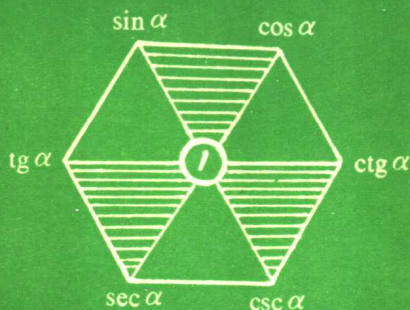


投考國內大學數學叢書

中學三角習題詳解

五百例

增訂本



廖碧華等編

科進出版社出版

投考國內大學數學叢書

中學三角習題詳解

五百例

增訂本

廖碧華編

科進出版社出版

中學三角習題

詳解五百例 增訂本

廖碧華編

科進出版社出版

電話3-457842

香港九龍官塘康寧道41號十五樓第五座

嶺南印刷公司印刷

電話5-497470

香港德輔道西西安里13號地下

◀版權所有 * 不准翻印▶

1980年2月再版

前 言

爲了幫助本港及國內青年學生投考國內大學解決複習「三角」的困難，本書按照中華人民共和國教育部所公佈「全國高校招生考試複習大綱」所要求選編了各種類型三角習題詳解五百例，其中有基本題，應用題和提高題，提高題大部份編入參考題和綜合性習題內。這是一本很適合青年學生學習和複習用的三角習題集。

本書內的習題大部份是根據國內現行中學「三角」教科書的要求而編寫，所選之習題都具有代表性，所以可供本港及國內中學生和教師作爲學習三角的參考書。對於本書中可能出現的缺點和錯誤，懇請讀者賜教。

廖碧華

一九七九年春

再版說明

本書自出版以來受到廣大讀者的熱烈歡迎，爲進一步滿足高考生和中學師生的要求，本版增編了難度較大的總複習題72例、習題17個、複習題30個供中學師生及高考生複習和提高之用。歡迎讀者多提寶貴意見，以便改進。

廖 碧 華

一九八〇年二月

数 学

要 求

1. 牢固掌握基本的概念、定理和公式。正确掌握各有关概念之间的关系和各有关定理之间的关系。对于常用公式，力求在运用中自然记忆，不要死记硬背。在复习中，也要熟悉公式的推导过程。

2. 具有熟练的运算能力、逻辑推理和逻辑表达的能力，以及空间想象的能力。

3. 能沟通不同部分的知识和方法，并能熟练综合运用它们来解决具体问题的能力（特别要注意代数在三角和几何上的应用，三角在解决几何问题上的作用，几何图象在解决代数和三角问题上的作用。）

本大纲分代数、几何、三角、平面解析几何四个部分。内容的排列不代表复习的次序。

考虑到当前中学数学教学的实际情况，排列组合、极限、极坐标和复数等内容，今年暂不列入大纲。

(一) 代 数

一、数的有关概念

1. 正数与负数、有理数与无理数、实数、实数的分类。
2. 数轴、绝对值。

3. 有理数的四则运算。

二、代数式

1. 单项式与多项式、整式与分式、有理式与根式。

2. 关于代数式乘法的几个基本公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

3. 正数的平方根与算术平方根。

4. 关于二次根式的几个公式：

$$\sqrt{a^2} = |a|;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}, (a \geq 0, b > 0).$$

5. 最简根式, 同类根式, 二次根式的四则运算, 分母有理化。

三、因式分解

1. 提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法、配方法。

2. 某些高次整系数多项式在有理数范围或实数范围内的分解, 例如:

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2).$$

四、方程

1. 方程与方程组, 系数与未知数, 整式方程的次数、方程(或方程组)的根(或解)。

2. 一元一次方程与一元二次方程、可化为一次或二次方程的高次方程。

3. 一元二次方程的根与系数的关系、根与判别式的关系。

4. 分式方程、根式方程(无理方程)、增根的判别。

5. 二元与三元一次方程组的解法。

6. 简单的二元二次方程组。

五、不等式

1. 不等式和不等式组。

2. 不等式的性质。一元一次不等式、一元一次不等式组、一元二次不等式的解法， $|x| < a$ 与 $|x| > a$ 型的不等式及其解法，解的几何表示。

六、指数与对数

1. 正整数指数幂、零指数幂、分指数幂、负指数幂及其运算。

2. 对数与指数的关系、对数的基本运算法则、换底公式。

3. 常用对数及其在数值运算中的应用、常用对数表的应用。

七、函数和它们的图象

1. 常量与变量、自变量与因变量、函数及其定义域。

2. 一次函数、二次函数、正比例函数、反比例函数、指数函数、对数函数，它们的图象与性质(定义域、正值与负值、奇偶性、单调性等)。

八、数列

等差数列与等比数列、通项与 n 项和公式。

(二) 几 何

一、平面几何的基础知识

1. 线段、射线、直线、相交线、角、角度制、角的分类, 两角互补、两角互余, 两直线的垂直, 对顶角。

2. 平行线的概念、性质与判定定理。

二、三角形

1. 三角形三边的关系, 内角和定理、外角同内角的关系。

2. 三角形(包括直角三角形)全等的判定定理, 按已知条件作三角形的方法。

3. 线段的垂直平分线与角的平分线的性质, 用圆规、直尺作线段的垂直平分线与角的平分线的方法。

4. 三角形的角平分线、中线与高的概念, 等腰三角形的性质与判定定理。

5. 平行截割定理。

6. 相似三角形(包括直角三角形)的判定定理, 相似三角形对应角的平分线、对应边上的中线、高的比的性质。

7. 勾股定理、直角三角形中的比例中项定理。

三、多边形

1. 凸多边形内角和公式。

2. 平行四边形的概念、性质与判定定理, 三角形的中位线定理。

3. 矩形、菱形、正方形的概念、性质与判定定理。

4. 梯形的概念, 梯形的中位线定理, 等腰梯形的性质与

判定定理。

5. 矩形、正方形、平行四边形、三角形与梯形面积的计算公式。

6. 相似多边形的概念，相似多边形周长的比与面积的比的性质。

四、圆

1. 三点定圆问题，三角形外接圆的作法。

2. 弧度制的概念、它同角度制的关系。

3. 圆心角、半径与弧长的关系。

4. 弧、弦、直径，圆心角、圆周角、弦切角等概念及有关定理。

5. 相交弦定理。

6. 正多边形的概念，用圆规、直尺分圆周为 4、5、6 等分的方法，作正方形、正五边形、正五角星形、正六边形的方法。

7. 切线的性质、判定与切线长定理，过圆上或圆外一点作圆的切线的方法，作三角形内切圆的方法。

8. 两圆的位置关系，两圆相切的性质与判定，两圆公切线的性质。

9. 圆周长与圆面积的计算公式，弧长与扇形面积的计算公式，计算弓形面积的方法。

五、立体几何

1. 空间两条直线的位置关系，不共面(异面)直线间的角。

2. 直线与平面的位置关系，直线与平面的交角，三垂线定理。

3. 平面与平面的位置关系。

4. 棱柱、棱锥、棱台的概念，计算它们的表面积与体积的方法。

5. 直圆柱、直圆锥、直圆台、球的概念，计算它们的表面积与体积的方法。

(三) 三 角

一、三角函数定义及其基本性质

1. 任意角的概念与角的正弦、余弦、正切、余切的定义。

2. 当角由 0 变到 2π 时，三角函数值的变化。

3. $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 等特殊角的三角函

数值。

4. 三角函数的定义域、增减性与周期性。

5. 同一角的各三角函数的关系。

6. 三角函数的图象。

二、三角函数式的变换

1. 余角函数公式。

2. 化任意角的三角函数为锐角的三角函数公式(诱导公式)。

3. 两角和或差的正弦、余弦、正切函数公式。

4. 倍角和半角的正弦、余弦、正切函数公式。

5. 和差化积公式($\sin \alpha \pm \sin \beta, \cos \alpha \pm \cos \beta$)，积化和差公式。

三、三角方程

1. 由一角的正弦、余弦、正切函数的值, 求该角的通值。
2. 反三角函数及其主值(反正弦、反余弦、反正切)。
3. 简单的三角方程。

四、解三角形

1. 三角函数表的用法、三角函数对数表的用法。
2. 直角三角形的解法。
3. 正弦定理、余弦定理、斜三角形的解法。

(四) 平面解析几何

一、直线

1. 直角坐标系, 平面上点与坐标的关系, 两点间距离公式, 线段的定比分点公式。
2. 曲线与方程之间的对应关系。
3. 直线方程的点斜式、斜截式、两点式及直线方程的一般形式。
4. 两条直线的平行、垂直的条件, 两条直线交点坐标的求法, 求两条直线交角的公式。

二、二次曲线

1. 圆的方程: $x^2 + y^2 = r^2$, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ 。
2. 抛物线的定义、标准方程、性质(对称轴、顶点、开口方向、焦点、准线)及图形。
3. 椭圆的定义、标准方程、性质(对称轴、对称中心、顶点、长半轴、短半轴、离心率、焦点、准线)及图形。

