水利类专业試用教材

工程力学与工程結构

中册

水利電力學院

目　　录

第七章　　结构变位与力法原理

第一节　　结构变位

一　什么是结构变位？

工程结构在荷载作用、温度变化以及支座沉陷等情况下，结构的形状会发生改变（变形），结构上有的点和有的截面会发生变位。例如图7—1，a所示悬臂梁，在集中荷载 P 的作用下将产生弯曲变形，端点 B 移动到 B' 的位置，B 到 B' 的直线距离 Δ 叫做 B 点的"线变位"，因为是竖向的变位，所以又叫做"竖向线变位"。B点处的横截面在梁变形后转动了一个角度 θ，叫做截面 B 的"角变位"。又如图 7—1，b 所示悬臂梁，由于温度升高 $t°c$ 而使其伸长时，端点 B 沿水平方向移动了 Δl 的距离，这叫做 B 点的"水平线变位"。又如图 7—1，c所示一端固定一端是活动铰支座的梁，当支座 B 发生了支座

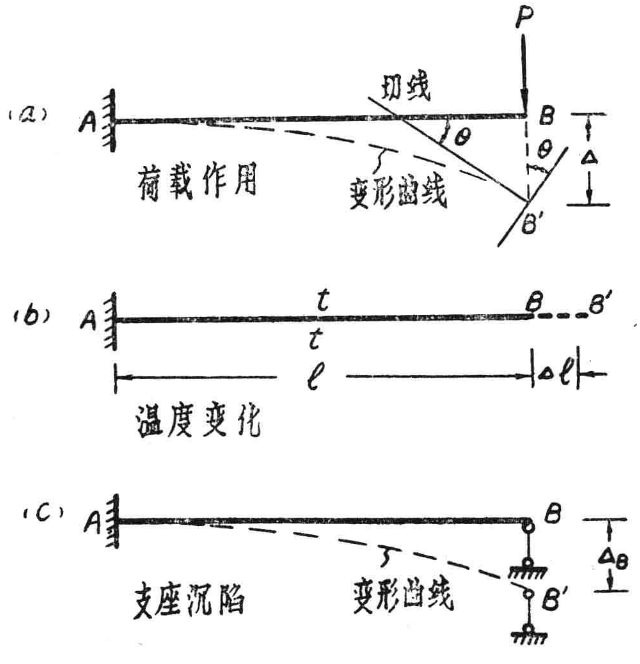


图　7—1

沉陷 Δ_B 时梁将产生变形和变位。总起来说，使结构产生变位的原因尽管不同，但结构变位不外乎"线变位"与"角变位"两种。

二　为什么要研究结构变位？

毛主席说：**“人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面。”**

在前面的有关章节中，我们对于静定结构的强度问题进行了研究。任何结构都必须首先考虑强度问题，以保证结构在荷载作用下不破坏。但在许多实际工程结构中，只考虑到结构的强度问题还是不够的，因为有些结构虽然强度够了，但变形过大也不能满足使用的要求；也就是说，在设计工程结构的时候，除了首先应该考虑强度问题外，还应限制结构的变形范围，这叫做结构的刚度问题。如控制水流的闸门，在水压力的作用下，如果刚度不够就会产生过大变形而漏水；又如水电站厂房中的吊车梁，如果刚度不够就会因变形过大而影响正常运转。

在结构设计中，必须限制结构的最大变位在允许范围以内，即：

$$\Delta \leqslant [\Delta]$$

上式就是限制结构变位的刚度条件。Δ—结构的最大变位（线变位或角变位）；〔Δ〕—结构在保证正常工作的情况下允许产生的变位，可以查有关的设计规范。

对于梁来说，垂直于梁轴线方向的最大线变位一般叫做“挠度”，用 f 表示。因此，对于梁的刚度条件可以写成：

$$f \leqslant [f]$$

对于吊车梁，根据吊车起重的大小不同，允许最大挠度 $[f] \leqslant \frac{l}{500} \sim \frac{l}{750}$，其中 l 是吊车梁的跨度。对于钢闸门的主梁，允许最大挠度 $[f] \leqslant \frac{l}{600}$；次梁允许最大挠度 $[f] \leqslant \frac{l}{200} \sim \frac{l}{250}$。

我们研究结构变位的目的，除以上所说的校核结构的刚度以外，再就是为今后计算“超静定结构”作必要的知识准备。关于什么是超静定结构？为什么超静定结构的计算要以结构变位计算为基础？以及如何计算结构变位？等等，都是本章所要讲的问题。

总起来说，研究结构变位计算的目的有二：一是校核结构的刚度；二是为超静定结构的计算服务。

三　研究结构变位的方法是什么？

毛主席说：**“我们不但要提出任务，而且要解决完成任务的方法问题。”**现在我们的任务是求结构变位，所采用的方法是在生产实践活动中发现的当前最常用的虚功原理法（或叫虚位移原理法）。在本章将通过对虚功原理的研究建立起计算结构变位的一般公式，然后再将一般公式具体地运用到各种常见情况下的变位计算中去。下面首先讲功及虚功的概念。

第二节　　功的概念

毛主席说：**社会实践的继续，使人们在实践中引起感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变(即飞跃)，产生了概念。”**功的概念同样是来源于生产实践活动。例如，把一个重量为60公斤的物体提升4米（图7—2，a）和把一个重量为30公斤的物体提升10米（图7—2，b），两种情况是不同的。第一种情况物体重量大，但提升路程小；第二种情况物体重量小，但提升路程大。这里，就存在一个计量物体位置变化的问题，就是说存在一个用什么样的物理量，才能把提升物体所需要的力和提升的路程综合地计量出来。由此，在实践活动中引进了一个新的物理量，这就是力和变位(路程)的乘积，我们把它叫做“功”，用T表示。即

