

抗性消声器的有限元分析

一、引言

本文采用有限元方法，对于可化为轴对称问题的简单扩张室式和插管式消声器（KW-10型文氏消声器就属于此类消声器）进行了有限元分析，计算其消声特性。目的是探讨设计计算消声器的新途径。

有限元方法是当前求偏微分方程数值解的一个重要方法，它把偏微分方程数值解问题最终转化为线性代数方程组求解问题。由于电子计算机事业的飞速发展，求解大型线性代数方程组已不成问题，因此有限元方法越来越得到广泛的应用。

有限元离散化思想早在40年代就有人提出过。到60年代，国内外几乎同时在不同的实践基础上，利用有限元方法解决工程力学问题。60年代中期以后，国外采用有限元方法分析计算不规则房间的截止振动方式、消声器消声特性、电声换能器振动等问题，都取得了一定进展。在国内，采用有限元方法分析计算消声器消声特性，尚属空白。

计算抗性消声器消声特性问题，可归结为计算消声器的声场分布问题。在几何、物理边界条件很复杂的情况下，很难或不可能求出声场分布的解析式。本文采用有限元方法先计算出消声器声场分布的数值解，然后再计算消声器的消声特性。

为了验证有限元方法的正确性，本文采用了下列比较方法：有限元方法计算简单扩张室式消声器的消声特性，和一维理论值进行比较。

对于插管式消声器，有限元方法计算出的插入损失和实验值相比较。

二、利用有限元方法计算抗性消声器消声特性

为了不失一般性，本文所研究的轴对称抗性消声器可抽象为图(1)所示的声学系统。经过下列步骤，采用有限元方法可计算出消声器声场分布的数值解和消声特性。

偏微分方程边值问题和能量积分

在消声器中。波动方程为：

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中 $p = P e^{j\omega t}$ 为声压， $P = P(x, y, \omega)$ 为和坐标、频率有关的声压振幅。c为声音在空气中传播速度。通过分离变量法可得：

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \quad (2)$$

求解图(1)所示声学系统中声场分布。可认为是下列带有二、三类边界条件的方程求解：

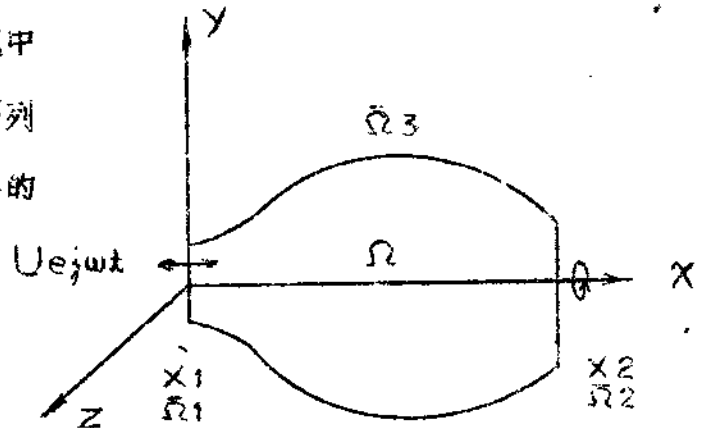


图1简化为轴对称的声学系统在 $\bar{\Omega}_1$ 处速度为 $Ue^{j\omega t}$ ；在 $\bar{\Omega}_2$ 处导纳为A； $\bar{\Omega}_3$ 为刚性壁。

$$\begin{cases} \nabla^2 P + k^2 P = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial P}{\partial n} + g_1 P = g_2 & \text{在 } \bar{\Omega} \text{ 上} \end{cases} \quad (8)$$

其中 Ω 表示求解区域; $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2 + \bar{\Omega}_3$, 表示区域边界;

$k = \frac{\omega}{c}$, 表示波数; ω 表示圆频率; n 表示法线, 其方向向外。在输入端 $\bar{\Omega}_1$ 处, $g_1 = 0$, $g_2 = j \rho \omega U$ 。在输出端 $\bar{\Omega}_2$ 处, $g_1 = j \rho \omega A$, $g_2 = 0$ 。在刚性壁 $\bar{\Omega}_3$ 处, $g_1 = g_2 = 0$ 。 ρ 表示空气密度, U 表示质点速度振幅, A 表示 $\bar{\Omega}_2$ 处的声导纳。式(8)可构成能量积分:

$$i(P) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(q \operatorname{grad} P)(g \operatorname{grad} P) - k^2 P^2] dV + \int_{\bar{\Omega}} (\frac{1}{2} g_1 P^2 - g_2 P) dA \quad (4)$$

