量子力学題解

华东师大物理系印

本题解是为沈仲钧、冯茂仁编著的《量子力学》一书配套用的。供教量子力学的教师参考，也可供报考物理系的大学生以及研究生、科技工作者参考。

编者

88.7

目 录

第　一　章

1．用波长为2790A和2450A的光照射某种金属的表面，遏遏止电势差分别为0.66伏与1.26伏。设电子电荷及光速均为已知。试确定普朗克常数的数值和此金属的脱出功。

解：由 $eU_a = h\nu - A$

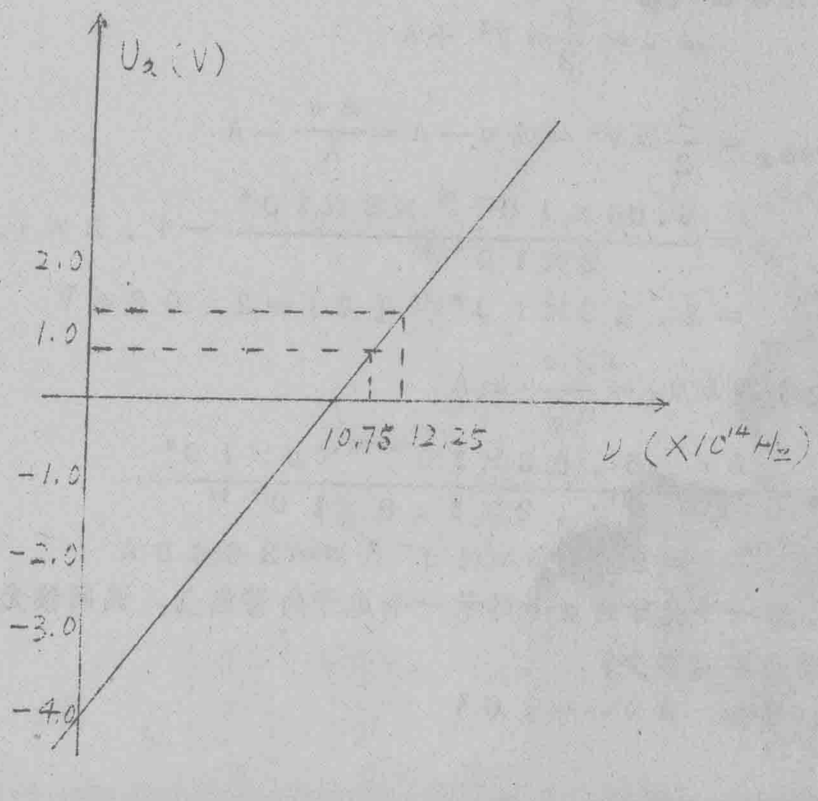
得 $$U_a = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

可知 U_a 与 ν 为直线关系，其斜率为 h/e。将λ换算成ν的值：

$$\nu_1 = \frac{C}{\lambda_1} = \frac{3\times10^{10}}{2450\times10^{-8}} = 12.25\times10^{14}\ (H_z)$$

作 $U_a-\nu$ 图，由此图可求得

$$(1)\ \frac{h}{e} = \frac{\Delta U_a}{\Delta\nu} = \frac{1.26-0.66}{(12.25-10.75)\times10^{14}}$$
$$= 4\times10^{-15}\ (J\cdot S\cdot C^{-1})$$