〔力做的功〕=〔力〕×〔物体沿着该力作用方向产生的变位〕。

对于第一种情况(图7—2，a)，力所做的功 $T_1 = 60$公斤×4米=240公斤—米；对于第二种情况（图7—2，b），力所做的功 $T_2 = 30$公斤×10米=300公斤—米。就是说第二种情况力所做的功比第一种情况力所做的功大。

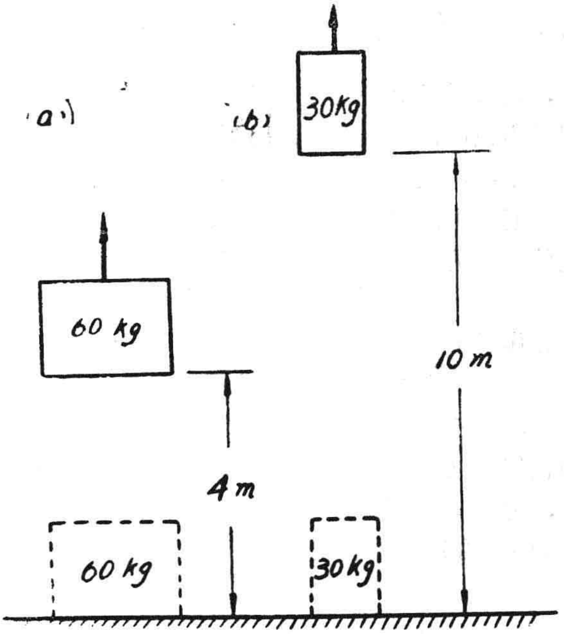


图　7—2

在实践活动中，劳动人民创造许多省力的办法来搬运很重的物体。例如，搬运一个比较重的物体越过一个陡坎，陡坎高h，物体重G（图7—3）如果直接提上去，就需要用大小等于G的力，但是，为了省力，我们就搭上一个斜跳，将重物沿斜面拉上陡坎。设斜面长S，则沿斜面拉重物所用的力P就等于重力G沿斜面的分力G_2：

$$G_2 = G\sin\alpha,$$

因　　$$\sin\alpha = \frac{h}{s},$$

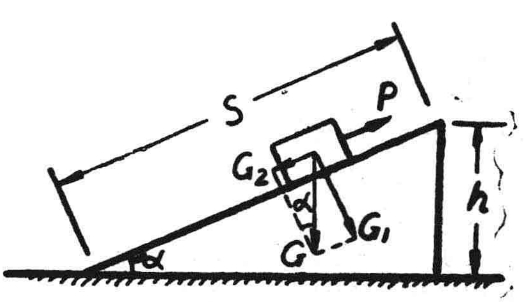


图　7—3

所以 $$G_2 = G\,\frac{h}{s}$$

由 $$P = G_2 = G\frac{h}{s} \quad \text{（忽略摩擦力的影响）}$$

可以看出，沿斜面拉重物的力 P 比直接提升所需的力小。但是，在直接将重物提升高度 h 和沿斜面使重物上升高度 h 这两种不同的过程中，所需的力与重物所经过的路程的乘积，也就是功却是相等的。在第一种过程中，所需的力为 G，路程为 h，二者的乘积为 $T = G\times h$；在第二种过程中，所需的力为 $P = G\frac{h}{s}$，路程为 s，两者的乘积为 $T = P\times s = G\frac{h}{s}\times s = Gh$。这个实例说明，不管重物经过怎样的路程，只要上升的高度相等，或者说只要在竖直方向的变位相等，提升力所作的功就相等（忽略摩擦力的影响）。同时也说明，物体在力作用下产生运动（包括变形）的时候，功是和物体的位置变化有关的一个物理量，正是基于这种认识，我们可以依据功来研究结构的变位。

通过上面的分析已经知道，在数值上，功等于做功的力与物体沿着该力作用方向所产生的变位的乘积，如上述沿斜面拉重物时：

$$T = P\times S$$

又如作用于扳手套杆上一个力偶，他的矩为M，使套杆产生一角变位 θ（图 7—4），则力偶矩做的功为： $T = M\theta$

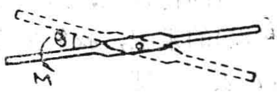


图 7—4

功有正功和负功，如果力的方向与变位的方向相同，则功为正值；反之，则为负值。如图 7—3 中的重物，沿斜面上升时，力 P 的方向与变位的方向相同，它所作的功为正功；而重力 G 的分力 G_2 的方向与变位的方向相反，它所作的功为负功，表示为：

$$T = -G_2\times S。$$

在工程中，功的单位以公斤—米或吨—米表示。

上面我们讨论了力在该力产生的变位上做的功。在实践中还有一种情况，就是做功的力和产生变位的原因并不是一回事。例如，升降梯（电梯）在升降物体的过程中（图 7—5），当升降梯上升一个路程 h' 时，物体的重量 P 在路程 h' 上所做的功是 $T' = -Ph'$（负号是因为力 P的方向和路程 h' 的方向相反）；当升降梯下降一个路程 h'' 时，力P在路程 h'' 上所做的功是： $T'' = Ph''$。在这里，路程（或叫变位）h' 和 h'' 是由升降梯的钢丝绳拉动而产生的，而力 P 是在钢丝绳拉动所产生的路程 h' 和 h'' 上做功。换句话说，在这里做功的力 P 是物体的重量，路程h' 和 h'' 的产生是与做功的力 P 毫无关系的，是由其他原因(钢丝绳的拉动)产生的。为了区别于上面所讲过的力在该力所产生的变位上做的功，把这种力在不是本身因素所产生的变位（叫做“虚变位”）上做的功叫做“虚功”。这里“虚”字的意思是指变位是由任