其中 dV 为体积元, dA 为面积元。

根据泛函求极值原理, 如果泛函 $L(P)$ 的一次变分 $\delta L = 0$, 那么就说明 $L(P)$ 达到临界值。变分问题和偏微分方程边值问题的等价性是通过一次变分 $\delta L = 0$, $L(P)$ 达到临界值建立起来的。因此:

$$\begin{cases} \delta L = 0 \\ L(P) = \text{临界值} \end{cases} \quad \dots \quad \text{等价于式(8)}.$$

抗性消声器中的声压等值均可用复数表示:

$$\begin{cases} P = P_R + jP_I \\ U = U_R + jU_I \\ A = A_R + jA_I \end{cases} \quad (5)$$

下标 R, I 分别表示实部和虚部。

计算消声器传递损失时，假定在 $\bar{\Omega}_1$ 处入射声压为 P^+ ，反射声压为 P^- 。为了计算方便，不妨设 $P^+ = 0$ 。则有：

$$\begin{cases} U_R = \frac{1}{\rho C} (2P_R^+ - P_R^-) \\ U_I = -\frac{1}{\rho C} P_I \end{cases} \quad (6)$$

如果消声器末端无反射，那么在 $\bar{\Omega}_2$ 处的声导纳 A 的虚部 $A_I = 0$ ，并且有：

$$A_R = \frac{1}{\rho C} \quad (7)$$

经计算可得：

$$\begin{aligned} L(P_R, P_I) = & \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_1} 2\pi \{ [(grad P_R)^2 - (grad P_I)^2] - k^2 (P_R^2 - P_I^2) \} y da dx dy \\ & - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_1} 2\pi \times 2k P_R P_I y ds + \int_{\bar{\Omega}_1} 2\pi \times 2k P_R^+ P_I y ds - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_2} 2\pi \times 2k P_R P_I y ds \end{aligned} \quad (8)$$

其中 da 为 $\bar{\Omega}_1$ 或 $\bar{\Omega}_2$ 上的线元。

计算插入损失时，假定声源为定速度声源。那么在没接消声器时管道中声压空是 $P_R = U_R \rho C$ 。接上消声器之后，在 $\bar{\Omega}_1$ 处将有反射波 P^- 存在。因此在 $\bar{\Omega}_1$ 处有 $U = \frac{1}{\rho C} (P^+ - P^-)$ 。但声源已被假定为定速度源，所以 $-\frac{P^-}{\rho C}$ 可略去不计。经计算可导出下列关系式：

$$\begin{aligned} U_R = & \frac{1}{\rho C} P_R^+ \\ L(P_R, P_I) = & \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_1} 2\pi \{ [(grad P_R)^2 - (grad P_I)^2] - k^2 (P_R^2 - P_I^2) \} y dx dy \\ & + \int_{\bar{\Omega}_1} 2\pi k P_R^+ P_I y ds - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}_2} 2\pi \times 2k P_R P_I y ds \end{aligned} \quad (9)$$

几何剖分

消声器中声压振幅是点的函数。因此在求解区域内有无限个未知数。如果把求解区域剖分成若干单元，每个单元中的声压振幅由插值函数表示。那么有限元离散过程就把无限个未知数求解问题化为有限个未知数求解问题。所以下一步工作是在求解区域进行几何剖分。由于是轴对称问题，所以采用三角形园环体单元。如图(2)所示。单元划分和节点编号原则可见有关文献。

插值函数

在有限元离散过程中，将解函数 $P(X, Y, \omega)$ 在各个单元上采用适当的插值函数来代替。本文采用最简单的线性插值函数。对于单元 e ：

$$P^{(e)} = N_e P_e \quad (10)$$

对于整个求解区域：

$$P = \sum_{e=1} P^{(e)} = \sum_{e=1} N_e P_e \quad (11)$$

其中 $P_e = [P_i^{(e)} \ P_j^{(e)} \ P_m^{(e)}]^T$ ，为 P 在单元 e 上各节点值。

$N_e = [N_i^{(e)} \ N_j^{(e)} \ N_m^{(e)}]$ ，为形态函数或插值函数。由于线性插值函数满足协调性和完备性的条件，所以求解区域内的能量积分式可