由此得

$$h=1.6\times10^{-19}\times4\times10^{-15}=$$
$$=6.4\times10^{-34}\ (J\cdot S)$$

（较准确值为$h=6.625\times10^{-34}$ J·S）

（2）直线在纵轴上的截距等于$-\dfrac{A}{e}$，由图知$-\dfrac{A}{e}=-4$。

$$\therefore\quad A=4e=4\times1.6\times10^{-19}\ (J)=4eV$$

或由

$$eU_a=h\nu-A$$

直接算得A。

2．从铝中移出一个电子需要4．2 eV的能量，今有波长为2000Å的光投射到铝表面，试问：

（1）由此发射出来的光电子的最大动能是多少？

（2）铝的红限波长是多少？

解：（1）已知铝的电子逸出功A＝4．2 eV，入射光的波长$\lambda=2000\text{Å}=2\times10^{-7}m$。

由爱因斯坦方程

$$h\nu=\frac{1}{2}mV^2+A$$

得
$$E_{kmax}=\frac{1}{2}mV^2=h\nu-A=\frac{hc}{\lambda}-A$$
$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{2\times10^{-7}}-4.2\times1.6\times10^{-19}$$
$$=3.23\times10^{-19}\ (J)=2.02eV$$

（2）由$h\nu_0=\dfrac{hc}{\lambda_0}=A$

得
$$\lambda_0=\frac{hc}{A}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{4.2\times1.6\times10^{-19}}$$
$$=2.96\times10^{-7}m=2960\text{Å}$$

3．若一个光子的能量等于一个电子的静能量，试问该光子的频率、波长和动量各是多少？

解：已知　$h\nu=m_0C^2$

$$\therefore \quad \nu=\frac{m_0 c^2}{h}=\frac{9.11\times10^{-31}\times9\times10^{16}}{6.63\times10^{-34}}$$

$$=1.24\times10^{20}\ (H_2)$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{3\times10^{8}}{1.24\times10^{20}}=2.42\times10^{-12}\ (m)$$

$$=0.024A$$

$$P=\frac{h\nu}{c}=m_0 c=9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}$$

$$=2.73\times10^{-22}\ (Kg\cdot m\cdot S^{-1})$$

在电磁波谱中 它属于γ射线。

4．波长$\lambda_0=0.708A$的x射线在石腊上受到康普登散射，求在$\frac{\pi}{2}$和π方向上所散射的x射线的波长各是多少？

解：由 $\lambda-\lambda_0=\frac{2h}{m_0 c}\sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ 散射波长 $\lambda=\frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}+\lambda_0$

已知 $\lambda_0=0.708A=0.708\times10^{-10}m$

在$\theta=\frac{\pi}{2}$方向上的散射波长为

$$\lambda_1=\frac{2\times6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}}\sin^2\frac{\pi}{4}+0.708\times10^{-10}$$

$$=0.732\times10^{-10}m=0.732A$$

在$\theta=\pi$方向上的散射波长为

$$\lambda_2=\frac{2\times6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-34}\times3\times10^{8}}\sin^2\frac{\pi}{2}+0.708\times10^{-10}$$

$$=0.756\times10^{-10}m=0.756A$$

5．能量为15eV的光子被氢原子中处于第一玻尔轨道的电子所吸收而形成一光电子，问此光电子远离质子时的速度为多大？它的德布罗意波长是多少？

解：形成光电子的电子已被电离，则有

$$h\nu=E_{电离}+\frac{1}{2}mV^2$$

已知氢原子基态的电离能$E_{电离}=13.6eV$。所以光电子动能

$$\frac{1}{2}mV^2=h\nu-E_{电离}=E_k=15-13.6$$
$$=1.4(eV)$$

求得光电子的速度

$$V=\sqrt{2E_k/m}=\sqrt{\frac{2\times1.4\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}$$
$$=7.01\times10^5(m\cdot s^{-1})$$

其德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{mV}=\frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-31}\times7.01\times10^5}$$
$$=10.4\times10^{-9}(m)=10.4A$$

6．一束带电粒子经206伏的电势差加速后，测得其德布罗意波长为0.02A，已知这带电粒子所带电量与电子电量相等，求这粒子的质量。

解：因$eU=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2m}(\frac{h}{\lambda})^2\ (=\frac{p^2}{2m})$

所以 $m=\frac{1}{2eU}(\frac{h}{\lambda})^2$

$$=\frac{1}{2\times1.6\times10^{-19}\times206}\times(\frac{6.63\times10^{-34}}{0.02\times10^{-10}})^2$$
$$\doteq1.67\times10^{-27}(Kg)$$

