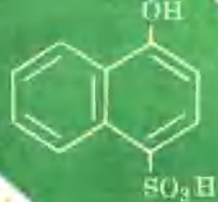
SHULIHUASHENGYUANDI SHULIHUASHENG SHULIHUASHENG



数理化生園地

上海科学技术出版社

1985 2

数理化生园地

1985年

第2辑

总16辑

上海商务印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

(上海市瑞金二路四五〇号)

上海科学技术出版社出版

科技新书目: 92·200

统一书号: 13119·1254

定 价: 0.24元

学习辅导

单位圆[illegible]

叶声扬 （上海市虹口区教育学院）

单位圆除了应用于三角函数线、确定三角函数的定义域及其一些性质外，如应用恰当，还可解决部分三角不等式及恒等式的证明等问题. 兹举数例，各例的图均为单位圆.

（一）不等式的证明

〔例 1〕 α 为锐角，求证：$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

证明 如图 1，$\angle AOP=\alpha$，$PM\perp OX$，$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$. 在 $\triangle OMP$ 中，$OM+MP>OP$. 所以 α 为锐角时，$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

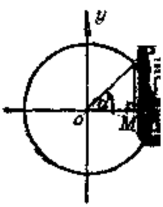


图 1

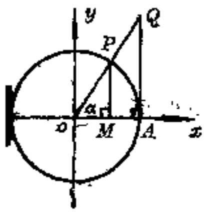


图 2

〔例 2〕 如 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$.

证明 如图 2，$\overset{\frown}{PA}$ 长 $=R\alpha=\alpha$. $\because \overset{\frown}{PA}>PA>MP$，而 $MP=\sin\alpha$，$\therefore \alpha>\sin\alpha$. $\because \operatorname{tg}\alpha=AQ$，$\therefore S_{\triangle OAQ}=\frac{1}{2}\times OA\times AQ$

$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 而 $S_{扇形OAP}=\frac{1}{2}\times1^2\times\alpha=\frac{\alpha}{2}$. 又 $S_{\triangle OAQ}>S_{扇形OAP}$, 所以 $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$. 即证得 $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$.

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\cos\alpha>\cos^2\alpha$; 应用本题结论, 有 $\alpha>\sin\alpha$, $\alpha\sin\alpha>\sin^2\alpha$, 故还有 $\cos\alpha+\alpha\sin\alpha>1$ 的结论.

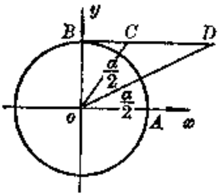


图 3

〔例 3〕 若 $0<\alpha<\pi$, 且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, 求证: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>1+\operatorname{ctg}\alpha$.

证 (1) 如 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\angle AOC=\alpha$, $\angle AOD=\frac{\alpha}{2}$(如图 3).

则余切线

$$BC=\operatorname{ctg}\alpha,\ BD=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\because\quad \angle D=\angle AOD=\frac{\alpha}{2},\quad \therefore\quad OC=CD>1.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha=BD-BC=CD>1,$$

即 $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>1+\operatorname{ctg}\alpha,$$

(2) 类似可证当 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时不等式也成立. 这留给读者作为练习.

(二)恒等式的证明

〔例 4〕 对任意的 α, 求证:

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+120^\circ)+\cos(\alpha+240^\circ)=0,$$
$$\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha+240^\circ)=0.$$

证明 在单位圆上作出坐标$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$,

$(\cos(\alpha+120°), \sin(\alpha+120°))$, $(\cos(\alpha+240°), \sin(\alpha+240°))$ 所对应的点 A, B, C.

$\because$ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为正三角形，重心在原点. 又由解析几何知识知：重心的坐标

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),$$

$$y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C).$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}(\cos\alpha+\cos(\alpha+120°)+\cos(\alpha+240°))=0,$$

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°))=0,$$

等式两边乘上 3，即证得所需的结论.