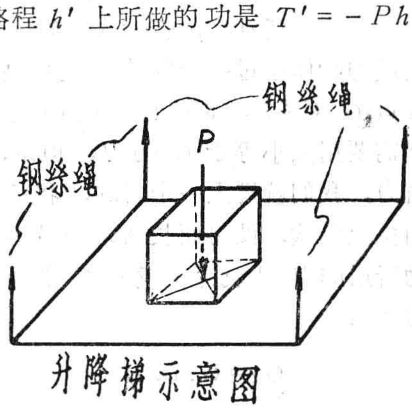


图 7—5

何其他原因所产生的而与做功的力毫无关系。

又如一个受压杆件（图 7 — 6，a）。由于温度升高 20°C（相对于原来的温度）杆件伸长了一个 ΔL，如图 7 — 6，b 所示，则力 P 将在变位 ΔL 上做虚功：$T=-P\times\Delta L$（负号是因为力 P 的方向和变位 ΔL 的方向相反）。当温度降低 20°C（相对于原来的温度）时，如图 7 — 6，c 所示，则虚功为 $T''=P\times\Delta L$。

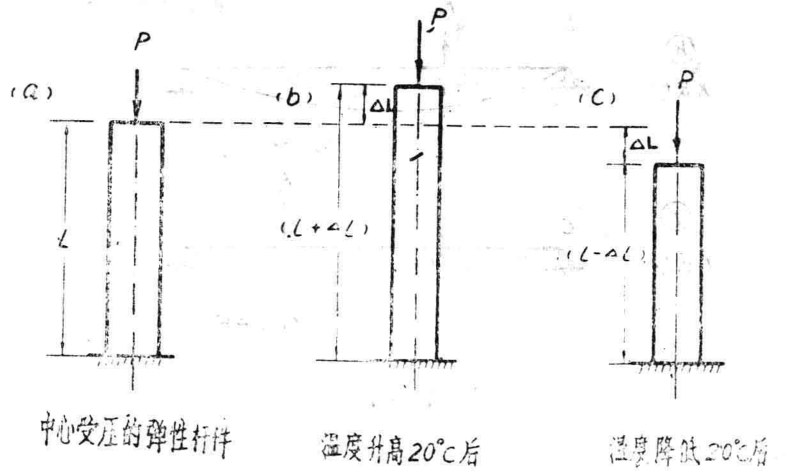


图 7 — 6

第三节　弹性结构的虚功原理及变位的一般公式

在第二节讨论了功及虚功的概念。在本节将首先讨论弹性结构的虚功原理，然后导出求结构变位的一般公式。

如图 7 — 7，a 所示弹性结构，由于外力 P_k 的作用使结构变形到位置〔Ⅰ〕，这时结构上的外力与内力处于静力平衡状态。如果结构受到任何其他原因 i（如外力 P_i）的作用就会使结构再继续变形到位置〔Ⅱ〕。

由位置〔Ⅰ〕变形到位置〔Ⅱ〕的时候，在力 P_k 的作用线上产生了新的变位 Δ_{ki}，就是所谓“虚变位”。Δ_{ki} 中脚标 K 表示变位的地点及方向；脚标 i 表示产生变位的原因。这里的“虚”字的意思是指 P_k 方向的变位 Δ_{ki} 是其他原因(P_i)引起的而与力 P_k 无关。由于在力 P_k 的作用线上产生了虚变位 Δ_{ki}，所以力 P_k 要在虚变位 Δ_{ki} 上做虚功：

$$T_{ki}=P_k\,\Delta_{ki}\text{。}\qquad (a)$$

T_{ki} 中，脚标 K 表示做功的力是 P_k；脚标 i 表示产生变位的原因是 P_i，变位与力同向时为正；反向为负。这样结构上的外力在不是本身因素产生的变位（虚变位）上做的功，

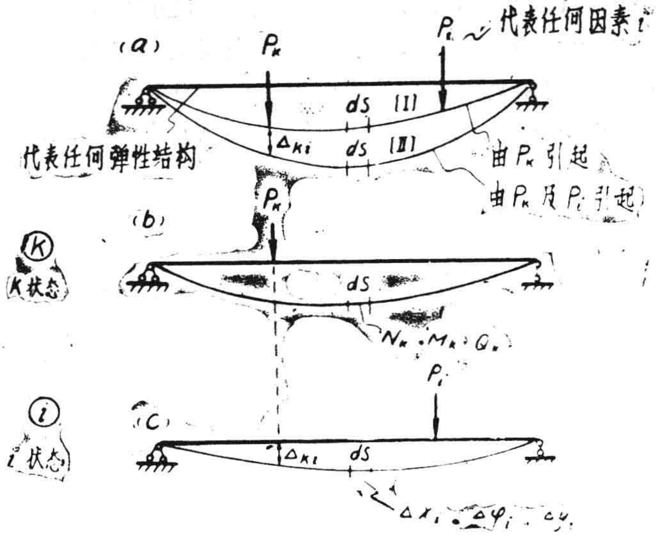


图 7—7

叫做外力虚功。

在小变位的情况下，力与变位成线性关系，式(a)中 Δ_{ki} 只与因素 P_i 有关而与力 P_k 无关，为了清楚起见，把图 7—7，a 所示情形分成如图 7—7，b 及 c 所示的两种状态：K 状态与 i 状态，今后在阐述许多问题时，都将这样处理。