故此种带电粒子为质子。

7．质量为40克的子弹以1000米／秒的速度飞行。

（a）与它伴随的波长是多少？

（b）为什么子弹不通过衍射效应显示其波动性？

解：（a）已知$m=40\times10^{-3}Kg$

$$v=10^3mS^{-1}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{40\times10^{-3}\times10^3}$$

$=1.66\times10^{-35}(m)=1.66\times10^{-25}$ A

(b) 波发生衍射的条件是当障碍物的线度与波长相当时，才发生衍射。由计算知，子弹的波长太小，故不出现衍射现象，因而也难以察觉其波动性。

8．热中子具有平均动能3／2KT，其中T是室温300K。

(a) 一个热中子的平均能量是多少电子伏特？

(b) 相应的德布罗意波长是多少？

解：(a) $\overline{E}=\frac{3}{2}KT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300$

$$=6.21\times10^{-21}(J)$$

$$=3.88\times10^{-2}\ eV$$

(b) $p=\sqrt{2m\overline{E}}=\sqrt{2\times1.67\times10^{-27}\times6.21\times10^{-21}}$

$$\doteq4.55\times10^{-24}(m\cdot Kg\cdot s^{-1})$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{h}{p}=\frac{6.63\times10^{-34}}{4.55\times10^{-24}}=1.46\times10^{-10}(m)$$

9．(a) 证明在氢原子内电子的跃迁可能发射无线电波的能级的最小量子数 $n=\sqrt[3]{2R_H\lambda}$，式中λ是无线电波的波长。

(b) 在射电天文学中，一个重要的辐射是由星际氢发射的21厘米线，试求对应的n值。

解：(a) 设$n>>1$时，电子处于n态的旋转频率即是发射无线电波的频率（从n向$n-1$态跃迁引起）。

由 $$\nu=\frac{C}{\lambda}=CR_H\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

当$n>>1$时，$\nu=CR_H\frac{2}{n^3}$，　∴　$n=\sqrt[3]{2R_H\lambda}$。

(b) $n=\sqrt[3]{2R_H\lambda}=\sqrt[3]{2\times1.09678\times10^5\times21}$

$$=\sqrt[3]{4.6065\times10^6}=1.66\times10^2$$

10．设氢原子处于基态时，试根据玻尔理论，求电子的：(1) 量子数，(2) 轨道半径，(3) 角动量和线动量，(4) 绕行频率、角速度和线速度，(5) 所受的力，(6) 动能、势能和总能量。

解：(1) $n=1$

$$(2)\ r_1=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}=\frac{8.85\times10^{-12}\times(6.63\times10^{-34})^2}{3.14\times9.11\times10^{-31}\times(1.6\times10^{-19})^2}$$

$$\doteq 5.3\times10^{-11}\ (m)=0.53\ \text{Å}$$

$$(3)\ L_1=r_1\times m v_1=\frac{h}{2\pi}=1.06\times10^{-34}\ (Kg\cdot m^2 S^{-1})$$

$$P_1=m v_1=\frac{L_1}{r_1}=\frac{1.66\times10^{-34}}{0.53\times10^{-10}}$$

$$=1.99\times10^{-24}\ (Kg\cdot m\cdot S^{-1})$$

$$(4)\ \nu_1=\frac{v_1}{2\pi r_1}=\frac{L_1}{2\pi r_1^2 m}\qquad\left(v_1=\frac{L_1}{m r_1}\right)$$

$$=6.57\times10^{15}\ (rev\cdot s^{-1})$$

$$\omega_1=2\pi\nu_1=6.28\times6.57\times10^{15}$$

$$=4.13\times10^{16}\ (rad\cdot s^{-1})$$

$$v_1=\frac{L_1}{m r_1}=\frac{1.06\times10^{-34}}{9.11\times10^{-34}\times0.53\times10^{-10}}$$