〔例 5〕 A, B, C 均为锐角，且 $\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \cos A \\ 1 & \sin B & \cos B \\ 1 & \sin C & \cos C \end{vmatrix}=0$,

求证：

$$(A-B)(B-C)(C-A)=0.$$

证明 由已知条件，单位圆上的三个点 $A(\cos A, \sin A)$, $B(\cos B, \sin B)$, $C(\cos C, \sin C)$共线. 但直线与单位圆最多只能交于两点，所以至少有两点重合，不妨设为 A 与 B 重合，则 $\cos A=\cos B$. 因 A, B 为锐角，故 $A=B$. 因此证得

$$(A-B)(B-C)(C-A)=0.$$

〔例 6〕 已知：$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$, $a\cos\beta+b\sin\beta=c$. $\alpha\neq 2k\pi+\beta$, $a^2+b^2\neq 0$. 求证：

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

证明 先设 $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$. 把已知条件看成直线

$ax+by+c=0$ 与单位圆交于两点 $P(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$Q(\cos\alpha,$ $\sin\alpha)$（如图 4）．作 $OR\perp PQ$，垂足为 R．则

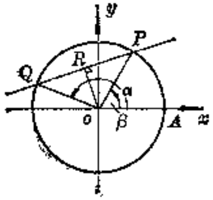


图 4

$$\angle POR=\frac{1}{2}(\angle AOQ-\angle AOP)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=OR^2;$$

又原点到直线的距离 $|OR|=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$$\therefore\quad \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

在一般情况下，可将 α、β 写成 $\alpha=2l\pi+\alpha'$，$\beta=2m\pi+\beta'$，其中 $0\leqslant\alpha'$、$\beta'<2\pi$．那末由题设可知 $a\cos\alpha'+b\sin\alpha'=c$，$a\cos\beta'+b\sin\beta'=c$，因而有 $\cos^2\dfrac{\alpha'-\beta'}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$．于是

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos^2\left[(l-m)\pi+\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right]$$
$$=\cos^2\frac{\alpha'-\beta'}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2},$$

命题得证．

正确掌握液体的压强计算式

郑时芬　（上海市南汇县新场中学）

透彻理解液体的压强的计算公式，并能应用于分析、解决问题，是学习“液体的压强”这一节的关键．

公式 $p=\rho gh$ 表明了液体内部的压强只跟液体的密度和深度有关系，跟液体的重量、体积、容器的形状等都没有关系．解题时要注意以下三个问题：

1．正确理解“深度”的含义．深度是指被测点到液体自由表面的竖直距离．如图1所示，A 点处的深度不是20厘米，而是32厘米，即 $h_A=32$ 厘米；B 点处的深度不是零，而是(32－20)厘米，即 $h_B=12$ 厘米．又如图2所示，因为 A、B 点到液体自由表面的距离相等，所以 $h_A=h_B$．

图 1

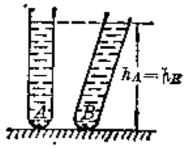


图 2

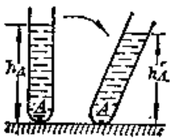


图 3

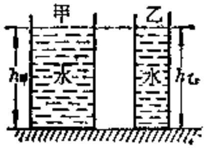


图 4

2．分析、讨论问题时，只需抓住 ρ 与 h 这两个物理量．当 ρ 相同时(同一种液体)，p 的大小取决于 h．h 变，则 p 变；h 相同，则 p 亦相同．当 h 相同时，ρ 大的，p 亦大．如图3所示，若将玻璃管按箭头方向倾斜，则容器底部 A 点处的深度由 h_A 减小到 h'_A，容器底部受到的液体的压强也随之减小．又如图4所示，甲、乙两容器中装有同样高度的水，虽然两容器的横截面积不同，装有水的重量不同，但是由于容器底部水的深度相同，即 $h_甲=h_乙$，所以水对容器底部的压强 $p_甲=p_乙$．再如图5所示，甲、乙两容器底面积相同，当分别注入重量相等的同种液体时，则因

容器底部的液体的深度 $h_甲>h_乙$，所以液体对容器底部的压强 $p_甲>p_乙$. 如果在此两容器中分别注入同样高度的水，那么水对容器底部的压强 $p_甲=p_乙$.