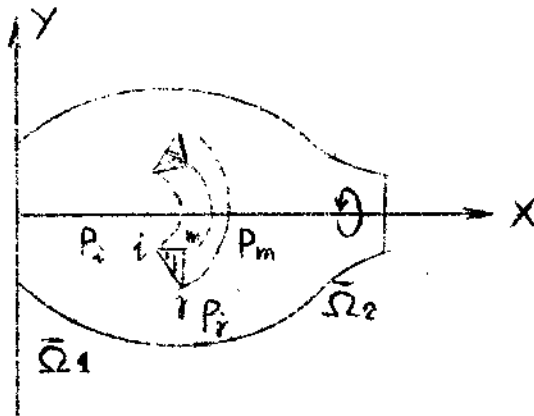


图2 轴对称系统的三角形园环体单元

离散为:

$$L = \sum_{e=1} L^{(e)} + \sum_{e=1} L_1^{(e)} + \sum_{e=1} L_2^{(e)} \quad (12)$$

其中 $L^{(e)}$ 表示三角形园环体单元的体积分, $L_1^{(e)}$,

$L_2^{(e)}$ 分别表示 $\bar{\Omega}_1$ 和 $\bar{\Omega}_2$ 处面积分。

单元矩阵计算

对于三角形园环体单元的体积分:

$$M1_e = \int_{\bar{\Omega}_e} (N_x^T N_x + N_y^T N_y) y dxdy = \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ \text{对称} & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ & & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix} \times \frac{\bar{y}}{4S_e} \quad (13)$$

$$M2_e = \int_{\bar{\Omega}_e} N^T N y dxdy = \begin{bmatrix} 2(3\bar{y} + 2y_i) & (3\bar{y} + y_i + y_j) & (3\bar{y} + y_i + y_m) \\ \text{对称} & (3\bar{y} + 2y_j) & (3\bar{y} + y_j + y_m) \\ & & (3\bar{y} + 2y_m) \end{bmatrix} \times \frac{S_e}{60} \quad (14)$$

对于和 $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ 有关的面积分:

$$T1_e = \begin{bmatrix} 3y_i^{(1)} + y_m^{(1)} & y_j^{(1)} + y_m^{(1)} \\ y_i^{(1)} + y_m^{(1)} & y_j^{(1)} + 3y_m^{(1)} \end{bmatrix} \times \frac{KS_{jm}^{(1)}}{12}; \quad T2_e = \begin{bmatrix} 3y_i^{(2)} + y_m^{(2)} & y_j^{(2)} + y_m^{(2)} \\ y_i^{(2)} + y_m^{(2)} & y_j^{(2)} + 3y_m^{(2)} \end{bmatrix} \times \frac{KS_{jm}^{(2)}}{12} \quad (15)$$

其中下标 X, Y 表示 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ 。 $\bar{y} = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_m)$, $S_e = \frac{1}{2}(b_j c_m - b_m c_j)$, $S_{jm} = (b_j^2 + c_j^2)^{1/2}$ 。 上标(1), (2)分别和 $\bar{\Omega}_1$ 或 $\bar{\Omega}_2$

上节点有关的量。

总体矩阵合成

把式(8), (9)分别代入式(12), 再利用式(13), (14), (15)化简, 然后求变分。当 $\delta L = 0$ 时可得下列方程组:

$$\begin{cases} (M1 - k^2 M2)P_R - (B1 + B2)P_x = 0 \\ (M1 - k^2 M2)P_x + (B1 + B2)P_R = Q_x \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} (M1 - k^2 M2)P_R - B2 P_x = 0 \\ (M1 - k^2 M2)P_x + B2 P_R = Q'_x \end{cases} \quad (17)$$

其中 $M1 = \sum_{e=1}^N M1_e$, $M2 = \sum_{e=1}^N M2_e$, $B1 = \sum_{e=1}^N T1_e$, $B2 = \sum_{e=1}^N T2_e$, $Q_x = \sum_{e=1}^N 2T_e P_R^+$,

$$Q'_x = \sum_{e=1}^N T_e P_R^+$$

。如果节点数为 $N P$ 。那么 $M1$

$M2$, $B1$, $B2$ 均为 $N P \times N P$ 阶矩阵。 Q_x , Q'_x 均为 $N P \times 1$ 阶矩阵。

$$P_R = [P_{R1}^{(1)} P_{R2}^{(1)} \dots P_{Re}^{(1)} \dots P_{R(NP-1)}^{(1)} P_{RNP}^{(1)}]^T$$

$$P_x = [P_{x1}^{(1)} P_{x2}^{(1)} \dots P_{xe}^{(1)} \dots P_{x(NP-1)}^{(1)} P_{xNP}^{(1)}]^T$$