对于弹性结构，当产生虚变位时，不但结构上的外力做功，而且由于结构本身产生变形，结构中的内力也做功。这种结构的内力在不是本身因素产生的变形上做的功，叫做内力虚功。具体讲，结构在力 P_k 作用下，其任一微分段 ds 中将产生三种内力：N_k、M_k 及 Q_k（图 7—8，a），但是当该微分段 ds 从结构中切出来以后，原来的内力就转化为如图 7—8，a 所示的外力。此外，在结构从位置〔Ⅰ〕到〔Ⅱ〕的过程中，在结构的同一微分段 ds 中将产生三种变位：Δx_i $\Delta\varphi_i$ 及 Δy_i（图 7—8，b），若将该微分段取出放大，这三种变位如图 7—8，b 所示。它们对 N_k、M_k 及 Q_k 来讲都是"虚变位"。在这些新的变位形成过程中，三种内力：N_k、M_k 及 Q_k 将分别在相应的三种变位：Δx_i、$\Delta\varphi_i$ 及 Δy_i 上做功。因此，可将图 8—7，a 和 b 分为图 7—8，c、d 及 e 所示三种情况分别考虑，然后相加。

图 7—8 中用实线表示的 N_k、M_k 及 Q_k 是微分段 ds 的外力；用虚线表示的 N_k、M_k 及 Q_k 是微分段 ds 的内力，它们是大小相等方向相反的，所以该微分段 ds 上外力虚功 dT_{ki} 与内力虚功 dV_{ki} 分别为：

$$dT_{ki} = N_k\Delta x_i + M_k\Delta\varphi_i + Q_k\Delta y_i;$$

$$dV_{ki} = -(N_k\Delta x_i + M_k\Delta\varphi_i + Q_k\Delta y_i)。$$

不难看出： $dT_{ki} = -dV_{ki}$，

$$dT_{ki} + dV_{ki} = 0。$$

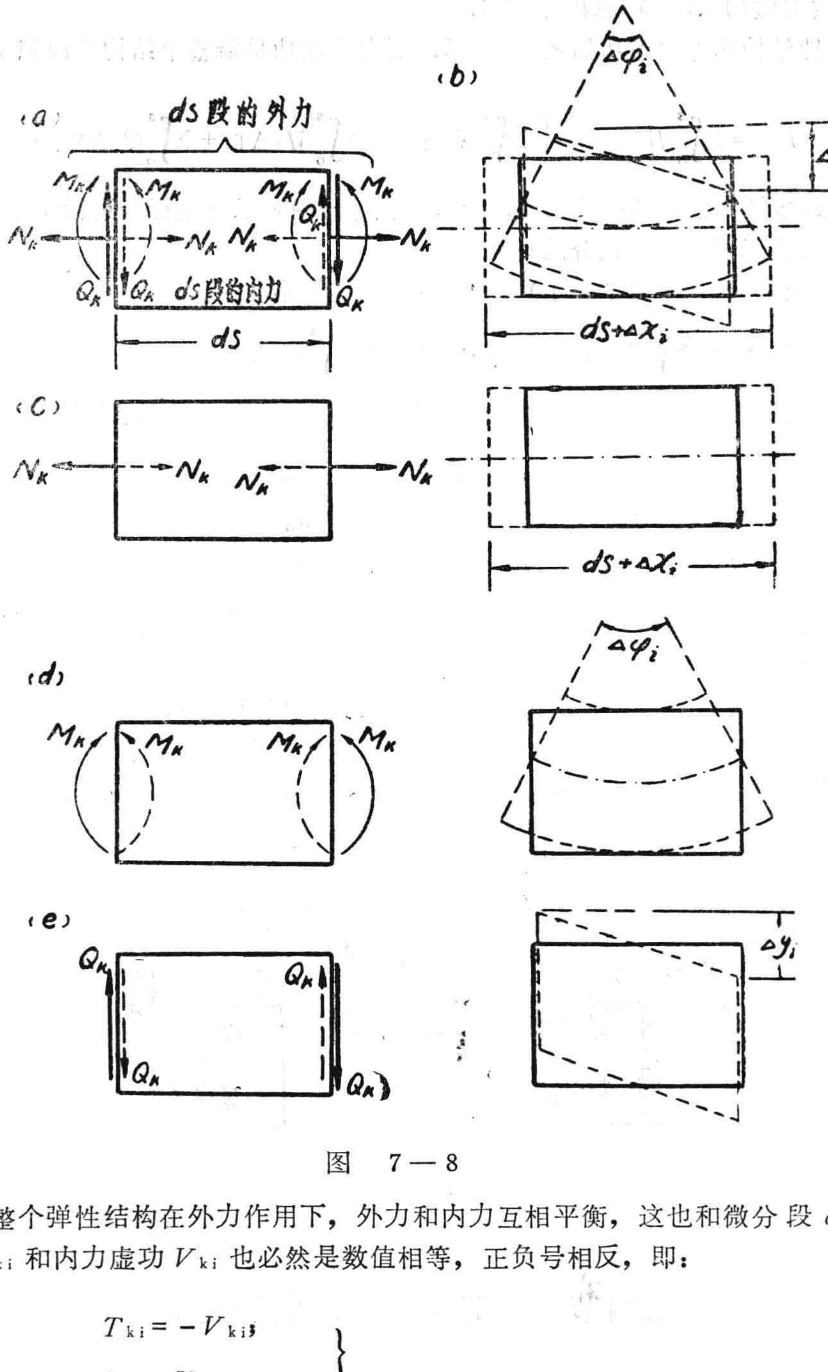


图 7—8

对于整个弹性结构在外力作用下，外力和内力互相平衡，这也和微分段 ds 相同，外力虚功 T_{ki} 和内力虚功 V_{ki} 也必然是数值相等，正负号相反，即：

$$\left.\begin{aligned} &T_{ki} = -V_{ki}; \\ \text{或}\quad &T_{ki} + V_{ki} = 0。\end{aligned}\right\} \qquad (7-1)$$