图 5

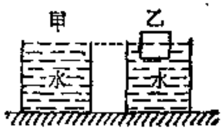


图 6

3. 液体对容器底部的压力并不一定等于液体的重量. 如图 5 所示，当两容器中分别注入重量相等的同种液体时，液体对两容器底部的压力却并不相等. 在分析讨论时，应两步：第一步，先根据 $p=\rho gh$ 求出液体对容器底部的压强；第二步，再根据 $F=pS$ 求出液体对容器底部的压力. 在上面的讨论中，我们已经知道 $p_甲>p_乙$，又因为 $S_甲=S_乙$，所以 $p_甲S_甲>p_乙S_乙$，即 $F_甲>F_乙$. 如果在此两容器中分别注入同样高度的水时，两容器中的水的重量虽然不相等，但容器底部受到的水的压力却是相等的. 因为 $p_甲=p_乙$，$S_甲=S_乙$，所以 $F_甲=F_乙$（图略）. 又如图 6 所示，两容器底面积相同，并盛有同样高度的水，其中乙容器的水面上浮着一木块. 在分析、比较两容器底部受到的压力时，无需考虑木块的存在与否，依然只要抓住 ρ、h、S 三个物理量就可以了. 因为 ρ 相同、h 相同，所以水对容器底部的压强 $p_甲=p_乙$，又因为 S 相同，所以水对容器底部的压力 $F_甲=F_乙$.

* * *

学习"大气的压强"一节，要注意以下五点：

1. 弄清托里拆利实验为什么能测出大气压的值. 由于管内水银面上方没有空气，是管外水银面上的大气压支持着管里的水银柱，所以管内水银柱产生的压强就等于大气压，即 $p_{大气}=$

$p_{汞柱}=\rho_{汞}gh_{汞}$，只要测出 $h_{汞}$，即可得 $p_{大气}$.

2．理解大气压的实用单位——厘米汞柱的物理意义，并掌握它跟帕斯卡单位之间的换算关系．如果大气压的值是75厘米汞柱，则表示大气压的值相当于75厘米高的水银柱所产生的压强，根据液体压强的计算公式即可将厘米汞柱换算成帕斯卡．

3．当大气压为已知值，要求它所能支持的液柱高时，也同样可以利用公式 $p_{大气}=p_{液柱}=\rho_{液}gh_{液}$，从而得 $h_{液}=\frac{p_{大气}}{\rho_{液}g}$，计算时 $p_{大气}$ 的单位要换算成帕斯卡．如 $p_{大气}=75$ 厘米汞柱 $=13.6\times10^3$ 千克/米$^3\times9.8$ 牛顿/千克 $\times0.75$ 米 $=1.00\times10^5$ 帕斯卡．

4．由于空气的密度不是均匀的，也无法找到空气的自由表面，即无法测空气的深度，所以不能用 $p=\rho gh$ 来计算大气压的值．

5．必须记住标准大气压的值是760毫米汞柱．

浅谈电势的变化率

时　雨

电场强度和电势是描述电场性质的两个重要的物理量．场强是从电荷在电场中受到电场力这一点来研究静电场的性质；而电势是从电荷在电场中移动时，电场力所作的功这一点来研究静电场的性质．

场强和电势存在着一定的联系．我们知道，电场中沿场强方向电势下降得最快，或者说场强方向就是电势降落陡度最大

的方向．对于匀强电场我们还得到了$E=\frac{U_{AB}}{d_{AB}}$，这一电势差跟场强的数量关系式．这说明了匀强电场中，场强等于沿场强方向每单位长度上的电势降落．进一步，我们可以把场强理解为电势沿场强方向的关于距离的变化率．认识了这一点，我们就可以正确理解下列这些问题．

有的同学认为，场强为零处，电势一定为零；电势为零处，场强也一定为零．你说对吗？场强为零，仅仅说明电势的变化率为零，而电势则有可能为一定值．如带电量为Q的金属导体内部各点就属于这一情况．至于电势为零，场强是否为零，则要看该处的电势变化率是否为零．如在两个带等量异号点电荷的联线中点，电势为零，但场强却不为零．