分别表示各节点声压振幅的实部和虚部。

求解线性代数方程组及计算消声器消声特性

传递损失的定义为:

$$TL = 10 \log_{10} \frac{\text{入射声功率}}{\text{透射声功率}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{in}^2}{P_e^2} \right) \quad (18)$$

令入射波 $P_{in} = P_R^+ = 1$ 。解方程组 (16)。可求出消声器输出端 \bar{P}_x 处各节点声压振幅的实部、虚部。并求声压幅值。并取其平均值。根据

$$TL = 10 \log_{10} \frac{1}{(\bar{P}_x)^2} \quad (19)$$

可求出消声器的传递损失。

同理。解方程组 (17)。根据

$$II = 20 \log_{10} \frac{1}{\bar{P}_x^2} \quad (20)$$

可求出消声器的插入损失。

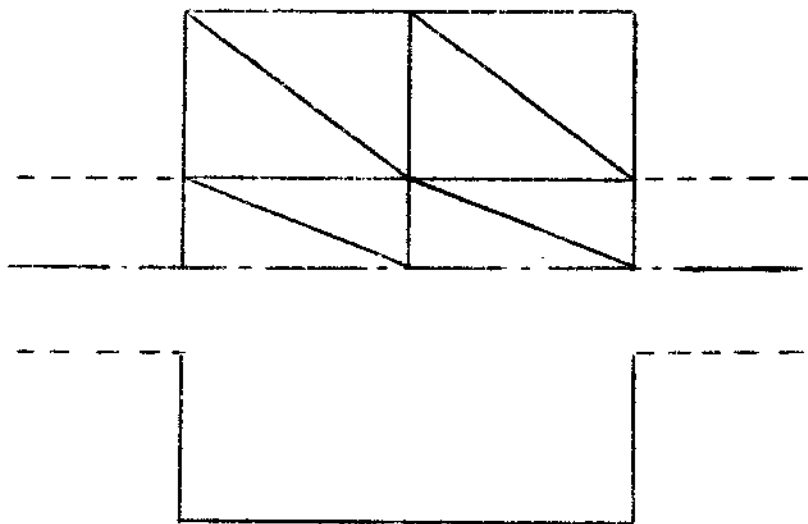
三、有限元方法和一维理论方法之比较

为了和一维平面波理论进行比较，本文计算了简单扩张室式消声器的传递损失。一维理论传递损失计算公式为：

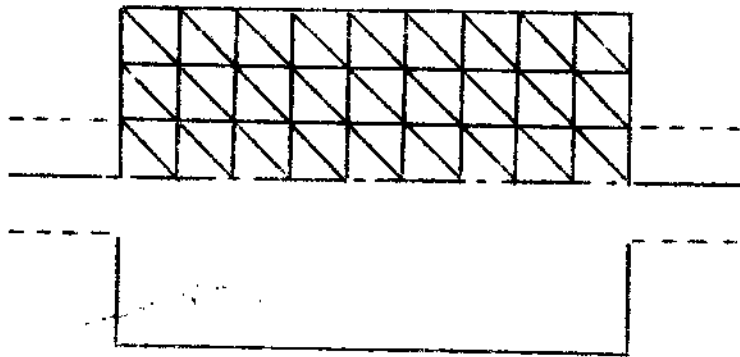
$$TL = 10 \log_{10} \left[1 + \frac{1}{4} \left(m - \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2 k \ell \right] \quad (21)$$