式（7—1）所表明的就是弹性结构的虚功原理：在外力作用下处于静力平衡状态的**弹性结构，发生任意虚变位时，外力虚功**（T_{ki}）**等于内力虚功**（V_{ki}），**但正负号相反。**或

者表述为：在外力作用下处于静力平衡状态的弹性结构，发生任意虚变位时，外力虚功（T_{ki}）与内力虚功（V_{ki}）总和等于零。

整个弹性结构的外力虚功如式(a)所示，而内力虚功是沿整个结构分段积分的总和，即：

$$V_{ki}=\Sigma\int_0^s dV_{ki}=-\left[\Sigma\int_0^s N_k\Delta x_i+\Sigma\int_0^s M_k\Delta\varphi_i+\Sigma\int_0^s Q_k\Delta y_i\right] \qquad (b)$$

对由于许多杆件组成的结构来说，上式中积分号内表示对某杆段进行积分，S 表示杆段的长度，Σ 表示所有杆段积分的总和。

将式(a)及(b)代入式（7—1）$T_{ki}=-V_{ki}$，得到：

$$P_k\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s N_k\Delta x_i+\Sigma\int_0^s M_k\Delta\varphi_i+\Sigma\int_0^s Q_k\Delta y_i \qquad (c)$$

不难发现如果 P_k 是单位力即 $P_k=1$，则由式（c）就可以得到求结构变位的一般公式：

$$\underbrace{\Delta_{ki}}_{T_{ki}=1\times\Delta_{ki}}=\underbrace{\Sigma\int_0^s \overline{N}_k\Delta x_i+\Sigma\int_0^s \overline{M}_k\Delta\varphi_i+\Sigma\int_0^s \overline{Q}_k\Delta y_i}_{〔-V_{ki}(P_k=1\text{ 作用下})〕} \qquad (7—2)$$

实际上，（式 7—2）的等号左边就是单位力 $P_k=1$ 做的外力虚功 T_{ki}；等号右边就是单位力 $P_k=1$ 产生的内力 $\overline{N}_k\cdot\overline{M}_k$ 及 $\overline{Q}_k$ 做的内力虚位 V_{ki}。

怎样运用（式 7—2）来求结构上的变位呢？我们以图 7—9，a 所示结构为例进行说明。如果要求 A 点的竖向线变位 Δ_{ki}，就在 A 点沿竖向虚设一个单位力 $P_k=1$ 如图 7—9，b 所示，因此 K 状态的是虚设的，叫虚设状态，i 状态是实际情况，叫做实际状态。然后设法求出 i 状态下的 Δx_i、$\Delta\varphi_i$、Δy_i 和 K 状态下的 $\overline{N}_k$、$\overline{M}_k$、$\overline{Q}_k$ 代入式（7—2）即可求出 Δ_{ki}。应指出：这里虚设一个单位力 $P_k=1$，只是完成求结构变位的一个手段。以后各节将讨论式（7—2）在各种具体情况的应用。

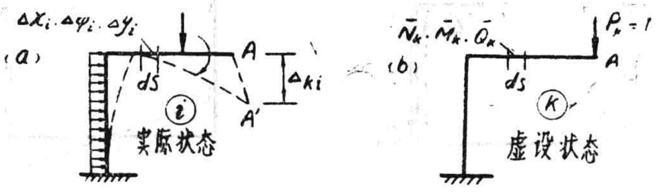


图 7—9

第四节　荷载作用产生的变位

在第三节已经得到结构变位的一般公式（7—2）为：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s \overline{N}_k\Delta x_i+\Sigma\int_0^s \overline{M}_k\Delta\varphi_i+\Sigma\int_0^s \overline{Q}_k\Delta y_i\text{。}$$

这个公式是个一般性的公式，可以用它求任何形式的杆件结构，由于任何原因所产生的，任何点沿任何方向的线变位或角变位。式中 $\overline{N}_k$、$\overline{M}_k$ 及 $\overline{Q}_k$ 是结构在虚设的单位力 $P_k=1$ 作用下，所产生的内力（如图7—9，b 所示的情形）；Δx_i、$\Delta\varphi_i$ 及 Δy_i 是结构在实际情况下产生的变位。实际情况是多种多样的，例如荷载作用、温度变化、支座沉陷以及它们的组合情况等等。在本节里专门讨论结构在荷载作用下（如图7—9，a 所示情形）的变位计算。