有的同学说，场强大的地方，电势一定高；电势高的地方，场强也一定大．是这样吗？不一定．场强仅与电势的变化率有关；场强大只说明电势的变化率大，但电势本身不一定很大．如图1，带电的平板电容器的B板附近的场强可以很强，但电势可以很低．同样电势高的地方，场强也不一定大．如平板电容器A板附近电势可以远高于B板附近，但A板附近的场强却并不比B板附近的大．如图2，如果电场的电力线是按这样分布，则我们还可以得到$E_A>E_B$，$U_A<U_B$的情况．

有的同学说，场强相等的各处，电势也一定相等；等势面上

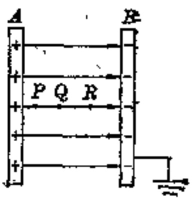


图 1

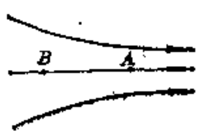


图 2

场强处处相等. 你也是这样认为的吗? 图1的平板电容器中间是一个匀强电场, 场强处处相等, 但是沿电力线方向上的各点, 例 P、Q、R 等, 电势并不相等. 等势面上场强的大小不一定相等. 如带电导体表面是等势面, 但是表面附近的场强并不处处相等, 曲率越大处, 电力线越密, 场强也越大, 见图3.

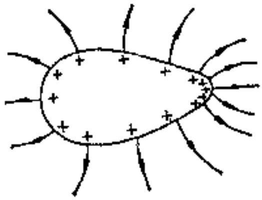


图 3

所以, 我们应该从电势对于场强方向的距离的变化率这一角度, 来认识电势差跟场强的关系, 这样才能进一步抓住问题的实质.

关于电解质的三种判别

陈福民 (上海市和平中学)

一、怎样判别电解质和非电解质

〔例1〕 金属铜、冰醋酸、硫酸钡、氧化铝、三氧化硫和氧化钙等物质, 哪些是电解质? 哪些是非电解质?

判别电解质和非电解质的依据之一, 是电解质和非电解质的定义.

定义指出, 电解质和非电解质都是化合物. 因此, 从物质的类别来看, 凡是单质——不论是金属单质还是非金属单质——都不属于讨论范围. 即例1中的金属铜既不是电解质, 也不是非电解质.

定义还指出, 化合物在溶解或熔融状态时能导电的是电解质. 这里值得注意的是两种条件之间用的是"或", 而不是"和". "或"的涵义是"两者居一", 即只要在一种条件下能导电的化合物就是电解质. 如冰醋酸(纯醋酸)在液态时不导电, 但溶于水能导电, 所以它是电解质. 又如硫酸钡、氧化铝都是难溶物质, 即使是它们的饱和溶液, 其浓度也极稀, 几乎不导电, 但它们的熔融液均能导电, 所以硫酸钡和氧化铝也是电解质.

还有一类化合物(大都是氧化物)，溶于水后会发生化学变化，生成电解质．对这一类化合物就不能根据它们的水溶液能否导电来判别，而要根据它们在熔融时能否导电来判别．如 SO_3 溶于水后生成 H_2SO_4，H_2SO_4 又电离出 H^+ 和 SO_4^{2-}，因而 SO_3 的水溶液能导电；但液态的 SO_3 不导电，所以应判断 SO_3 为非电解质．类似情况的还有 SO_2、CO_2、N_2O_5 等，都是非电解质．而 CaO 溶于水后能导电，是因为生成了 $Ca(OH)_2$，$Ca(OH)_2$ 电离出 Ca^{2+} 和 OH^- 的缘故；但 CaO 在熔融时也能导电，因而应判断它为电解质．类似情况的还有 Na_2O、BaO 等，都是电解质．