$$=2.19\times10^{6}\ (m\cdot s^{-1})$$

$$(5)\ F=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

$$=\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times(0.53\times10^{-10})^2}$$

$$=8.16\times10^{-8}\ (N)$$

$$(6)\ E_{K_1}=\frac{1}{2}m v_1^2=\frac{1}{2}\times9.11\times10^{-31}\times(2.19\times10^{6})^2$$

$$=13.6\ (eV)$$

$$E_{P_1}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{-(1.6\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times0.53\times10^{-10}}$$

$$=-27.2\ (eV)$$

$$E=E_{K_1}+E_{P_1}=13.6-27.2=-13.6\ (eV)$$

或 $$E=-\frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}=-13.6\ (eV)$$

第　二　章

1．若体系的波函数为

$$\Psi(x, t)=\psi(x)\left(e^{-\frac{i}{h}Et}+e^{\frac{i}{h}Et}\right)$$

求体系的几率密度。

解：几率密度为

$$\omega=\Psi^{*}\Psi=\left[\psi^{*}(x)e^{\frac{i}{h}Et}+\psi^{*}(x)e^{-\frac{i}{h}Et}\right]\cdot$$

$$\left[\psi(x)e^{-\frac{i}{h}Et}+\psi(x)e^{\frac{i}{h}Et}\right]$$

$$=|\psi(x)|^{2}\left(2+e^{i\frac{2E}{h}t}+e^{-i\frac{2E}{h}t}\right)$$

$$=2|\psi(x)|^{2}\left(1+\cos\frac{2E}{h}t\right)$$

因其几率分布与时间有关，故系统的态不是定态。

2．把下面的波函数归一化，

$$\psi(x)=A\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^{2}x^{2}}\qquad(\alpha\text{为实数})$$

解：$1=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^{2}\,dx$

$$=2A^{2}\boxed{\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha^{2}x^{2}}\,dx}$$

$$=2A^{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\alpha^{2}}=A^{2}\,\frac{\pi}{\alpha^{2}}$$

$$\therefore\quad A=\frac{\alpha}{\pi^{\frac{1}{2}}}$$

于是 $\psi(x)=\dfrac{\alpha}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^{2}x^{2}}$

3．判断下列波函数所描写的状态是否为定态？

(1) $\psi_1(x,t)=u(x)e^{ix-\frac{i}{\hbar}Et}+V(x)e^{-ix-\frac{i}{\hbar}Et}$

(2) $\psi_2(x,t)=u(x)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+u(x)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$, $(E_1\neq E_2)$

(3) $\psi_3(x,t)=u(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}+u(x)e^{i\frac{E}{\hbar}t}$

解：(1) $\psi_1(x,t)=[u(x)e^{ix}+V(x)e^{-ix}]e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$=\psi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

其中 $\psi(x)=u(x)e^{ix}+V(x)e^{-ix}$。
故$\psi_1(x,t)$为定态波函数。

(2) $\psi_2(x,t)=u(x)[e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}+e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}]$，$(E_1\neq E_2)$

由于$\psi_2(x,t)$不能写成$\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$的形式，故$\psi_2(x,t)$不是定态波函数。

(3) $\psi_3(x,t)=u(x)[e^{-i\frac{E}{\hbar}t}+e^{i\frac{E}{\hbar}t}]$

不能写成$\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$的形式，故$\psi_3(x,t)$不是定态波函数。

4. 由下列两定态波函数，计算几率流密度。

(1) $\psi_1=\frac{1}{r}e^{ikr}$，(2) $\psi_2=\frac{1}{r}e^{-ikr}$

从所得的结果说明ψ_1表示向外传播的球面波，ψ_2表示向内（向原点）

传播的球面波。

解：由 $\because \vec{J}=\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi\nabla\psi^{*}-\psi^{*}\nabla\psi)$ ……………… (1)

定态 $\psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ ……………… (2)

$\therefore\ \vec{J}=\frac{i\hbar}{2\mu}[\psi(\vec{r})\nabla\psi^{*}(\vec{r})-\psi^{*}(r)\nabla\psi(\vec{r})]$ (3)

