

13.1107-16/5

14
广东省师专函授

《概率统计》教学参考资料

(内部参考)



广东教育学院数学组编

前 言

为了配合我省师专函授《概率统计》课程的教学，我们组织了组内蒙以财，郭燕丽，卢沛文、曾灼华等老师编写了这本参考资料。资料包括各章节的内容介绍及习题解答，还选进了一些有关的知识。

我们在编写过程中，尽管参考了其它一些有关的资料，但是，由于我们水平不高，经验不足，错误之处，在所难免，就是解题方法也可能不是最好和唯一的。仅供我省师专函授辅导老师、函授学员参考，也可供中学教师或其它自修这门学科的同志参考。

广东教育学院数学组

一九八一年十月

《概率统计讲义》各章内容提要

第一章 随机事件与概率

1. 随机事件及其概率:

随机事件——在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件。

不可能事件——在一定条件下, 不可能发生的事件, 用 V 表之。

必然事件——在一定条件下, 必定要发生的事件, 用 U 表之。

随机事件的概率——事件 A 在条件 S 下发生的概率, 用 $P(A) = P$ 表示。

$$\text{其中 } P = \frac{\mu}{n} = \frac{A \text{ 发生的频数}}{\text{试验次数}}$$

2. 古典概型:

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一个等概基本事件组, 而事件 B 由其中的某 m 个基本事件所构成

$$\text{则 } P(B) = \frac{m}{n} = \frac{\text{事件 } B \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

3. 事件的运算及概率的加法公式:

事件之间的关系主要有相容关系, 包含关系, 等价关

系。在事件间有加、乘、差运算。

若事件A发生，事件B必发生，则 $A \subset B$

若 $A \subset B$, $B \subset A$, 则 $A = B$

若事件A或B发生，记作 $A + B$

若事件A且B发生，记作 $A \cdot B$

若事件A发生，而B不发生，记作 $A - B$

若事件“非A”，记作 $\bar{A}$ ，由此有 $\overline{(\bar{A})} = A$

若事件A和B不能都发生，即 $AB = \emptyset$ 称A, B互不相容

若A, B互不相容，则 $P(A + B) = P(A) + P(B)$

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容，则 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

若A, B为任意两个事件，

则有 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

4. 集合与事件:

$$A = B \iff A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

$$A \cup B \triangleq \{x; x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B \triangleq \{x; x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$\bar{A} = \{x; x \in \Omega \text{ 但 } x \notin A\} \quad (A \text{ 是 } \Omega \text{ 的一个子集})$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

5. 条件概率, 乘法公式, 独立性:

若 $P(A) \neq 0$ 称 $P(B|A)$ 为在 A 发生的前提下, B 发生的概率

$$P(B|A) = P(AB)/P(A)$$

则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$ ——乘法公式

若 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$

6. 全概公式与逆概公式:

若事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足:

① $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2 \dots n)$

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$ (完全性)

则对任一事件 B , 皆有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一完备事件组, 则对任一事件 B (当然 $P(B) \neq 0$)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

(又称贝叶斯公式)

7. 独立试验序列概型:

做几次独立重复试验, 每次试验的结果是 A 和 $\bar{A}$, 而 $P(A) = P(0 < P < 1)$ 与试验的次数无关, 这种叫贝努里试验, 或贝努里概型。

$$P(\text{"A发生K次"}) = C_n^k P^k q^{n-k} \quad (\text{其中 } q = 1 - P \\ K = 0, 1, 2, \dots, n)$$

当 P 很小 n 很大时, 可用 $P\{\text{"A发生K次"}\}$

$$\approx \frac{(nP)^k}{K!} e^{-nP}$$

当 P 不是很小, n 很大时, 可用 $P\{\text{"A发生K次"}\}$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{nP(1-P)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}$$

$$x_k = \frac{K - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}$$

8. 排列组合计算公式:

$$\left. \begin{aligned} \text{选排列: } P_n^m &= \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1 \leq m \leq n) \\ \text{全排列: } P_n^n &= n! \quad (m = n) \end{aligned} \right\} \text{无重复的排列}$$

$$\begin{aligned} \text{组合公式: } ① C_n^m &= \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &= \frac{P_n^n}{P_m^m P_{n-m}^{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m} \end{aligned}$$

$$② C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

第二章 随机变量与概率分布

1. 随机变量:

对于条件组 S 下的每一个可能结果 ω 都唯一地对应到一个实数组 $X(\omega)$, 则 $X(\omega)$ 称为一个随机变量。

2. 离散型随机变量:

概率分布: $p_k = P\{X = x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) ($x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ 为 X 可能取的值), 称为 X 的概率分布。

二点分布: 若随机变量 X 的分布如下:

$$P\{X = 1\} = p \quad (0 < p < 1)$$

$$P\{X = 0\} = q = 1 - p, \text{ 则称 } X \text{ 服从二点分布,}$$

(p 为参数)

