理论力学习题解析指导

孙建华 等编译

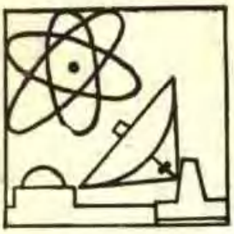
上册

西安陆军学院

理论力学习题解析指导

孙建华 编译

西安陆军学院



封面设计：孙 建 华

理论力学习题解析指导

编译者：孙 建 华 等

出版者：西安陆军学院

印刷者：西北工业大学出版社印刷厂

前　　言

《理论力学习题解析指导》是在日文《力学演习》（山内恭彦、末冈清市编）的基础上编译而成。

本书以习题演解分析指导为主，每章首先简要介绍有关内容的基本概念，主要的定律和公式。然后用较大的篇幅选择有代表性的习题进行分析讨论，纵横联系，交叉贯溶，开拓解题思路，以加深对基本概念和基本知识的理解和认识。习题依难易程度分A、B、C三类（基本题、引深题、创造题），读者可先易后难，逐步探深。

全书内容翔实、叙述简洁、例题分析详尽，启发讨论创新。读者经过阅读内容演解习题后，可提高解题能力，熟练运算技巧，牢固地掌握基本知识，达到举一返三的效能。但日文教材与英文教材一样，简洁明快，实用性强，但不如苏联教材之推理严密，论证充分，说明缜例。望读者在使用本书过程中注意充实完善，补填不足，讲开谬误，发展提高。

该书初稿由孙建华、任新民、郭运昌、左宁等同志编译，蔡承信副教授初审，最后由孙建华重新编译定稿。在本书的编译过程中，宋子俊、杨海三、孙庭立、张维政等同志也作了大量的工作，谨此表示诚挚的谢意。由于时间仓促，编译者水平有限，错误在所难免，恳望读者批评指正。

理论力学习题解析指导

目　　录

I　质点力学

理论力学习题解析指导

I　质点力学

第一章　运　动　学

基本概念

§1　质点的直线运动

1　运动：把质点在直线 ox 上的位置与时间 t 的函数规律

$$x = f(t) \qquad (1\cdot1)$$

叫做质点沿直线 ox 的运动。例如

(i)　匀速运动：　$x = a + bt$　(1·2)

(ii)　匀加速运动：　$x = a + bt + ct^2$　(1·3)

(iii)　正弦简谐振动：　$x = a\sin(nt + \alpha)$　(1·4)

(iv)　过衰减振动：　$x = ae^{-ut}$　(1·5)

(v)　衰减振动：　$x = ae^{-ut}\sin(nt + \alpha)$　(1·6)