(1) 在球坐标中

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{\theta}_0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varnothing}\vec{\varnothing}_0$$

而 $\psi_1(\vec{r})=\frac{1}{r}e^{ikr}$ 与 θ，$\varnothing$ 无关，故

$$\nabla\psi_1(r)=\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\vec{r}_0=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}e^{ikr}\right)\vec{r}_0$$

$$=\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\vec{r}_0$$

又 $\psi_1^{*}(r)=\frac{1}{r}e^{-ikr}$

得 $\nabla\psi_1^{*}(r)=-\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{r}_0$

代入 (3) 式有

$$\vec{J}_1=\frac{i\hbar}{2\mu}\left(-2ik\frac{1}{r^2}\right)\vec{r}_0$$

$$=\frac{\hbar k}{\mu}\frac{1}{r^2}\vec{r}_0=\frac{v}{r^2}\vec{r}_0$$ ……………………… (4)

其中 $v=\frac{\hbar k}{\mu}=\frac{p}{\mu}$

由 (4) 式知 $\vec{J}_1$ 是向外传播的球面波。

(2) $\psi_2=\frac{1}{r}e^{-ikr}$，$\psi_2^{*}=\frac{1}{r}e^{ikr}$

$$\therefore\quad \nabla\psi_2(r)=\nabla\psi_1{}^*(r)=-\left(ik+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{r}_0$$

$$\nabla\psi_2{}^*(r)=\nabla\psi_1(r)=\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\vec{r}_0$$

代入（3）式得

$$\vec{J}_2=\frac{i\hbar}{2\mu}\left(2ik\frac{1}{r^2}\right)=-\frac{\hbar k}{\mu}\frac{1}{r^2}\vec{r}_0=-\frac{v}{r^2}\vec{r}_0$$

则知 $\vec{J}_2$ 是向内（向原点）传播的球面波。

5．一维运动的粒子处在

$$\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & (x\geqslant 0)\\ 0, & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

的状态，其中 $\lambda>0$。

（1）将此波函数归一化；

（2）求粒子坐标的几率密度；

（3）在何处找到粒子的几率最大？

（4）求 x 和 x^2 的平均值。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=A^2\int_0^{\infty}x^2e^{-2\lambda x}dx$

$$=A^2\left[-\frac{1}{2\lambda}x^2e^{-2\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2\lambda}\int_0^{\infty}2xe^{-2\lambda x}dx\right]$$

$$=A^2\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}xe^{-2\lambda x}dx\right]$$

$$=A^2\left[-\frac{1}{2\lambda^2}xe^{-2\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{2\lambda^2}\int_0^{\infty}e^{-2\lambda x}dx\right]$$

$$=A^2\left[\frac{1}{4\lambda^3}e^{-2\lambda x}\right]_0^{\infty}=A^2\cdot\frac{1}{4\lambda^3}$$

$\therefore\quad A=2\lambda^{3/2}$，

$$即\quad \psi(x)=\begin{cases}(2\lambda^{3/2})x\cdot e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

（2）$w(x)=|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$

（3）令 $\frac{d}{dx}w(x)=0$

则有 $-4\lambda^3x^2\cdot 2\lambda e^{-2\lambda x}+e^{-2\lambda x}\cdot 8\lambda^3 x=0$

$\therefore \quad xe^{-2\lambda x}(1-\lambda x)=0$

得 $\quad x=\infty,\quad x=\frac{1}{\lambda},\quad x=0$

由波函数表达式知

$$w(\infty)=0,\ w(o)=0,\ w(\frac{1}{\lambda})=4\lambda e^{-2}$$

故 $x=\frac{1}{\lambda}$ 处发现粒子的几率最大。

（4）$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx$

$$=4\lambda^3\int_0^{\infty}x^3e^{-2\lambda x}dx=\frac{3}{2\lambda}$$

$\langle x^2\rangle=\int\psi^*x^2\psi dx$

$$=4\lambda^3\int_0^{\infty}x^4e^{-2\lambda x}dx=\frac{3}{\lambda^2}$$

6．设体系的波函数为

$$\psi(x,t)=Ae^{-\alpha x^2-i\omega t},$$

式中A，α，ω为正实数。为使此波函数满足薛定谔方程，V（x）应是怎样的函数？

解：将 $\psi(x,t)=Ae^{-\alpha x^2-i\omega t}$ 代入薛定谔方程

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\bar{V}(x)\right]\psi(x,t)$$