其中 m 为扩张比， ℓ 为扩张室腔长。

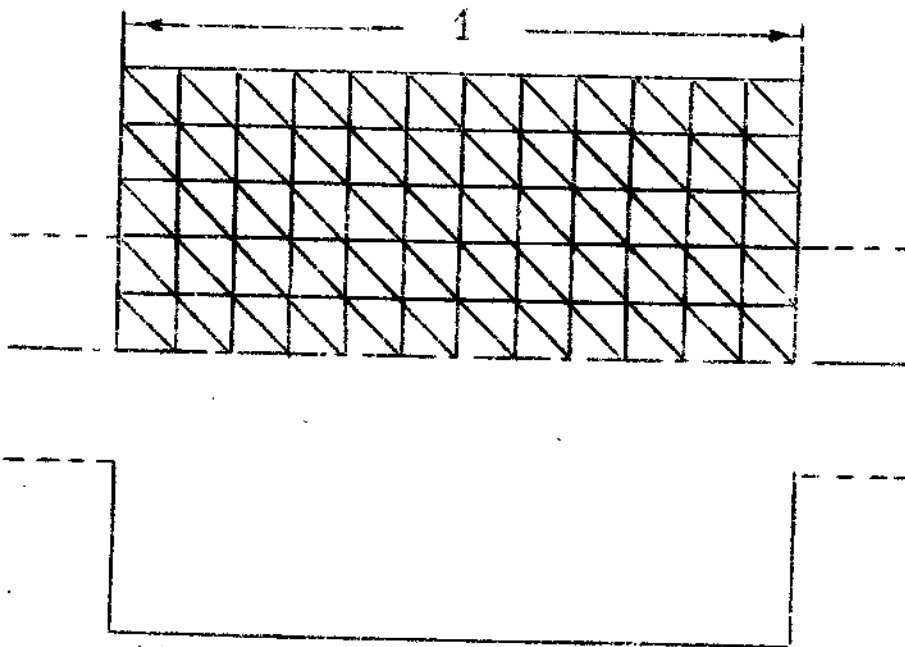
有限元方法计算传递损失和插入损失时，对求解区域进行了三种不同形式的几何剖分，如图(3)所示。两种方法的计算结果如图(4)所示。