综上所述可知，判别电解质和非电解质的依据之二，是化合物的类别(或组成)．一般来说，酸、碱、盐、金属氧化物是电解质，而非金属氧化物是非电解质．

此外，判别时还要注意“电解质”和“电解质溶液”的区别．如“食盐”是电解质；“食盐溶液”则是电解质溶液(混和物)，而不是电解质(化合物)．

二、怎样判别强电解质和弱电解质

〔例2〕 氨的水合物、氢氧化钠、盐酸、醋酸等物质，哪些是强电解质？哪些是弱电解质？

判别强、弱电解质的方法之一，是用相同浓度的电解质溶液进行导电试验，导电能力强的为强电解质，导电能力弱的(除难溶性物质)，一般为弱电解质．例如，把 $0.1N$ 氨水和 $0.1N$ 氢氧化钠溶液分别倒在两只小烧杯中，进行导电实验．观察到盛 NaOH 溶液的电流表指针偏转角度大，盛氨水的指针偏转角度小，因此 NaOH 是强电解质，氨的水合物是弱电解质．

判别的方法之二，是用相同浓度的不同电解质溶液跟另一种物质反应，反应速度快的是强电解质，反应速度慢的一般为弱电解质．例如，在两支试管中分别盛有等体积的 $6N$ 盐酸和醋酸，各加入一粒同样大小的锌粒后，可观察到盛盐酸的反应速度快得多，盛醋酸的反应比较缓慢，因此盐酸是强电解质，醋酸是弱电解质．

以上两种判别方法的依据都在于：强电解质在水溶液中全部电离，自

由离子浓度大；弱电解质在水溶液中部分电离，自由离子浓度小。

通过大量实验和研究，人们发现，化合物在水溶液中电离的程度跟它们的组成与结构密切相关。因此判别的方法之三，是物质的类别（或组成）。一般来说，强酸、强碱、盐、活动金属的氧化物是强极性键或离子键的化合物，属强电解质；弱酸、弱碱是弱极性键的化合物，属弱电解质。此外，有一特殊情况：水是强极性化合物，但属于极弱的电解质。

三、怎样判别物质导电能力强弱

这一判别依赖于上述两种判别，但又不完全依赖它们。判别时还要注意以下几个方面。

1．能导电的并不都是电解质。物质导电通常有两种方式：电子导电和离子导电。金属和少数非金属（如石墨）是以电子的定向移动来导电的；化合物中属于电解质的，则以离子的定向移动以及电极反应来完成导电的。

2．电解质的导电跟它的状态有关。电解质在固态时都不导电，如硫酸铜晶体不导电。电解质在气态时一般也不导电，如 H_2S 气体不导电。电解质在液态时，是离子化合物的能导电，其余的一般都不导电，如熔融的食盐能导电，液态的纯醋酸不导电。电解质在水中，可溶的能导电，难溶的几乎不导电，如碳酸钠的水溶液能导电，碳酸钙的水溶液（极稀溶液）几乎不导电。

3．非电解质在气、液、固三态时都不导电，但有些非电解质溶于水后生成了电解质，因而也能导电，如 CO_2 溶于水后生成了碳酸而能导电。

4．电解质导电能力的强弱跟电解质的强弱是一致的，但强电解质中属于难溶性物质的，它们在水溶液中几乎不导电。如硝酸银的水溶液（极稀溶液）几乎不导电。

根据以上所述，请你对下例进行分析解答。

〔例 3〕在盛有饱和石灰水的小烧杯中安上导电装置，(1)灯泡是否亮？(2)通入 CO_2 后灯光有什么变化？(3)通入 CO_2 的量对灯光有什么影响？

解题方法谈

解题方案的设计

唐尚群　（华东师大一附中）

在解数学题时常需要通过一定的观察、分析、推理，先设计一个比较直观、简便的解题方案，然后再着手运算或证明.

数学解题方案的设计，通常是根据题中的已知条件和所求结论两者间的关系去观察，力求从数与数、数与形、形与形之间找出它们的内在联系，或由一般联想到个别，或从特殊推想到普遍. 现举数例说明.

〔例 1〕　已知：$a>b>0$, $n>1$, $n\in \mathbf{N}$, 求证 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}$.