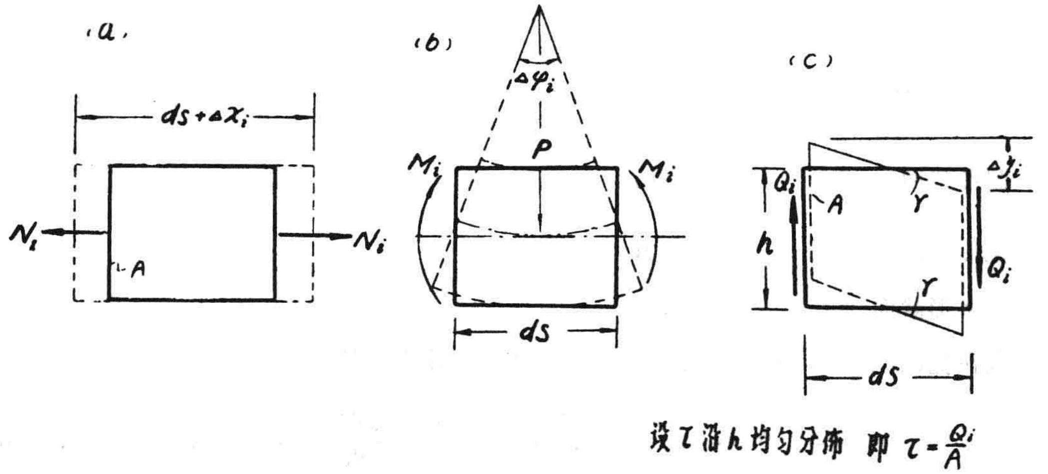
一　结构在荷载作用下的变位公式推导

1．轴向力 N_i 产生的变位 Δx_i

如图7—10，a 所示，微分段 ds 在轴向力 N_i 的作用下，产生了轴向变位 Δx_i，这和在第二章第二节所讨论过的钢筋受拉情形相同，为：

$$\Delta x_i=\frac{N_i ds}{EA}, \qquad (a)$$

式中 A——杆件的横截面积；E——杆件材料的弹性模量；EA——表示杆件抵抗拉伸（或压缩）变形的能力，叫做抗拉（压）刚度。



设τ沿h均匀分佈 即 $\tau=\frac{Q_i}{A}$

图　7—10

2．弯矩 M_i 产生的变位 $\Delta\varphi_i$

如图7—10，b 所示，微分段 ds 在弯矩 M_i 作用下，两端截面相互转动一个角度，即弯曲变位 $\Delta\varphi_i$。参照第五章第五节均质梁的正应力强度计算部分以及图7—10，b，可以求出弯曲变形 $\Delta\varphi_i$。已知：$\frac{1}{\rho}=\frac{M_i}{EJ}$；$\rho\Delta\varphi_i=ds$，即 $\Delta\varphi_i=\frac{1}{\rho}ds$。所以：

$$\Delta\varphi_i=\frac{M_i ds}{EJ}, \qquad (b)$$

式中 E——杆件材料的弹性模量；J——杆件截面 A 对中性轴的惯性矩；EJ——表示杆件抵抗弯曲变形的能力，叫做抗弯刚度。

3．剪力 Q 产生的变位 Δy_i

如图 7—10，c 所示，微分段 ds 在剪力 Q_i 的作用下，产生了剪切变位 Δy_i。由图 7—10，c 所示可知：$\Delta y_i=\gamma ds$，其中 γ 叫做剪应变。剪应变 γ 与剪应力 τ 的关系与在第二章第二节中讨论过的拉伸（或压缩）应变 ε 与正应力 σ 成正比的关系（$\sigma=E\varepsilon$）类似，可以写成：$\tau=G\gamma$ 或 $\gamma=\frac{\tau}{G}$，这叫做“剪切正比定律”，其中 G 叫做抗剪弹性模量，与弹性模量 E 一样可以从试验中求得。如果剪应力沿截面高度 h 均匀分布（如图 7—10 c 所示）即 $\tau=\frac{Q_i}{A}$，则剪应变 γ 在整个截面高度 h 上是个常数：$\gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{Q}{GA}$。实际上，由第五章第六节均质梁的剪应力强度计算部分已知：剪应力 $\tau=\frac{Q_iS}{Jb}$，即沿截面高度 h 不是均匀分布，这说明剪应变 γ 并不是一个常数。因此，如果按剪应力均匀分布，即按 $\tau=\frac{Q_i}{A}$ 来计算，就必须在 γ 的式子中加上一个反映剪应力 τ 分布不均匀性的修正系数 μ，即：$\gamma=\mu\frac{Q_i}{GA}$，代入 $\Delta y_i=\gamma ds$ 中，得：

$$\Delta y_i=\mu\frac{Q_i ds}{GA} \tag{c}$$

μ 值只决定于杆件截面的形状。根据按 $\tau=\frac{Q_i ds}{Jb}$ 实际情况计算的结果得出：

圆形截面 $\mu=\frac{32}{27}$；

矩形截面 $\mu=1.2$；

工字形截面 $\mu\approx1$。

现在把(a)、(b)及(c)代入（7—2）中，求得荷载变位公式：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s \overline{N}_k N_i\frac{ds}{EA}+\Sigma\int_0^s \overline{M}_k M_i\frac{ds}{EJ}+\Sigma\int_0^s \mu\overline{Q}_k Q_i\frac{ds}{GA} \tag{7-3}$$

式（7—3）就是通常所说的变位公式，也叫做莫尔公式，其具体应用方法在下面讨论。

在实际工程中，计算结构变位时并不一定都取公式（7—3）右边的三项，而是根据具体情况也可能只取其中的一项或两项。

对于梁及刚架这类以受弯为主的杆件，由计算结果比较表明通常只取弯矩一项就能满足工程设计要求，即：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s \overline{M}_k M_i\frac{ds}{EJ} \tag{7—4}$$

对于桁架，因为每根杆子只产生轴向力，所以变位公式为：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s \overline{N}_k N_i \frac{ds}{EA}$$