式中 a、b、c、n、α、u 皆为常数，如图1—1～1—5所示。

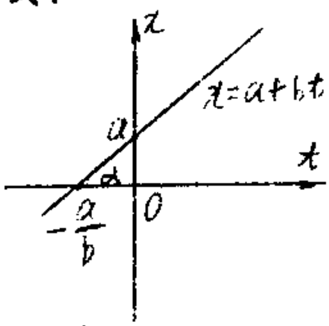


图1—1

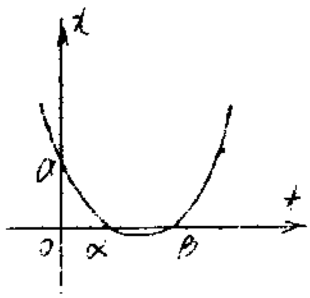


图1—2

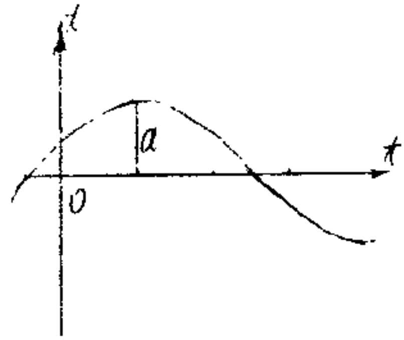


图1—3

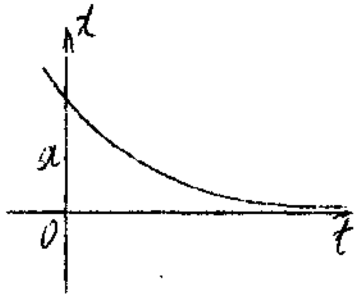


图 1—4

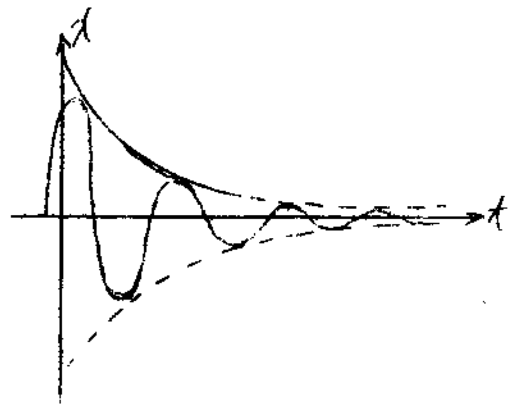


图 1—5

2　速度：将质点的运动 $x=f(t)$ 对时间 t 求导

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

叫做质点在瞬时 t 的速度。若令图 1—6 表示 $x=f(t)$ 的关系，则质点在某瞬时 t 的速度为：$v=\tan\alpha$，上述各例的速度为

(i)　$x=a+bt$　　$v=b$　　(1·8)

(ii)　$x=a+bt+ct^2$　　$v=b+2ct$　　(1·9)

(iii)　$x=a\sin(nt+\alpha)$　　$v=an\cos(nt+\alpha)$　　(1·10)

(iv)　$x=ae^{-ut}$　　$v=-aue^{-ut}$　　(1·11)

(v)　$x=ae^{-ut}\cdot\sin(nt+\alpha)$

$v=ae^{-ut}\{n\cos(nt+\alpha)-u\sin(nt+\alpha)\}$　　(1·12)

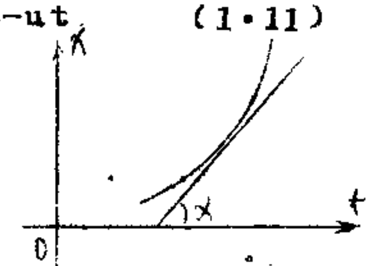


图 1—6

若已知速度求其运动，可将上述各式进行积分

$x=\int v\,dt+C$　　（C 为待定常数）　　(1·13)

当 $t = t_0$ 时，$x = x_0$，且 $v = \varphi(t)$，则有

$$x = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)dt + x_0 \qquad (1\cdot14)$$

3　加速度：将质点的速度 $v = \varphi(t)$ 对时间 t 的变化率

$$A = \frac{dv}{dt} = \varphi'(t) \qquad (1\cdot15)$$

$$A = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) \qquad (1\cdot16)$$

叫做质点的加速度。上述各例的加速度为

(i)　$A = 0$　(1·17)

(ii)　$A = 2c$　(1·18)

(iii)　$A = -n^2 a\sin(nt+\alpha) = -n^2 x$　(1·19)

(iv)　$A = au^2 e^{-ut} = u^2 x$　(1·20)

(v)　$A = ae^{-ut}[(u^2-n^2)\sin(nt+\alpha) - 2un\cdot \cos(nt+\alpha)]$　(1·21)

若已知加速度 A，需求速度 v 和位移 x，则有

$$v = Adt + C_1,$$
$$x = \int dt \int Adt + C_1 t + C_2 \qquad (1\cdot22)$$

C_1、C_2 为待定常数。若有初始条件：$t = t_0$ 时，$v = v_0$，$x = x_0$，则有

$$v=\int_{t_0}^{t}\psi(t)\,dt+v_0,\quad x=\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\psi(t)\,dt+v_0t+x_0 \tag{1·23}$$

若加速度 A 为速度和位移及时间 t 的函数 $F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$，需求其运动，可将微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \tag{1·24}$$

连续积分二次即可。

〔例〕 已知质点的加速度 $A=-n^2x$，求其运动规律。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=0 \tag{1·25}$$

解此微分方程得

$$x=C_1\cos nt+C_2\sin nt \tag{1·26}$$

若 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=v_0$，则有 $x_0=C_1$，$v_0=nC_2$