分析　本题一般采用数学归纳法证明，但比较繁琐，我们注意到结论中不等式两边都含 n 次幂的形式，这就启发我们设计出函数 $y=x^n$. 那末，a^n、b^n、$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ 分别表示函数在点 a、b 和它们中点的函数值. 画出图象，联想到幂函数图象性质或微分中值定理，就容易证明了.

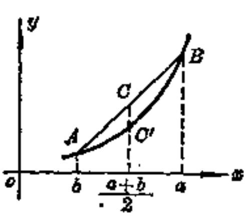


图　1

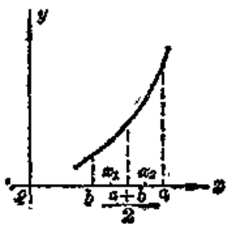


图　2

证法一　如图 1, 由幂函数性质，当 $n>1$ 时，$y=x^n$ 是下凹的增函数，如图所示有

$$\frac{1}{2}(y_A+y_B)=y_C>y_{C'},$$

即
$$\frac{a^n+b^n}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

证法二 如图 2，设 $y=x^n$，根据微分中值定理：

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n-b^n=n\cdot x_1^{n-1}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$a^n-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n=n\cdot x_2^{n-1}\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

其中
$$b<x_1<\frac{a+b}{2}<x_2<a.$$

$$\because\quad n>1,\ n\in\mathbf{N},\ x_2>x_1>0,\qquad\therefore\quad x_1^{n-1}<x_2^{n-1}.$$

于是
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n-b^n<a^n-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n,$$

即
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}.$$

〔例 2〕 已知 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{m^2}$，$m$ 为定值，则对任何满足条件的 a、b，直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 与定圆相切.

分析 直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 表示一簇直线. 而从已知条件中可知所求的定圆与直线系中的每一条都相切，因此可以在满足条件的直线系中找出特殊的几条，例如取 $a^2=b^2=2m^2$ 来确定定圆的位置，然后再证明结论的普遍性.

证明 从 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{m^2}$，可取 $a^2=b^2=2m^2$，即 $a=\pm\sqrt{2}\,m$，$b=\pm\sqrt{2}\,m$. 满足这个条件的直线有四条：$x\pm y=\pm\sqrt{2}\,m$. 在直角坐标系中画出这四条直线，不难看出圆 $x^2+y^2=m^2$ 就是所求的定圆(如图 3). 这是因为圆心 $(0, 0)$ 与直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 的距离

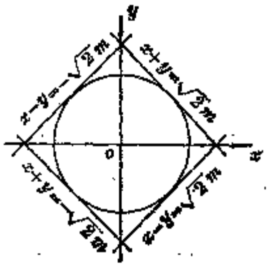


图 3

$$d=\frac{\left|\dfrac{0}{a}+\dfrac{0}{b}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}}}=|m|.$$

故直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 与定圆 $x^2+y^2=m^2$ 相切.

〔例 3〕 求函数 $y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$ 的最小值，其中 a、b、c

均为正数，$x\in \mathbf{R}$.

分析 这是求无理函数的最小值问题，观察函数解析式，它的每一个根式都可理解为直角坐标系中两点的距离，只要如图 4 选三个点 $A(0,\ a)$，$B(c,\ -b)$，$P(x,\ 0)$，就可将原来求函数的最小值问题，转化为当动点 P 在 x 轴上滑动时，求 $|PA|+|PB|$ 的最小值.

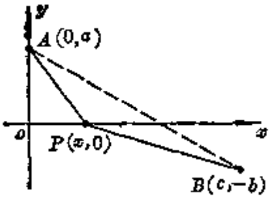


图 4

解 设直角坐标系 xoy，并设点 $A(0,\ a)$，$B(c,\ -b)$，$P(x,\ 0)$。连结 AP、BP。

$$\because\quad |AP|+|BP|=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2},$$

$\therefore$ $|AP|+|PB|=|AB|$ 时，$|AP|+|PB|$ 的值最小. 故当 $K_{AP}=K_{PB}$ 时，即 $\frac{a}{-x}=\frac{b}{x-c}$，就是 $x=\frac{ac}{a+b}$ 时，$y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$有最小值.

$$y_{\min}=\sqrt{c^2+(a+b)^2}.$$

〔例 4〕 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为钝角，AB 边上的高为 h. 求证：$AB>2h$.