又因为桁架中每根杆子的轴向力 N 是一个常数，同时每根杆子的 EA 也是一个 常 数，所以变位公式也可以写成：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\frac{\overline{N}_k N_i}{EA}\int_0^s ds=\Sigma\frac{\overline{N}_k N_i l}{EA}, \qquad (7-5)$$

式中 l——杆件长度。

二　求变位的虚设状态

下面讨论一下为了计算结构变位如何建立虚设状态的问题。总的一个原则是：加在结构上的单位力必须与所求变位的性质相适应。如果要求结构上某一点沿某一方向的线变位 Δ_{ki}，就应该在这一个点沿这一个方向加上一个单位力 $P_k=1$，如图 7—11，a 所示。如要求结构上某一个截面的角变位 Δ_{ki}，就应在这个截面上加上一个能够在这个角变位 Δ_{ki} 上做

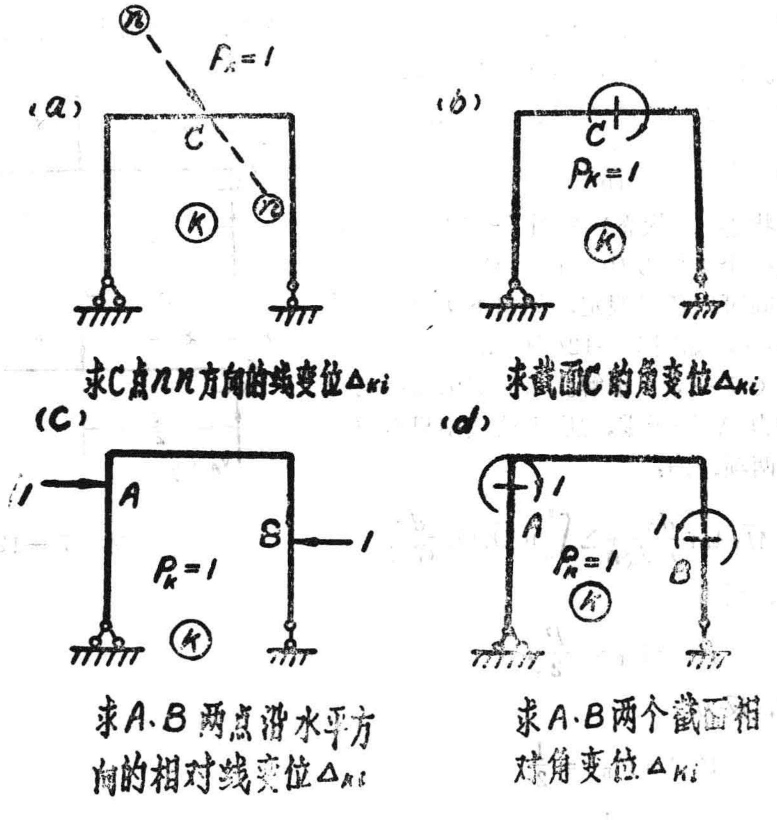


图　7—11

功的单位力矩 $P_k=1$，如图 7—11,b所示。如果要求结构上某两个点沿某一方向的相对线变位（两个点沿某一方向相互靠近或相互分开的距离），就应在这两个点沿求变位的方向加上一对方向相反的单位力 $P_k=1$，如图 7—11,c 所示（由变位公式的推导可知，只有加上一对方向相反的单位力 $P_k=1$，才能在这个相对线变位 Δ_{ki} 上做功，才能求出相对线变位 Δ_{ki}）。如果要求结构上某两个截面的相对角变位 Δ_{ki}（两个截面的相互转动的角度），就应在这两个截面上加上一对方向相反的单位力矩 $P_k=1$，如图 7—11,d 所示（因为只有加上一对方向相反的单位力矩 $P_k=1$，才能在这个相对角度变位 Δ_{ki} 上做功，才能求出相对角变位 Δ_{ki}）。

关于所设单位力的指向在建立虚设状态时是可以任意假设的，实际变位的指向如何，可以根据最后计算结果确定，如果结果为正值说明单位力的指向就是实际变位的指向；如果为负值，则说明相反（因为变位式中等号左边 Δ_{ki} 实际上就是 $T_{ki}=1\times\Delta_{ki}$，计算结果为正就说明做功的力 P_k 与变位 Δ_{ki} 的方向相同；计算结果为负，则说明做功的力 $P_k=1$ 与变位 Δ_{ki} 的方向相反）。

三　用积分法计算变位

由公式（7—3）或（7—4）积分求变位叫做积分法，具体计算方法见以下各例题。

【例题 7—1】 求图 7—12,a 所示简支梁中点的挠度，并求剪力和弯矩对于梁挠度值影响的比值。已知条件为：梁是矩形截面，宽为 b、高为 h；$\mu=1.2$、弹性模量 E；抗剪弹性模量 $G=0.4E$；梁高 $h=\frac{l}{10}$。

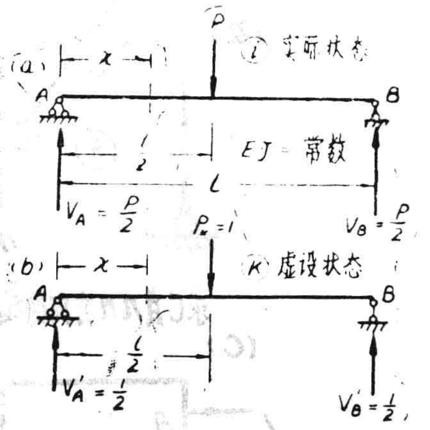


图　7—12

解　实际状态（i状态）如图 7—12,a所示。在梁中点加上一个单位力$P_k=1$（与所求变位方向一致，但指向可以任意假定，如向下）作为虚设状态（K 状态），如图 7—12b 所示。