二项分布: 若随机变量 X 的分布如下:

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$(0 < p < 1, q = 1 - p)$$

称 X 服从二项分布 (参数为 n, p), 或记作 $X \sim B(n, p)$

泊松分布: 若随机变量 X 的概率分布如下:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0),$$

称X服从泊松分布(λ 为参数)

超几何分布: 设一堆同类产品共N个, 其中有M个次品, 现从中任取n个(假定 $n \leq N-M$), 则这n个中所含的次品数X是一个离散型随机变量, X的概率分布如下:

$$P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} (m = 0, 1, 2, \dots, l),$$

这里 $l = \min(M, n)$

超几何分布与二项分布的关系:

当 $N \rightarrow \infty, \frac{M}{N} \rightarrow p$ (n, m 不变), 则

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \rightarrow C_n^m p^m q^{n-m}$$

3. 连续型随机变量:

概率密度函数: 对于随机变量X, 如果存在非负可积函数 $p(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 使对任意 a, b ($a < b$), 都有

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x) dx, \text{ 则称X为连续型随机变量,}$$

$p(x)$ 为X的概率密度函数(简称为概率度或密度)。

均匀分布: 若随机变量X的概率密度为:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda & \text{当 } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称X遵从 $[a, b]$ 区间上的均匀分布

$$\text{由 } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \text{ 可知 } \lambda = \frac{1}{b-a}$$

指数分布: 如果随机变量X的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{当 } x \geq 0 \\ 0 & \text{当 } x < 0 \end{cases} (\lambda > 0)$$

则称X遵从指数分布。(参数为 λ)

正态分布：如果随机变量X的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$(-\infty < x < +\infty), (\sigma > 0)$ 则称X遵从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$

简记 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, $N(0, 1)$ 称为标准正态分布, 密度函

数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Γ 分布：如果随机变量X的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$(\alpha > 0, \beta > 0)$, 则称X遵从 Γ 分布, 简记

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

4. 分布函数与随机变量函数的分布:

分布函数：设X是一个随机变量（可以是连续的，离散的，甚至更一般的）

积函数 $F(x) = P(X \leq x) \quad (-\infty < x < +\infty)$ 为X的分布函数。

$F(x)$ 的性质：

$$(1) \quad 0 \leq F(x) \leq 1, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(2) \quad F(x) \text{ 是 } x \text{ 的不减函数}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

分布函数与密度函数的关系： $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$

随机变量函数的分布：

设 $f(x)$ 是一个函数，所谓随机变量 X 的函数 $f(x)$ ，就是这样的—个随机变量 Y ，当 X 取 x 时，它取值 $y = f(x)$ ，记作 $Y = f(x)$

将随机变量 X 和随机变量 Y 的密度函数分别记作 $p_x(x)$ 和 $p_y(y)$ ，如果 $f'(x) > 0$ ，则有 $p_y(y) = p_x[g(y)]g'(y)$ ，其中 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数。

Γ 函数的定义及性质：

$$\text{定义： } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\text{性质： } ① \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$② \Gamma(1) = 1$$

$$③ \Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n!$$

$$④ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$⑤ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$$

$$⑥ \Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$\text{应用： } ① \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = \Gamma(n)$$

$$② \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned} ③ \int_0^{\infty} e^{-kx} x^{n-1} dx &= \int_0^1 x^{k-1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(n)}{K^n} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

B函数的定义及应用:

$$\text{定义: } B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$\text{应用: } \textcircled{1} \int_0^1 x^v (1-x\alpha)^3 dx = \frac{1}{\alpha} \beta\left(\frac{1+v}{2}, 1+\beta\right)$$

$$\textcircled{2} \int_0^{\infty} \frac{x^v}{(1+x\alpha)} \beta dx = \frac{1}{\alpha} \beta\left(\frac{1+v}{\alpha}, \beta - \frac{1+v}{\alpha}\right)$$

$$\textcircled{3} \int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} dx = (b-a)^{m+n-1} B(m, n)$$

$B(m, n)$

$$\textcircled{4} \int_0^1 \frac{x^{m-1} (1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}} dx = \frac{B(m, n)}{a^n (1+a)^m}$$

第三章 随机变量的数字特征

一、期望的概念及性质:

1. 离散型: 设离散型随机变量的概率分布是:

$$\begin{array}{c|c} X & x_1, x_2 \cdots x_k \cdots \\ \hline P & p_1, p_2 \cdots p_k \cdots \end{array}$$

(即 $P\{x = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$), 称和数

$\sum_k x_k p_k$ 为随机变量 X 的期望

(或数学期望), 记作 $E(X)$

2. 连续型: 设连续型随机变量 X 的密度为 $p(x)$, 则称

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \text{ 为 } X \text{ 的期望(或均值), 记作 } E(X)$$

3. 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式:

性质: (1) $E(c) = C$

$$(2) E(KX) = KE(X)$$

$$(3) E(X + b) = E(X) + b$$

$$(4) E(KX + b) = KE(X) + b$$

其中 K, b, C , 都是常数

公式: 设 X 的密度为 $p(x)$, Y 是 X 的函数: $Y = f(x)$, 如果 $E[f(x)]$ 存在, 则 Y 的均值 $E[f(x)]$ 可按下列

直接计算 $E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$, 当 X 是离散型时, 若其概率分布是 $P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \cdots)$ 则

$$Y=f(x) \text{ 的均值 } E[f(x)] = \sum_i f(x_i) p_i$$

二、方差的概念及其简单性质:

1. 离散型: 设离散型随机变量的概率分布 $P\{X=x_k\}=p_k$ ($k=1,2,\dots$) 则称和数 $\sum_k (x_k - E(X))^2 p_k$ 为 X 的方差, 记作 $D(X)$ (显然有 $D(X) \geq 0$)。

2. 连续型: 设连续型随机变量的密度为 $p(x)$, 称则 $\int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 P(x) dx$ 为 X 的方差, 记作 $D(X)$ 。

由方差的定义, 利用随机变量函数的期望公式有 $D(X) = E[X - E(x)]^2$ 这表示 X 的方差, 就是 $Y = [X - E(x)]^2$ 的均值。

方差的计算公式: $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

3. 方差的简单性质:

$$(1) D(C) = 0$$

$$(2) D(KX) = K^2 D(X)$$

$$(3) D(X+b) = D(X)$$

$$(4) D(KX+b) = K^2 D(X) \quad \text{其中 } K, d, c \text{ 为常数。}$$

三、常用分布的期望和方差表:

名 称	概 率 分 布	期望(均值)	方 差	参 数 范 围
二点分布	$P(X=x) = p^x q^{1-x}$ ($x=0,1$)	p	pq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$
二项分布	$P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ ($x=0,1,2,\dots,n$)	np	npq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$ n 为自然数
泊松分布	$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ ($x=0,1,2,\dots$)	λ	λ	$\lambda > 0$
超几何分布	$P(X=x) = \frac{C_{N-M}^{n-x} C_M^x}{C_N^n}$ ($x=0,1,\dots,\min(M,n)$)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	n, M, N 为自然数 $n \leq N$ $M \leq N$
均匀分布	$p(x) = \frac{1}{b-a} (a \leq x \leq b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$b > a$
指数分布	$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x > 0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
正态分布	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	μ 任意 $\sigma > 0$
Γ 分 布	$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ ($x > 0$)	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$

四、其它:

切比雪夫不等式:

设随机变量 X 存在均值 $E(X)$ 和方差 $D(X)$

则有 $P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$

原点矩与中心矩:

称 $E(X^k) (k=1, 2, \dots)$ 为 X 的 K 阶原点矩, 记作 ν_k

称 $E(X - E(X))^k (k=1, 2, \dots)$ 为 X 的 K 阶中心矩, 记作 μ_k

第四章 随机向量

一、随机变量的（联合）分布与边缘分布：

1. 二维离散型随机向量：

如果二维向量 $\xi = (X, Y)$ 可取的值（向量）只有有限个或可列个（即可排成一序列）则称 ξ 为离散型的。

联合分布： $P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$)，则称 p_{ij} (对一切 i, j) 为 $\xi = (X, Y)$ 的概率分布，也称为 (X, Y) 的联合分布。

概率分布有时也用下表来表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots\dots$
$\vdots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots\dots$
$\vdots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots\dots$

p_{ij} 的性质：(1) $p_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$)

(2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

边缘分布及其与联合分布的关系：

对于二维随机向量 (X, Y) ，分量 X 的概率分布称为 (X, Y) 的关于 X 的边缘分布。

分量Y的概率分布称为 (X, Y) 的关于Y的边缘分布。

$$P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

2. 二维连续型随机向量的分布密度:

对于二维随机向量 $\xi = (X, Y)$, 如果存在非负函数 $p(x, y)$, $(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty)$, 使对任意一个邻边分别平行坐标轴的矩形区域D, (即由不等式 $a < x < b, c < y < d$ 确定的区域)有 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D$

$p(x, y) dx dy$, 称随机向量 $\xi = (X, Y)$ 为连续型的, 称 $p(x, y)$ 为 ξ 的分布密度, 也称 $p(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合分布密度。

注意: (1) 这里的联合密度与物理中的质量面密度的概念相仿。

(2) $P(x, y)$ 是一个全平面(即 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$)上有定义的二元非负函数。

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

3. 连续型随机向量的边缘分布:

对于随机向量 (X, Y) , 作为其分量的随机变量X(或Y)的密度函数 $p_X(x)$ (或 $P_Y(y)$), 称为 (X, Y) 的关于X(或Y)的边缘分布密度。

若 (X, Y) 的联合密度是 $p(x, y)$ 时

$$\text{则 } p_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy$$

$$p_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dx \quad \text{分别是 } X, Y \text{ 的分布密度}$$