,应注意不等式成立的前提条件,切不可用似乎是很显然的理由代替不等式的性质,如由 $a>b$ 及 $c>d$ 推不出 $ac>bd$;由 $a>b$,推不出 $a^2>b^2$;由 $a>b$,推不出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3.比较两个数的大小一般用作差法,有时也用作商法,它们的一般步骤是作差(商)→变形→判断差与0(商与1)的大小→定论.关键是变形,变形一定要彻底.

4.算术平均数与几何平均数定理的功能除用于比较数的大小及证明不等式外,主要用于求函数的最值,使用的条件为"一正、二定、三相等",三个条件缺一不可.解题时,为了达到使用定理的三个条件,往往需要通过配凑、裂项、转化、分离等手段,创设一个应用定理的情境.

范例精析

【例1】已知三个不等式① $ab>0$,② $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$,③ $bc>ad$,以其中两个作为条件,余下一个作为结论,则可组成______个正确的命题.

【精析】灵活运用不等式的可乘性,问题易解.

【解】若①②成立,则 $ab(-\frac{c}{a})<ab(-\frac{d}{b})$,即 $-bc<-ad$.

$\therefore bc>ad$,即③成立.

若①③成立,则$\frac{bc}{ab}>\frac{ad}{ab}$,即$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$.

$\therefore -\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$,即②成立.

若②③成立,则由②得$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$,即$\frac{bc-ad}{ab}>0$.

$\because$③成立,即 $bc-ad>0$,$\therefore ab>0$,即①成立.

故可组成3个正确命题.

【点评】根据给定条件,利用不等式的性质,判断不等式能否成立是高考中常见的问题,解题时,灵活运用性质向目标进行转化是解题的关键.

【例2】(1)若 $x<y<0$,试比较$(x^2+y^2)(x-y)$与$(x^2-y^2)(x+y)$的大小;

(2)若 $a>2,b>2$,试比较 $a+b$ 与 ab 的大小.

【精析】根据题目的结构特点,可考虑用作差比较法.

【解】(1)$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$.

$\because x<y<0,\therefore xy>0,x-y<0$.

$\therefore -2xy(x-y)>0.\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

(2)法一:$ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1$.

$\because a>2,b>2,\therefore a-1>1,b-1>1$.

$\therefore (a-1)(b-1)>1.\therefore (a-1)(b-1)-1>0$.

$\therefore ab>a+b$.

方法二:$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

$\because a>2,b>2,\therefore \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

又 $ab>0,\therefore a+b<ab$.

【点评】比较数的大小,通常有两种方法:一是作差法,二是作商法,其中变形是关键,变形的常用方法有:通分、因式分解、配方.

【例3】(1)已知 $x<\dfrac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}$的最大值;

(2)已知 a、b 为实常数,求函数 $y=(x-a)^2+(x-b)^2$ 的最小值.

【精析】(1)因为$4x-5<0$,所以首先要“调整”符号,又$(4x-2)\cdot\dfrac{1}{4x-5}$不是常数,所以对$4x-2$要进行拆(添)项“配凑”.

(2)从函数解析式的特点看,本题可化为关于 x 的二次函数,再通过配方法求其最小值.但若注意到$(x-a)+(b-x)$为定值,则用变形不等式 $m^2+n^2\geqslant\dfrac{(m+n)^2}{2}$更简捷.

【解】(1)$\because x<\dfrac{5}{4},\therefore 5-4x>0$.

$\therefore y=4x-2+\dfrac{1}{4x-5}=-(5-4x+\dfrac{1}{5-4x})+3\leqslant-2+3=1$.

当且仅当$5-4x=\dfrac{1}{5-4x}$,即 $x=1$时,上式等号成立.

故当 $x=1$时,$y_{\max}=1$.

$(2)y=(x-a)^2+(x-b)^2=(x-a)^2+(b-x)^2$

$$\geqslant\frac{1}{2}[(x-a)+(b-x)]^2=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

当且仅当 $x-a=b-x$,即 $x=\frac{a+b}{2}$时,上式等号成立.

$\therefore$当 $x=\frac{a+b}{2}$, $y_{\min}=\frac{(a-b)^2}{2}$.

【点评】(1)最值定理:$x,y\in\mathbf{R}^+$,$x+y=S$,$xy=P$,若 P 为定值,则当且仅当 $x=y$ 时,S 的值最小;若 S 是定值,则当且仅当 $x=y$ 时,P 的值最大.简称"和定积最大,积定和最小".