应用公式（7—3）求解。该简支梁在竖向荷载作用下轴向力 N 等于零，所以公式中只有弯矩 M 和剪力 Q 两项，即：

$$\Delta_{ki}=\Sigma\int_0^s \overline{M}_k M_i \frac{ds}{EJ}+\Sigma\int_0^s \mu\,\overline{Q}_k Q_i \frac{ds}{GA}$$

在实际状态下，反力

$$V_A=V_B=\frac{P}{2};$$

在虚设状态下，反力

$$V_A'=V_B'=\frac{1}{2}$$

$0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}$ 时，

$$M_i = \frac{1}{2} P x \qquad \overline{M}_k = \frac{1}{2} x$$

$$Q_i = \frac{P}{2} \qquad \overline{Q}_k = \frac{1}{2}$$

设 $\Delta^M_{ki} = \Sigma\int_o^S \overline{M}_k M_i \frac{ds}{EJ}$——单独由弯矩产生的挠度

$\Delta^Q_{ki} = \Sigma\int_o^S \mu \overline{Q}_k Q_i \frac{ds}{EA}$——单独由剪力产生的挠度

将各弯矩值及剪力值代入上式，由于积分在梁的左半段和右半段是相同的，只需要在梁的左半段积分并乘2，因此，求得：

$$\Delta^M_{ki} = 2\int_o^{\frac{l}{2}} \frac{x}{2} \cdot \frac{Px}{2} \cdot \frac{ds}{EJ} = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

$$\Delta^Q_{ki} = 2\int_o^{\frac{l}{2}} \mu \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \frac{ds}{GA} = \frac{\mu Pl}{4GA}$$

所以梁中点的挠度值为：

$$\Delta_{ki} = \Delta^M_{ki} + \Delta^Q_{ki} = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{\mu Pl}{4GA}$$

剪力和弯矩所产生的挠度比值为：

$$\frac{\Delta^Q_{ki}}{\Delta^M_{ki}} = \frac{\mu Pl}{4GA} \Big/ \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{12\mu EJ}{l^2 GA}$$

已知：

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{b\left(\frac{l}{10}\right)^3}{12} = \frac{bl^3}{12000}$$

$$A = bh = \frac{bl}{10}$$

$$G = 0.4E$$

$$\mu = 1.20$$

所以

$$\frac{\Delta^Q_{ki}}{\Delta^M_{ki}} = \frac{12 \times 1.2 \times E \times \frac{bl^3}{12000}}{l^2 \times 0.4E \times \frac{bl}{10}} = \frac{3}{100}$$

这就是说，由于剪力产生的挠度只相当于弯矩产生的挠度的3%，与 Δ^M_{ki} 比较，Δ^Q_{ki} 的数值是很小的，因此可以忽略不计。梁的高度越小剪力对于挠度的影响越小，当 $h = \frac{l}{20}$

时，由于剪力产生的挠度值只相当于由于弯矩产生的挠度的$\frac{3}{400}$。由此可见，对于梁及刚架等以弯曲变形为主的结构，当计算变位时，剪力的影响是可以忽略不计的，即应用公式（7—4）来计算。

【例题7—2】 图7—13，a 所示简支梁 AB 受均布荷载 q 作用，跨度为 l，材料的弹性模量为 E，截面惯性矩为 J，试计算梁中点 C 的挠度 f_c。

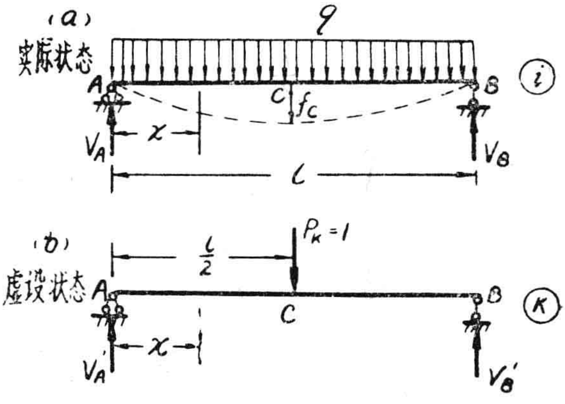


图 7—13

解：实际状态（i 状态）如图7—13，a 所示，对于这一状态的反力为：

$$V_A = V_B = \frac{ql}{2}\text{，弯矩方程式为：}$$

$$M_i = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

在 C 点虚设一个单位力 $P_K = 1$ 作为虚设状态（K状态），对于这一状态，反力为：

$$V_A' = V_B' = \frac{1}{2}$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ 时，弯矩方程式为：

$$\overline{M} = \frac{1}{2}x$$

将 M_K、M_i 代入式（7—4）可求得 C 点的挠度为：

$$\Delta_{Ki} = f_c = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EJ}\ \frac{x}{2}\cdot\frac{q}{2}\ (lx - x^2)\ dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{q}{4EJ}(lx^2 - x^3)dx$$

$$= \frac{q}{2EJ}\left(l\int_0^{\frac{l}{2}} x^2 dx - \int_0^{\frac{l}{2}} x^3 dx\right)$$

$$= \frac{q}{2EJ}\left\{\left[\frac{l}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 0\right] - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - 0\right]\right\}$$

$$= \frac{5ql^4}{384EJ}\text{。}$$

计算结果为正值，说明实际变位的方向与所设单位力 $P_K = 1$ 的指向相同。