4. 双曲线的定义、标准方程、性质(对称轴、对称中心、顶点、实半轴、虚半轴、离心率、焦点、准线、渐近线)及图形。

5. 坐标轴的平移公式,利用它化简方程

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (A, C \text{ 不同时为零})$$

为圆、椭圆、双曲线、抛物线的标准方程,或一对直线的方程。

三、直线与二次曲线、二次曲线与二次曲线的关系

1. 直线与上述二次曲线的关系(相切、相交、相离),求切点坐标或交点坐标。

2. 了解求两条二次曲线交点坐标的方法,并在某些简单的情况下会求出交点坐标。

四、参数方程

$$\text{直线} \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt; \end{cases}$$

$$\text{圆} \quad \begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + a \sin \theta; \end{cases}$$

$$\text{椭圆} \quad \begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + b \sin \theta; \end{cases}$$

$$\text{抛物线} \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt^2. \end{cases}$$

(x_0, y_0, a, b 都是常数, t, θ 都是参数。)

会从上述参数方程消去参数,利用参数方程求曲线交点的坐标。例如,利用直线的参数方程求它同二次曲线的交点坐标。

目 录

第一章 函数	1
第一节 函数的概念	1
函数的概念	1
第二节 函数的图象	4
第二章 任意角的三角函数	15
任意角的三角函数	15
第一节 正弦函数	17
任意角的正弦函数	17
正弦函数的值	19
正弦函数的图象	20
第二节 其他三角函数	24
任意角的其他三角函数的值	24
同角关系	26
诱导公式	28
习题	31
第三章 三角恒等式	48
第一节 和差角公式	48
三角函数的和差角公式	48
第二节 其他三角恒等式	44
倍角公式	44
半角公式	56
积与和差的互化	58
习题	61
第四章 反三角函数和三角方程	97
第一节 反三角函数	97
反正弦函数	97
反余弦和反正切函数	98
第二节 三角方程	101
三角方程	101
第二章参考题	37
第三章参考题	64
第四章参考题	110

第五章 解三角形	138
总复习题	169

第一章 函 数

第一节 函数的概念

函数的概念

1. 下列各式中的量, 哪些是常量? 哪些是变量? 哪些变量是自变量? 哪些变量是自变量的函数?

(1) 在为实现新时期总任务的推动下, 我国试制成功的百万次集成电路电子计算机, 每秒钟能运算 100 万次, 则 t 秒钟运算的次数 y (万次) 为

$$y = 100t;$$

(2) 远洋货轮在航行中, 如果航速为 17.5 海里/小时, 则 t 小时后航行距离 s (海里) 为

$$s = 17.5t;$$

(3) 我国第二颗科学实验人造地球卫星绕地球一周需 106 分钟, t 分钟绕地球的周数为

$$N = \frac{t}{106};$$

(4) 将已知直径为 D 的圆周分成 n 等分 ($n \geq 3$), 相邻两点间距离 s 随 n 而变化, 其计算公式为

$$s = D \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

答: (1) 100 是常量, t 是自变量, y 是 t 的函数;

(2) 17.5 是常量, t 是自变量, s 是 t 的函数;

(3) $\frac{1}{106}$ 是常量, t 是自变量, N 是 t 的函数;

(4) 180° 、 D 是常量, n 是自变量, s 是 n 的函数.

2. 一个钢球在 0°C 时体积是 100 立方厘米, 温度 T 每增加 1°C , 体积 V 增加 0.057 立方厘米, V 是 T 的函数 $V=f(T)$. 试用公式表示 $V=f(T)$. 求 $f(200)$ 的值, 并说明符号 $f(200)$ 的意义.

解: $V=f(T)=100+0.057T$.

$$f(200)=100+11.4=111.4(\text{cm}^3).$$

$f(200)$ 表示当温度 T 增加到 200°C 时这个钢球的体积.

3. 某中学学生在学农劳动时, 跟贫下中农一起挖了一条水渠, 水渠断面是等腰梯形(如图), 过水面积 A 是水深 h 的函数. 试用公式表示这个函数. 求 $f(3.5)$ 的值, 并说明符号 $f(3.5)$ 的意义.



(第3题)

解: $A=f(h)=(h+5)h=h^2+5h$.

$$f(3.5)=3.5^2+5\times 3.5=29.75(\text{米}^2).$$

$f(3.5)$ 表示当水深为 3.5 米时的过水面积.

4. 加工一批零件, 先用 10 分钟做准备工作, 然后每加工一个零件用 15 分钟. 写出零件产量 y (件) 和工作时间 t (分钟) 的函数关系.

答: $y=\frac{t-10}{15}$.

5. 拖拉机重量 W 一定时, 地面上单位面积所受的压力 p 是履带接触地面的面积 Q 的函数. 说明 p 是 Q 的反比函数.