(2)应用定理必须注意三点:"一正、二定、三相等".

(3)应用此定理求最值时往往需要拆(添)项,其目的是创设应用定理的情境和使等号成立的条件.

【例 4】(1)已知 $x>0$,求函数 $y=x^2+\frac{3}{x}$的最小值;

(2)已知 $0<x<\frac{1}{3}$,求函数 $y=-3x^3+x^2$ 的最大值.

【精析】(1)因为 $x\cdot x\cdot\frac{3}{x}$不是常数,所以要对$\frac{3}{x}$进行"配凑".

(2)因为 $x+x+(1-3x)$不是常数,所以要对 $1-3x$ 进行"配凑".

【解】(1)$\because x^2>0,\frac{3}{2x}>0$,

$\therefore f(x)=x^2+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{3}{2x}\cdot\frac{3}{2x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$.

当且仅当 $x^2=\frac{3}{2x}=\frac{3}{2x}$,即 $x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$时等号成立.

因此当 $x=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$时 ,函数有最小值$\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$.

(2)$\because 0<x<\frac{1}{3}$,$\therefore 1-3x>0$.

$y=x^2(1-3x)=\frac{3}{2}x\cdot x\cdot\left(\frac{2}{3}-2x\right)\leqslant\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{x+x+(\frac{2}{3}-2x)}{3}\right]^3=\frac{4}{243}$,

当且仅当 $x=\frac{2}{3}-2x$,即 $x=\frac{2}{9}$时,等号成立.

$\therefore y_{\max}=\frac{4}{243}$.

【点评】利用平均值不等式 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$求最值时,必须满足"一正、二定、三相

等”,在解题时,构造和或积为常数,是必须掌握的基本方法.在(1)中,若把$\frac{3}{x}$拆成$\frac{1}{x}$与$\frac{2}{x}$之和,是否可以呢?

过关评估

1 不等式的基本性质

A组

一、选择题

1.对于实数 a、b、c,有下列命题:①若 $a>b$,则 $a^2>b^2$;②若 $a>b$,则 $\lg(a-b)>0$;③若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$;④若 $a<b<0$,则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;⑤若 $a<b<0$,则$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$.

其中真命题的个数是 ( )

A.1 B.2 C.3 D.4

2.若 $f(x)=3x^2-x+1$,$g(x)=2x^2+x-1$,则 $f(x)$与 $g(x)$的大小关系是 ( )

A.$f(x)>g(x)$ B.$f(x)=g(x)$ C.$f(x)<g(x)$ D.随 x 变化而变化

3.若角 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是 ( )

A. $-\pi<2\alpha-\beta<0$ B. $-\pi<2\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{3}{2}\pi<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ D.$0<2\alpha-\beta<\pi$

二、填空题

4.若 $-1<a<b<0$,则$\frac{1}{a}$,$\frac{1}{b}$,a^2,b^2 中值最小的是________.

5.以下四个不等式:①$a<0<b$,②$b<a<0$,③$b<0<a$,④$0<b<a$,其中使$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$成立的充分条件有____________.

三、解答题

6.设 $A=a^2+3ab$,$B=4ab-b^2$,其中 $a,b\in\mathbf{R}$,比较 A 与 B 的大小.

7.设$60<a<84,28<b<33$,求$a+b,a-b$及$\frac{a}{b}$的范围.

B组

1.若二次函数$y=f(x)$的图象过原点,且$1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4$,求$f(-2)$的范围.

2.比较$1+\frac{\sqrt{2}}{a}$与$\sqrt[3]{2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3}$的大小.

2 基本不等式

A组

一、选择题

1.已知$x>1,y>1$,且$\lg x+\lg y=4$,则$\lg x\cdot\lg y$的最大值是 ( )

A.4 B.2 C.1 D.$\frac{1}{4}$

2.若实数a、b满足$a+b=2$,则3^a+3^b的最小值是 ( )

A.18 B.6 C.$2\sqrt{3}$ D.$2\sqrt[4]{3}$

3.下列不等式的证明过程正确的是 ( )

A.若 $a,b\in\mathbf{R}$,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

B.若 $x>0$,则 $\cos x+\frac{1}{\cos x}\geqslant 2\sqrt{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}=2$

C.若 $x<0$,则 $x+\frac{4}{x}\leqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

D.若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $ab<0$,则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\left[\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right)\right]\leqslant$

$-2\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)}=-2$

二、填空题

4.若 $a>b>1$,$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$,$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$,$R=\lg\frac{a+b}{2}$,则 P、Q、R 的大小关系是__________.