a: 单元: 8 ; 节点: 9。



b: 单元: 54; 节点: 40。



c: 单元: 120; 节点: 78。

图3 简单扩张室消声器, 三单元划分, 单元长为600;
腔体直径400; 输入端直径150。

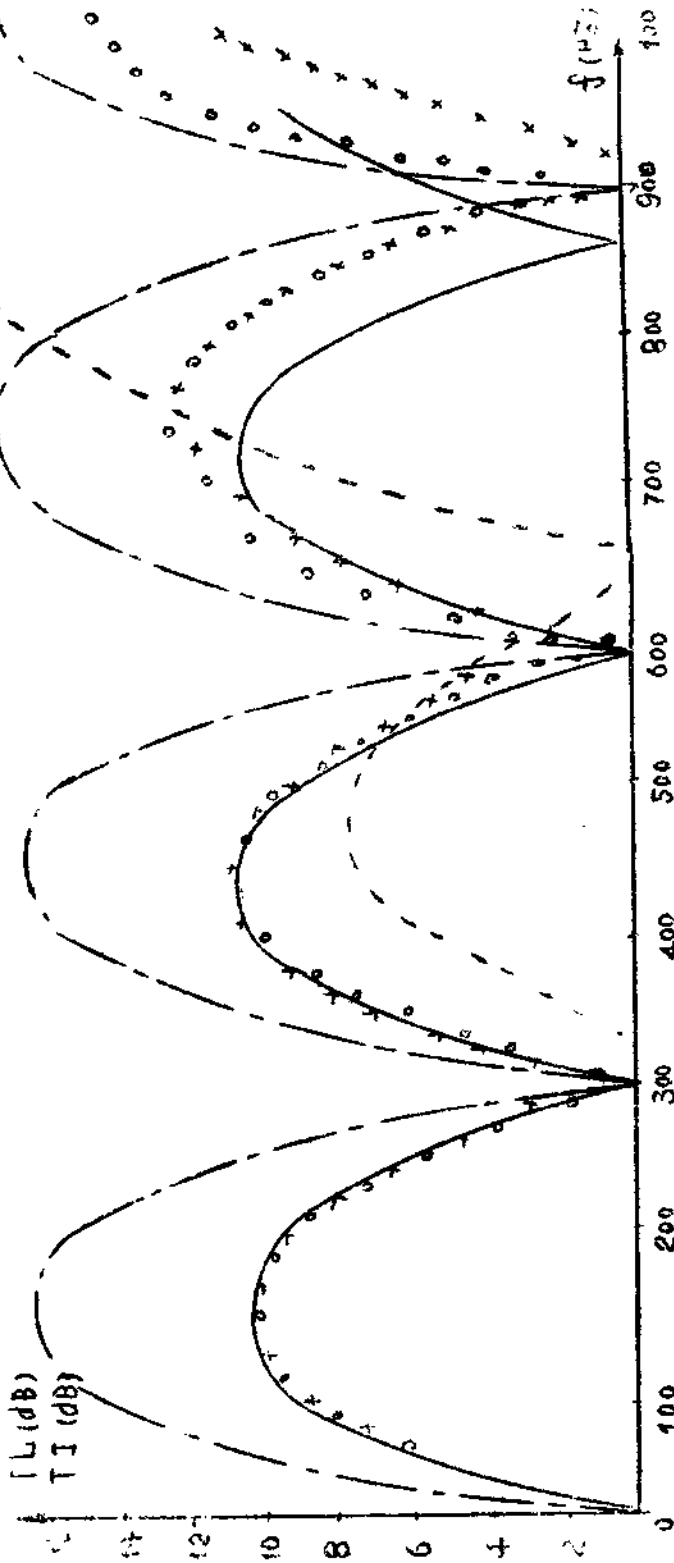


图4 简单扩张室消声器TL—维平面有限元、

有限元方法：单元：8；节点：9；

单元54；节点：40； $\times \times \times \times \times \times \times$

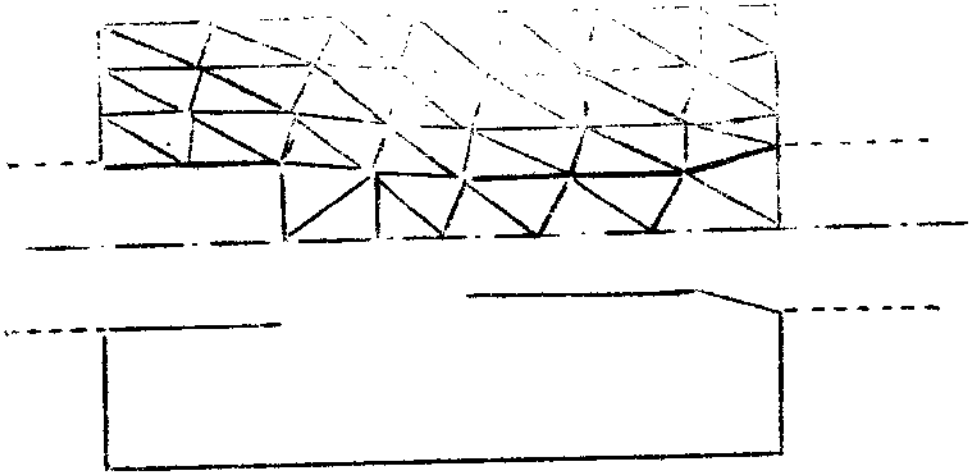
单元120；节点：78；000000

IL；有限元方法：单元：120；节点78；——

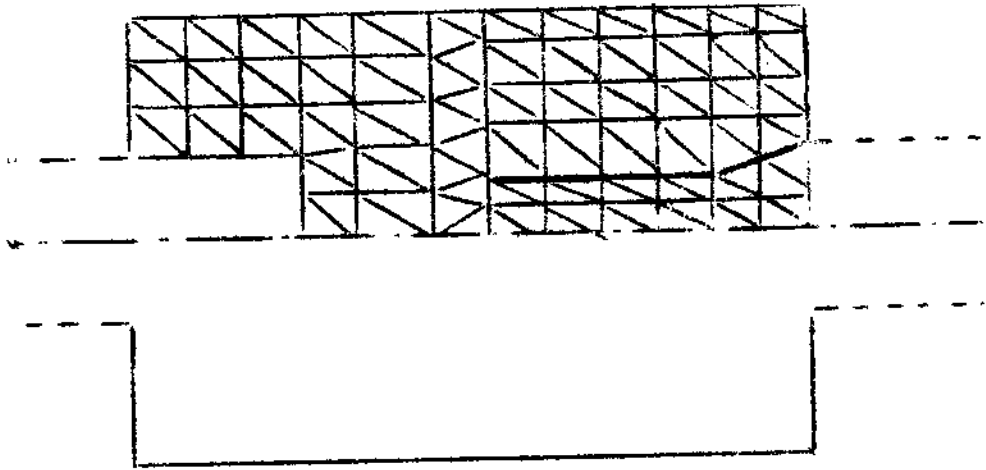
四、有限元方法计算值及实验验证

对于采用传统的一维理论难以解决的插管消声器，本文采用有限元方法计算其消声特性。消声器的结构形式和两种不同的几何剖分，如图(5)所示。

由于条件所限，本文只给出了消声器插入损失的实验值。实验在静态情况下进行，并且连接消声器两端的上下流管道很长，末端无反射。插入损失的定义为：消声器安装前后，在空间同一点测得的声压级之差，单位为d B。测量消声器插入损失的实验装置如图(6)所示。有限元方法计算结果和实验值如图(7)所示。

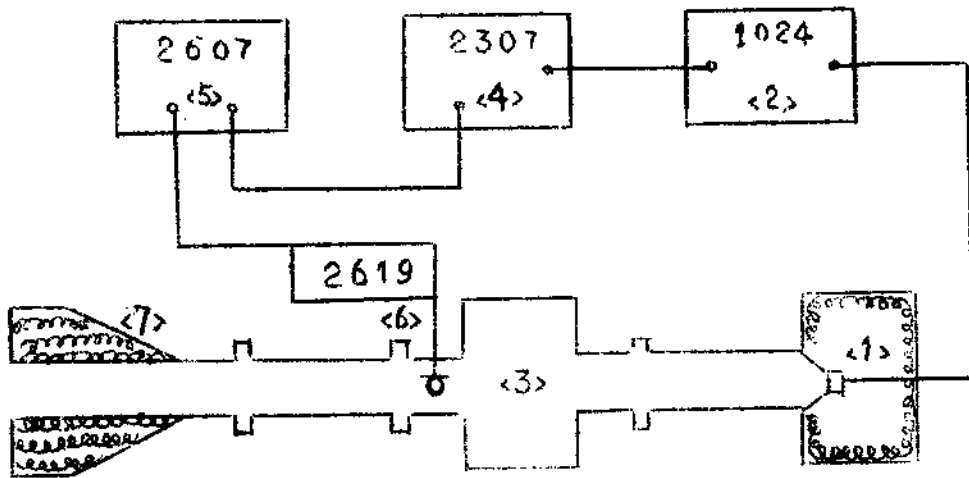


a 单元: 52; 节点: 41



b 单元: 121; 节点: 85

图5: 接管消声器: 二种单元划分



- | | |
|----------------|-------------------------|