得 $\quad h\omega\psi(x,t)=\left[\frac{h^2\alpha}{m}-\frac{\alpha h^2\alpha^2x^2}{m}+V(x)\right]\psi(x,t)$

为使上式满足，有

$$\ddot{V}(x)=\frac{2h^2a^2x^2}{m}+h\omega-\frac{h^2a}{m}.$$

7．设 $\psi_1(\vec{r},t)$ 和 $\psi_2(\vec{r}_2,t)$ 是薛定谔方程

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\vec{r})\psi$$

的两个解，证明 $\int\psi_1^*\psi_2 d^3x$ 与时间无关。

证：ψ_1 和 ψ_2 分别满足薛定谔方程：

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi_1=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi_1+U\psi_1 \qquad (1)$$

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi_2=-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi_2+U\psi_2 \qquad (2)$$

用 ψ_1^* 乘（2）式，ψ_2 乘（1）式的共轭方程，再相减得

$$ih\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1^*\psi_2)$$

$$=\frac{h^2}{2m}(\psi_2\nabla^2\psi_1^*-\psi_1^*\nabla^2\psi_2)$$

$$=\frac{h^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot(\psi_2\vec{\nabla}\psi_1^*-\psi_1^*\vec{\nabla}\psi_2)$$

对全空间积分：

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\int\psi_1^*\psi_2 d^3x$$

$$=\frac{h^2}{2m}\int\vec{\nabla}\cdot(\psi_2\vec{\nabla}\psi_1^*-\psi_1^*\vec{\nabla}\psi_2)d^3x$$

$$=\frac{h^2}{2m}\int(\psi_2\vec{\nabla}\psi_1^*-\psi_1^*\vec{\nabla}\psi_2)\cdot d\vec{s}$$

其中 $d\vec{s}$ 为单元，根据波函数在无穷远处迅速→0的条件，（3）式右边面积分为0，即得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\psi_1^*\psi_2 d^3x=0,$$

故 $\int\psi_1^*\psi_2 d^3x$ 与时间无关。

第 三 章

1．有一质量为1克的小球，以1厘米／秒的速度在宽度为10厘米的一维无限深势阱内运动，求小球的量子数n是多少？

解：粒子在一维无限深势阱中具有的能量

$$E_h=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{1}{2}mV^2$$

所以

$$n^2=\frac{m^2a^2v^2}{\pi^2\hbar^2}=\frac{10^{-6}\times10^{-2}\times10^{-4}}{(3.14\times1.055\times10^{-34})^2}$$

$$n\simeq3.02\times10^{27}$$

2．电子在真空管中可以看作被限制在宽度为0．1厘米的板极和丝极之丝极之间的一维势阱内。试计算在此情况下，电子的能级间隔是多少？此电子的行为类似于波还是粒子？若电子的能量为100eV，问电子的量子数是多少？

解：（1）$E_n=\dfrac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$

$$\Delta E=E_{n+1}-E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(2n+1)$$

$$=\frac{(6.626\times3.1416)^2\times10^{-68}}{2\times9.109\times10^{-31}\times10^{-6}}(2n+1)$$

$$=2.38\times10^{-30}(2n+1)\text{焦耳。}$$

（2）能级差很小，能量可看作为连续的，可以电子的行为类似于粒子。

（3）$E_n=\dfrac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}=100\times1.602\times10^{-19}$

$$n^2=0.673\times10^{12}$$

$$n=8.2\times10^5$$

3．设粒子在一维无限深势阱运动，能量量子数为n，试求：

（1）距势阱内左壁1／4宽度内发现粒子的几率是多少？

（2）n取何数值时，在此区域内找到粒子的几率最大？

（3）当 $n\to\infty$ 时，此几率的极限是多少？这个结果说明了什么？

解：粒子在一维无限深势阱中的波函数是

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{（阱外）}\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi}{a}x & \text{（阱内）}\end{cases}$$