5.已知函数 $y=\frac{4}{x}+9x$,

(1)若 $x>0$,当 $x=$________时,函数有最______值________;

(2)若 $x\in(0,\frac{2}{5}]$,当 $x=$________时,函数有最______值________;

(3)若 $x\in[4,+\infty)$,当 $x=$________时,函数有最______值________.

三、解答题

6.已知 $a>0,b>0,c>0$,且 $a+b+c=1$,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

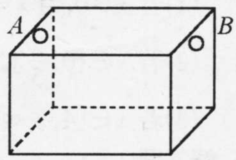
7.一份印刷品,其排版面积(矩形)为 432cm^2,它的左、右两边都留有 4cm 的空白,上、下底部都留有 3cm 的空白,问长、宽各设计成多少时用纸最省?并求出此时纸面的面积.

B组

1.(1)设 $x>-1$,求函数 $y=\dfrac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 的最值;

(2)已知 $x>0,y>0$,且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值.

2.如图,为处理含有某种杂质的污水,要制造一个底宽为2米的无盖长方体沉淀箱,污水从 A 孔流入,经沉淀后从 B 孔流出.设箱体的长度为 a 米,高度为 b 米.已知流出的水中该杂质的质量分数与 a、b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料60平方米,问 a、b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A、B 孔的面积忽略不计)?



3 三个正数的算术—几何平均不等式

A组

一、选择题

1.设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 a、b、c 不全相等,则不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 成立的充要条件是 ( )

A.a、b、c 全为正数　　B.a、b、c 全为非负数

C.$a+b+c\geqslant 0$　　D.$a+b+c>0$

2.已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,$x=\dfrac{a+b+c}{3}$,$y=\sqrt[3]{abc}$,$z=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$,则有 ( )

A.$x\leqslant y\leqslant z$　B.$y\leqslant x\leqslant z$　C.$y\leqslant z\leqslant x$　D.$z\leqslant y\leqslant x$

3.某工厂年产值第二年比第一年增长的百分率为 P_1,第三年比第二年增长的百分率为 P_2,第四年比第三年增长的百分率为 P_3,若 $P_1+P_2+P_3$ 为定值,则年平均增长的百分

率 P 的最大值为 ( )

A. $\sqrt[3]{P_1P_2P_3}$ B. $\frac{P_1+P_2+P_3}{3}$

C. $\frac{P_1P_2P_3}{3}$ D. $\frac{(1+P_1)(1+P_2)(1+P_3)}{3}$

二、填空题

4. $y=2x+x^2+\frac{32}{x^3}(x>0)$的最小值是________.

5. 若实数 x、y 满足 $x\cdot y>0$, $x^2y=2$, 则 $xy+x^2$ 的最小值是________, 此时 $x=$ ________, $y=$ ________.

三、解答题

6. 求函数 $y=x^2(3-2x)(0<x<\frac{3}{2})$的最大值.

7. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3$.

B组

1. 已知 a、b、c 均为正数, 且 $a+b+c=1$, 求证:

(1) $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$;

(2) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 27$.

2.一辆汽车从 A 城到 B 城匀速行驶，它的耗油量和速度的平方成正比.已知 A、B 两城相距 m 千米，当汽车以每小时 s 千米的速度行驶时，从 A 城到 B 城消耗的汽油价值为 p 元，又知汽车每行驶 1 小时，除耗油外，其他消耗费用为 q 元.问汽车以怎样的时速行驶时，费用最少？

数学文化

天然不等式

纵观数学的发展，无论在哪一个领域，都围绕着等式展开研究，可是不等式的产生，不但是自然的，而且也是必然的.

人类仿效穿云破雾、翱翔天空的飞禽失败，却造出了飞机、飞船；人类仿效越山涉水、攀木缘崖的走兽失败，却造出了汽车、火车；人类仿效沉浮自如、水里乾坤的鱼鲛失败，却造出了船舰、潜艇.这是巧夺天工呢，还是天工难夺呢？模仿、模拟、理想与现实存在着很大的差距，这就是人类生活中的一个天然不等式，相等只是理想，不等是现实.要解决不等式问题，应从等式着眼；要解等式问题，却要从不等式入手.理想处着眼，现实处入手，这就是天然不等式给予我们的启迪.