代入式（1－26），得

$$x=x_0\cos nt+\frac{v_0}{n}\sin nt$$

§ 2　质点的平面运动和空间运动

1　运动：令 O 为空间的一固定点，质点 P 在空间的位置矢量为 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$，若它为时间 t 的函数，则其运动规律为

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \tag{1·28}$$

建立三维直角坐标系 Oxyz，则质点 P 在空间的位矢 $\vec{r}$ 在直角坐标轴上的投影 x、y、z 与时间 t 的关系有

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad (1\cdot29)$$

质点在平面上或空间中运动的曲线为之质点 P 的轨迹。

〔例 1〕 匀速圆周运动： $\begin{cases} x = a\cos(\omega t+\alpha) \\ y = a\sin(\omega t+\alpha) \end{cases}$

即 $$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (1\cdot30)$$

轨迹是半径为 a 的圆周。

〔例 2〕 椭圆运动： $\begin{cases} x = a\sin(\omega t+\alpha) \\ y = b\sin(\omega t+\beta) \end{cases}$

即 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1\cdot31)$$

轨迹为一椭圆。

〔例 3〕 螺旋运动：
$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t+\alpha) \\ y = a\sin(\omega t+\alpha) \\ z = ct \end{cases} \qquad (1\cdot32)$$

轨迹为一螺旋线。

质点在平面上的运动亦可用极坐标和自然坐标法表示：

(i) 极坐标：（图 1－7） $r = r(t)$，$\varphi = \varphi(t)$，

则 轨迹 $r = r[\varphi(t)]$ $(1\cdot33)$

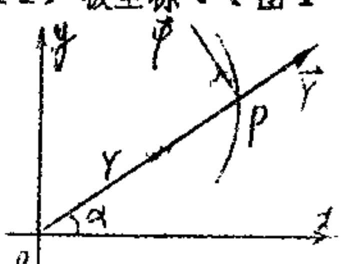


图1－7 极坐标

〔例 1〕 匀速圆周运动：$r=a$，$\varphi=\omega t+\alpha$ (1·34)

轨迹 $r=a$。

〔例 2〕 涡旋运动：$r=at+\alpha$， $\varphi=bt+\beta$ (1·35)

轨迹 $r=\frac{a}{b}(\varphi-\beta)+\alpha=A\varphi+B$，其中，$A=\frac{a}{b}$，$B=\alpha-\frac{a}{b}\beta$ （图1—8）。

（ii）自然坐标：（图1—9） $s=s(t)$，$\psi=\psi(t)$。

s是由轨迹上定点A沿曲线量到P点的弧长，ψ为曲线上P点的切线与X轴正向间的夹角。若求轨迹的直角坐标参数方程，可用$\psi=\psi[t^{-1}(s)]$

$$x=\int\cos\psi ds \qquad y=\int\sin\psi ds \qquad (1\cdot36)$$

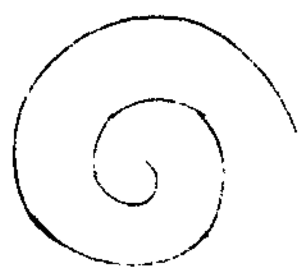


图1—8 涡旋运动

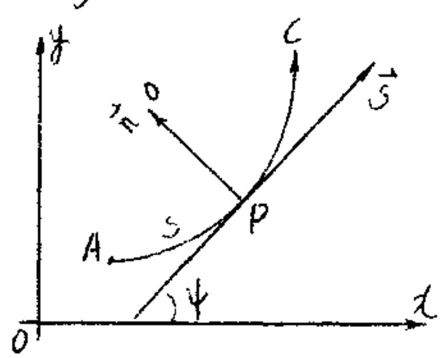


图1—9 自然坐标

例如匀速圆周运动用自然坐标表示如下

$S=at+\alpha \qquad \psi=bt+\beta$，从而 $\psi=AS+B$

式中 $A=\frac{b}{a}$， $B=\beta-\frac{b}{a}$。

$$\therefore \quad x = \int \cos(AS+B)\,ds = \frac{1}{A}\sin(AS+B)$$

$$y = \int \sin(AS+B)\,ds = -\frac{1}{A}\cos(AS+B)$$

轨迹 $x^2 + y^2 = \frac{1}{A^2}$ 为一圆周．

2　速度：对于 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 运动，其速度为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1·37}$$