| (1) 扬声器 | (5) 2607 测量放大器 |
| (2) 1024 信号发生器 | (6) 2619 前置放大器及
电容话筒 |
| (3) 被测消声器 | (7) 处理末端反射消声器 |
| (4) 2307 记录仪 | |

图6 测量消声器插入损失实验框图

五、讨 论

关于简单扩张室式消声器的插入损失。比较一维理论计算值和有限元方法的计算值。可以发现。随着单元数和节点数的增加。有限元方法计算值在700 Hz。以下的频率范围内单调地收敛于一维理论值。单元数为120。节点数为78时。两种结果有较好的一致性。在700 Hz。以上的频率范围。随着频率增高。误差逐渐增大。

比较插管消声器插入损失的计算结果(单元121。节点85)和实验结果。可以发现。在550 Hz。以下的频率范围内两者有较好的一致性。当频率高于550 Hz。时随着频率增高。误差增大。

比较插入损失和传递损失两种计算结果。可以发现。如果几何剖分形式相同。那么计算结果的趋势是相间的。只不过是前者高于后者3~6 dB。其原因是计算插入损失时没有考虑到消声器输入端反射波的影响。而计算传递损失时考虑到了消声器输入端反射波的影响。

关于产生误差的原因。一是计算误差。根据有限元解的误差理论。当采用线性插值函数时。误差和单元边长 h 的一次方成正比。减少计算误差的方法是增加单元、节点数。或者采用高次插值函数。二是实验误差。在测量消声器插入损失时。声源并不是严格的定速度源。在输入端 Π_1 处的反射波被忽略。也会造成误差。

六、结 论

有限元方法计算消声器消声特性有下列优点:适用于复杂的几何。

物理边界条件；在低频范围内有较好的精度；可编成通用程序。利

电子计算机设计。计算消声器。