等号与不等号

数学没有相应的符号是不可思议的.一种好的数学符号，可以节省人们思维的时间，也可以帮助人们导出新的概念.假如一种数学符号能做到形意贴切，那还是一种美的抒发.然而，许多数学符号的产生、发展以至被普遍采用，都经历过漫长的时间和许多曲折.

等号，表示相等，开始有人用“[”“‖”“∞”作为等号用，显然没有“=”好.第一个把“=”作为等号的是英国数学家雷科德，出现在他所著《智慧的激励》(1557 年)一书中，他说：“最相像的两件东西是两条平行的直线，所以这两短线应用来表示相等”.直到 17 世纪后半叶，雷科德的符号“=”被牛顿使用后，才真正为数学家们所公认，从而普遍使用起来.

不等号，表示不相等，有大于、小于.起初，英国数学家奥特里德提出了用以表示大于和小于的符号.沃利斯也是英国数学家，他也提出了用以表示大于和小于的符号.法国数学家吉拉德用“ff”表示大于，用“§”表示小于.最早使用“<”“>”表示大于、小于的是英国数学家哈里奥特，他在 1631 年的《实例》一书中写道：“大于的记号：$a>b$，表示 a 量大于 b 量；小于的记号：$a<b$，表示 a 量小于 b 量”，这才使这种符号沿用至今.1734 年，法国数学家布根首次将不等号与等号联合使用，即“≥”和“≤”，表示不小于和不大于.

二　绝对值不等式

学习目标

1. 理解绝对值的几何意义,并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式:
   (1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;
   (2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.
2. 会用上述不等式证明一些简单问题.
3. 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式:
   $|ax+b|\leqslant c$; $|ax+b|\geqslant c$; $|x-c|+|x-b|\geqslant a$.

知识网络

- 绝对值不等式
  - 绝对值三角不等式
  - 绝对值不等式的解法

学路导引

学习重点

1. 理解绝对值不等式定理.
2. 会证明简单含有绝对值的不等式.
3. 掌握绝对值不等式的解法.

学习难点

1. 绝对值不等式定理中等号成立的条件.
2. 绝对值不等式的证明.

学习指导

1. 绝对值不等式的证明是一个难点,所以要注意应用分析法,会用 $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$ 进行适当的放缩,灵活运用不等式的性质添项或减项.

2. 在应用 $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$, $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 求有绝对

值函数的最值时,一定要注意等号成立的条件,如:

$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geqslant 0$;

$|a-b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\leqslant 0$;

$|a|-|b|=|a+b|\Leftrightarrow (a+b)b\leqslant 0$;

$|a|-|b|=|a-b|\Leftrightarrow (a-b)b\geqslant 0$.

3.解含有绝对值的不等式的思路是:去掉绝对值号,将含有绝对值的不等式等价转化为不含绝对值的不等式.

解绝对值不等式的常用方法:

(1)利用绝对值不等式的性质,即$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$,$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$.

这是最基本方法,在此基础上,另有:

$$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\text{有意义}\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g(x)\text{或}f(x)<-g(x).\end{cases}$$

$$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ -g(x)<f(x)<g(x).\end{cases}$$

(2)两边平方法(适用两边均含绝对值的不等式):

$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)\Leftrightarrow[f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0$.

(3)利用数轴,采用"零点分段法",适用于$|x-a|+|x-b|>(<)c$ 型的不等式.

(4)数形结合法,正确求出函数的零点并画出函数图象(有时需要考察函数的增减性)是解题的关键.

选修4—5 人教A版

范例精析

【例 1】设 $a,b\in\mathbf{R},\varepsilon>0$.

(1)已知$|a|<\frac{\varepsilon}{2}$,$|b|<\frac{\varepsilon}{3}$,求证$|2a+3b|<2\varepsilon$;

(2)已知$|a|<1$,$|b|>1$,求证$|a+2b|>1$.

【精析】利用绝对值不等式定理及不等式性质易证明.

【证明】(1)由已知,有

$$|2a+3b|\leqslant|2a|+|3b|=2|a|+3|b|<2\times\frac{\varepsilon}{2}+3\times\frac{\varepsilon}{3}=2\varepsilon.$$

(2)$|a+2b|=|2b+a|\geqslant|2b|-|a|$.

$\because|a|<1,|b|>1,\therefore 2|b|>2,-|a|>-1$.

$\therefore 2|b|-|a|>1$,即$|a+2b|>1$.

【点评】证明不等式时要有目标意识,善于应用分析转化法.

【例 2】函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,$f(0)=f(1)$,且对任意不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$