速度在直角坐标轴上的投影为

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{1·38}$$

关于质点的平面运动的速度表示法如下

自然轴系中沿曲线的切向和法向分量为（图1－10）．

$$v_s = \frac{ds}{dt}\ (= \pm v), \quad v_n = 0 \tag{1·39}$$

极坐标系中速度沿径向和横向的分量为（图1－11）

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} \tag{1·40}$$

以下可将表达式 $\frac{dx}{dt}$ 简记为 $\dot{x}$．

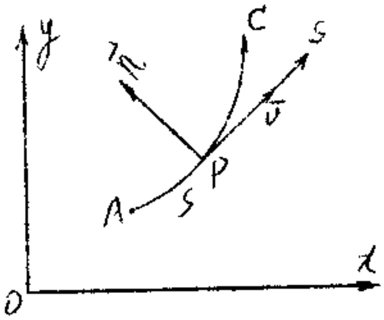


图1—10

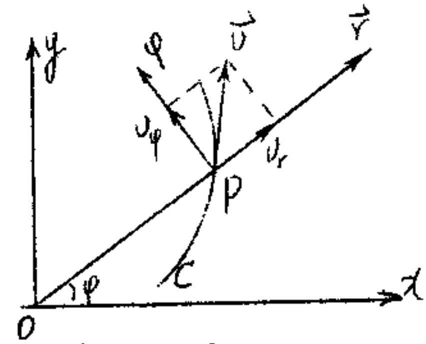


图1—11

例如匀速圆周运动： $\begin{cases} v_x = \dot{x} = -\omega a\sin(\omega t+\alpha) = -\omega y \\ v_y = \dot{y} = \omega a\cos(\omega t+\alpha) = \omega x \end{cases}$

速度的大小： $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega a$

速度的方向： $\tan\psi = v_x/v_y = -x/y$ （ψ为轨迹切线与x轴正向间的夹角，其矢径为$\vec{r}$。若用极坐标表示：$v_r = \dot{r} = 0$，$v_\varphi = r\dot{\varphi} = a\omega$ （$\omega = \dot{\varphi}$，为角速度）若已知速度求运动，可将（1·39），（1·40）式进行积分即可。

3、 加速度：将速度$\vec{v}$对时间t求导即得加速度

$$\vec{A} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1\cdot41)$$

其在三维直角坐标轴上的投影为

$$A_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad A_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad A_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

加速度在平面自然轴系上的投影：

$A_s = \dot{v} = \ddot{S} = v\dfrac{dv}{ds}$，　$A_n = v^2/\rho$。式中 ρ 为曲率半径，$\rho = \dfrac{ds}{d\psi}$（ψ 为切线与 x 轴正向间的夹角）。

加速度在极坐标系上的投影

$$A_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \text{ ，} \qquad A_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

例如匀速圆周运动（图1—12）为 $A_r = -a\omega^2$，$A_\varphi = 0$ 或者 $A_s = 0$，$A_n = \dfrac{v^2}{a}$。此时径向加速度与法向加速度大小相等方向相反：$A_n = -A_r$，加速度指向中心 o，且大小为 $a\omega^2 = v^2/a$。它在 x、y 轴上的投影为

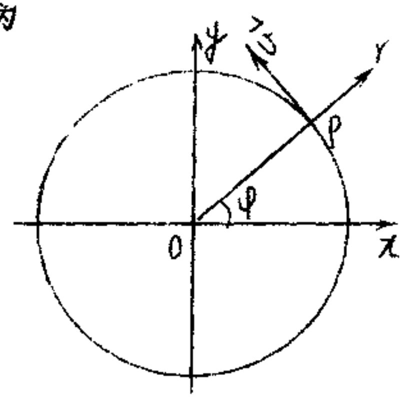


图1—12

$$A_x = -A_r\cos\varphi = -a\omega^2\cos(\omega t+\alpha) = -\omega^2 x$$

$$A_y = -A_r\sin\varphi = -a\omega^2\sin(\omega t+\alpha) = -\omega^2 y$$

所以，P 点的加速度大小为 $\omega^2 a$，方向由 P 指向中心 O。

例题分析

〔1〕　地面上空某物体以加速度 g 铅直落下，求其运动规律。

〔解〕　令 x 轴铅直向上为正，$A = -g$，依题意有

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \text{ ，} \quad \frac{dx}{dt} = -gt + C_1 \text{ ，} \quad x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \qquad (1\cdot42)$$