（1）在左壁到 $1/4a$ 的区域内找到粒子的几率为

$$W=\int_0^{\frac{1}{4}a}|\psi(x)|^2dx=\int_0^{\frac{1}{4}a}\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x\cdot dx$$

令 $\theta=\dfrac{n\pi}{a}x$

于是 $W=\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{n\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\dfrac{2}{n\pi}\left(\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{1}{4}\sin2\theta\right)_0^{\frac{n\pi}{4}}$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

（2）因为 $W=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，所以要使W为最大，则 $\dfrac{1}{2n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 应为最小。而当 $n=3,7,11,\cdots$ 时，$\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 有最小值 -1；再考虑因子 $\dfrac{1}{2n\pi}$，可知当 $n=3$ 时，$\dfrac{1}{2\pi n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 有最小值 $-\dfrac{1}{6\pi}$。故 $n=3$ 时，W有最大值。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}W=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

此结果说明，当 $n\to\infty$ 时，量子现象就过渡到经典现象。因经典粒子在势阱中匀速往复运动，在势阱中各处发现粒子的几率相等。而在势阱中发现粒子的几率为1，所以在 $\frac{1}{4}$ 阱宽内发现粒子的几率为 $\frac{1}{4}$。

4．设原子或分子中的电子可以粗略地看作为一维无限深势阱中的粒子，并设势阱宽度为1Å，试求

（1）两个最低能级间的间隔。

（2）电子在这两个能级间跃迁时，发出的光的波长。

解：（1）一维无限深势阱中粒子的能量

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\qquad E_{n+1}=\frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\therefore\quad \Delta E=E_{n+1}-E_n=\frac{(2n+1)\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

对于两个最低能级：$n=1$ 和 $n+1=2$。

$$\therefore\quad \Delta E=\frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{3\times(3.14)^2\times(1.05\times10^{-27})^2}{2\times9.11\times10^{-28}\times(10^{-8})^2}\ (\text{尔格})$$

$$=1.79\times10^{-10}\ \text{尔格。}$$

（2）$\Delta E=h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{6.63\times10^{-27}\times3\times10^{10}}{1.79\times10^{-10}}\ \text{厘米}\approx111\ \text{Å}$$

5 一个质量为1克的质点被一弹簧联于一个固定点，若此质点只能在x方向运动，当此弹簧受到10^4达因拉力时，它被拉长了1厘米，试求此体系的零点能；若此体系的能量等于kT，这相当于体系在室温下达到热动平衡，试计算体系的量子数（玻尔兹曼常数$k=1.38\times10^{-16}$尔格／度，$T=298\text{k}$）。

解：弹簧的弹性系数 $K=\dfrac{F}{x}=\dfrac{10^4}{1}\dfrac{\text{达因}}{\text{厘米}}$

（1）体系的振动频率 $\nu=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{K}{m}$

故其零点能 $E=\dfrac{1}{2}h\nu=\dfrac{h}{4\pi}\dfrac{K}{m}=\dfrac{1}{2}\times10^2\times\hbar/\text{秒}$

$$=\frac{1}{2}\times1.054\times10^{-25}\ \text{尔格}$$

（2）$E=kT$ 时，$kT=(n+\dfrac{1}{2})h\nu$

$$\therefore\quad n=\frac{kT}{h\nu}-\frac{1}{2}=\frac{1.38\times10^{-16}}{1.054\times10^{-25}}-\frac{1}{2}=3.90\times10^{11}$$