分析 直角三角形斜边上的高小于或等于斜边的一半，这是一个熟知的结论，于是只要把已知的钝角三角形转化为直角三角形，解题途径就找到了.

证明 在钝角三角形 ABC 中，作 AB 边上的高 CD. 因为 $\angle BCA$ 是钝角，所以过 B 作 AC 的垂线交 AC 的延长线于 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F（如图 5）.

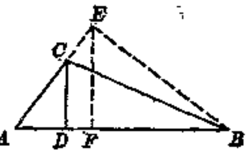


图 5

$$\because\ AE>AC,\ \therefore\ EF>CD.$$

而 $$EF=AE\cdot\sin A=AB\cos A\cdot\sin A=\frac{1}{2}AB\sin 2A\leqslant\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore\quad AB\geqslant 2EF>2CD,\quad 即\quad AB>2h.$$

当然上述几个例题中，还有其他解法，但是在解题方案中，有一点是共同的，那就是要有利于启发自己运用已掌握的基础知识、基本技能；认真地观察、分析条件和结论之间的关系；凡有条件将数与形结合的问题，尽可能地把数与形结合起来分析，使之更直观.

复数在解析几何中应用举例

郑兆龙 （安徽省灵璧县渔沟中学）

我们知道，直角坐标平面内的点与一对有序实数 $(a,\ b)$ 是一一对应的．复平面上点与复数$(a+bi)$之间也是一一对应的．事实上，直角坐标平面和复平面是两种不同的解释平面的方法，这就给复数在解析几何中应用奠定了基础．

〔例 1〕 已知正方形一个顶点为 $A(-a,\ 0)$，它的中心为 $E(0,\ b)$，求其他各顶点的坐标（其中 $a>0,\ b>0$）．

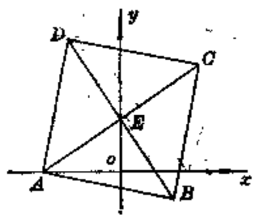


图 1

解 在复平面上考虑．A、E 分别对应复数 $-a$、bi．即 $\overrightarrow{OA}=-a$, $\overrightarrow{OE}=bi$, $\therefore \overrightarrow{EA}=-a-bi$.

设点 $B(x,\ y)$，则 $\overrightarrow{OB}=x+yi$.

$\therefore\quad \overrightarrow{EB}=x+(y-b)i$.

$\overrightarrow{EA}$ 绕点 E 按逆时针旋转 $90°$ 得 $\overrightarrow{EB}$.

由复数乘法几何意义知 $(-a-bi)\cdot i=x+(y-b)i$．利用复数相等条件，得

$$x=b,\ y=b-a.$$

所以，B 点坐标为$(b,\ b-a)$．

同理，可求得 $C(a,\ 2b)$、$D(-b,\ a+b)$．

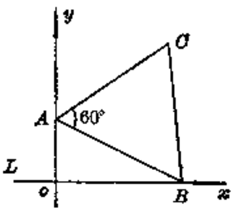


图 2

〔例 2〕 已知定点 A 与定直线 L．在 L 上取一点 B，连结 AB，以 AB 为一边作正三角形 ABC（顶点 A、B、C 的顺序按逆时针方向排列）．求当 B 沿直线 L 移动时，点 C 的轨迹．

解 取 L 为 x 轴，定点 A 在 L 上的射影为原点 O，建立坐标系（如图 2）．

设 A、B、C 三点对应的复数分别为 ai、b、$x+yi$，则

$$\overrightarrow{AB}=b-ai,\quad \overrightarrow{AC}=x+(y-a)i.$$

因为 $\overrightarrow{AB}$ 按逆时针方向旋转 $60°$ 得 $\overrightarrow{AC}$，所以