当 $t=0$ 时，$x=x_0$　$v=v_0$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0 \qquad (1\cdot42)$$

〔2〕　试表示（1·26）式所示的简谐振动·

〔解〕　$x=a\sin(nt+\alpha)=a\sin\alpha\cos nt+a\cos\alpha\sin nt$

令　$C_1=a\sin\alpha$，　$C_2=a\cos\alpha$，则

$a=C_1^2+C_2^2$，$\tan\alpha=C_1/C_2$　式中 α 的象限在 $a>0$

的情况下由 C_1、C_2 的符号决定·

〔3〕　试求椭圆振动 $x=a\sin(\omega t+\alpha)$ $y=b\sin(\omega t+\beta)$

的轨迹·

〔解〕　$x=a\sin\omega t\cos\alpha+a\cos\omega t\sin\alpha$

$y=b\sin\omega t\cos\beta+b\cos\omega t\sin\beta$

解得

$$\sin\omega t=\left(\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha\right)/\sin(\beta-\alpha)$$

$$\cos\omega t=\left(\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha\right)/\sin(\alpha-\beta)$$

上述二式两端同平方并相加，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$$

当 $\begin{cases}\alpha-\beta=2n\pi\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)\text{时}，\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\\ \alpha-\beta=(2n+1)\pi\text{时}，\dfrac{x}{a}=-\dfrac{y}{b}，\text{轨迹为一直线。}\end{cases}$

而当$\alpha-\beta$取其它值时，上述方程的轨迹为一椭圆。特别是当$\alpha-\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是依坐标轴为其主轴的一个椭圆（图1—13）。

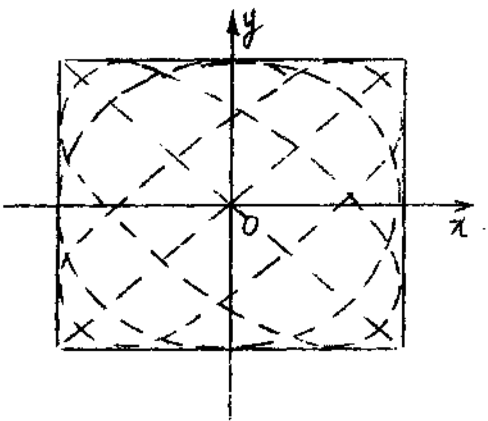


图1—13

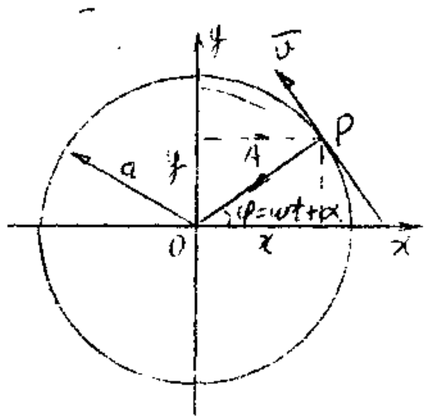


图1—14

〔4〕 一质点作匀速圆周运动，其速度沿切线方向的大小$v=a\omega$，加速度沿法线方向的大小为$A=a\omega^2$，试求该运动的速度和加速度在x、y轴上的投影（图1—14）。

〔解〕 $x=a\cos\varphi=a\cos(\omega t+\alpha)$

$y=a\sin\varphi=a\sin(\omega t+\alpha)$

$v_x=v\cos(\varphi+\dfrac{\pi}{2})=-a\omega\sin(\omega t+\alpha)$

$v_y=v\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{2})=a\omega\cos(\omega t+\alpha)$

$A_x=A\cos(\varphi+\pi)=-a\omega^2\cos(\omega t+\alpha)$

$A_y=A\sin(\varphi+\pi)=-a\omega^2\sin(\omega t+\alpha)$