

大專・高中新數學叢書⑥

新課程

電子計算機之數學

阪大教授・理博 竹之內脩 原著
嚴水謨 編譯

晨光出版社

編輯大意

自商店的計算到宇宙火箭爲止，今全世界幾乎成爲電子計算機（電腦）的時代——電腦的計算，可應用於日常生活中，連國民小學的教材也使用電腦。

在新指導要領之高中數學裡，將電子計算機（電腦）亦劃入其範圍。此計算機不僅用於四則計算，例如三次方程式之近似解以及積分所困難的定積分之近似值亦可求得時，用電子計算機對於解決此等問題是可想而知的。

又有人抱著懷疑的心情以爲計算機是何等的結構，爲何能計算出來，或按下“ $\sqrt{\quad}$ ”鍵及“ $\sin x$ ”鍵時，答案爲何會立即出現。

本書係主要高中所使用的電子計算機之數理部份，以問題的解法來說明上述的問題解決方法及回答這些疑難問題。

但是，其中抱有上述的希望和疑問時，對於計算機知識缺乏的人，就因此放棄亦說不定。

本書係針對上述此類的讀者，尤其缺乏計算機知識的人而編成的，與現有一般高中數學叢書所不同。並以

解說→整理→例題→擴展問題→習題

之型式，階梯式的使用已易於解決問題，內容逐漸深入，像這樣的步驟而編成。

詳閱本書，對於非本書的問題亦能以同樣方法來解決問題，不亦說乎！

原著者

前言

在編輯大意裡已提到過，本書對於不擅長於數學者亦能充分了解，精於數學者更能漸漸培養出深厚的興趣來。本書為具有此種特色之參考書，因此本書有下列各項之特點。

■ 小項目主義

各分門別類儘可能採用小項目。使該學習之處一目瞭然，本書之說明一面符合教科書，同時

愈來愈廣，愈來愈深，也愈來愈容易了解。

說明終了，附有「精粹」一欄，為重要公式之總彙集，學習重點均列記於此，使讀者更能倍增學習之效率。

■ 例題→擴展問題→習題

說明若能了解，再由例題，擴展問題，習題三者

反覆學習，不知不覺地實力就會增強。

此精巧微妙之處，實為本書最大之特長。由例題→擴展問題的順序，內容逐漸加深，但在「解法」「要點」欄裏對於問題的思考方法及解答要領均有指示，希望讀者對此兩種問題，能反覆演練，務其達於近乎記憶之程度。總之，數學的學習是

一步一步地累積上去的。

因此，特別推薦此種反覆學習的方法。若例題，擴展問題兩者已充分了解，則對於「習題」將能駕輕就熟。反之，若對「習題」感到困難，則表示前面的學習並未全盤了解。

■ 練習問題

分為A、B兩階段。A部分相當於例題，擴展問題的程度，B部分包含有較深的問題。大學聯考對於此種程度的問題出題率最高，故此為有志於投考大學諸君不可或缺的問題集。

雖有人常說，學習數學不能靠記憶，但這是沒有將問題的思考方法同時記憶所致。本書不是僅僅介紹記憶的方法，而是針對「數學原來是這樣去思考的」給予讀者適當的指導，然後推薦應用廣泛的記憶方法。深信擁有本書之讀者諸君，必能真正地理解數學，同時增強數學的應用實力。

編輯大意	1
前言	2
重要名詞一覽表	5
① 電子計算機的運算	6
1. 二進法及其運算	8
p 進法, p 進數, 10 進法, 2 進法, 自 2 進數到 10 進數的變換	
, 自 10 進數到 2 進數的變換, 2 進數與 10 進數的比較, 2 進數	
的運算, 加法, 減法, 乘法, 除法, 補數	
■ 電子計算機之構造	17
2. 命題及其真理表	18
命題, 合成命題, 真理表, 命題的同值, De Morgan 律	
■ 電子計算機的發展	23
3. 開關迴路與運算	
開關迴路, 開關迴路的合成, and 迴路, or 迴路, Not 迴路,	
Nand 迴路, Nor 迴路, 開關迴路與命題, 半加算迴路	
▶ 練習問題 (1 ~ 8)	34
② ALGORITHM	36
4. ALGORITHM	38
ALGORITHM, ALGORITHM 的表示法, ALGORITHM 的具體	
例子	
■ 誤差之言	43
5. 流程圖	44
流程圖, 流程圖的記號, 輸入方塊, 處理方塊, 判斷方塊, 輸出	
方塊, 其他的記號, 流程圖之型式, 直線型, 分枝型, 反覆型,	

4 目 次

③ 桌上電子計算機的數值計算	56
6. 桌上電子計算機的四則計算	58
清除, 計算的順序, 記憶, 誤差, 運算位數, Over flow, underflow, 減位, 浮動小數點方式與固定小數點方式, 桌上計算機之性能	
■ 漸化式的計算	65
7. 方程式的解法	
二次方程式的解法, 牛頓的逐次近似法, 區間縮小法, 二分法, 聯立方程式的解法, 掃出法, 克拉米爾 (Claud meyer) 方法	
8. 函數的近似計算	80
補間法, 一次補間法, 二次補間法, 麥克勞林 (Maclaurin) 定理	
■ 割線法	91
9. 定積分的計算	92
區分求積法, 梯形公式, 辛普遜公式	
10. 統計	102
階乘的性質, 排列, 組合, 平均與分散的關係, 標準偏差, 應用度數分佈表的分散, 標準偏差的計算, 共分散, 相關係數, 迴歸直線, 馬爾克弗過程, 推移行列, 機率變數, 機率分佈, 期望值, 分散, 標準偏差, 皮爾生 (Pearson) 分佈, 二項分佈, 正規分佈, 擬態 (Simulation), 蒙地卡羅 (Monte Carlo) 法, 亂數列	
▶ 練習問題 (14~20)	120
④ 簡單的程式設計 (Simple Programming)	121
11. 程式 (Program) 的作成	122
程式設計 (Programming), 問題分析, Algorithm, 流程圖的作成, 輸入, 輸出	
▶ 練習問題 (21~27)	131
習題解答	132
練習問題解答	143

重要名詞一覽表

Algorithm	36,38	端子記號	45
Underflow	59	逐次近似法	66
and 迴路	24	De Morgan 律	18
運算位數	59	流程圖	37,44
or 迴路	24	流程線	45
overflow	59	Nand 迴路	25
迴歸直線	103	二項分佈	104
機率分佈	103	2 進法	8
機率變數	103	2 分法	67
加算迴路	7	輸入方塊	44
期望值	103	Nor 迴路	25
共分散	102	Not 迴路	24
區間縮小法	67	掃出法	68
區分求積法	92	硬體 (Hardware)	6
清除 (Clear)	58	半加算迴路	25
減位	59	判斷方塊	44
合成命題	18	p 進法	8
合接命題	18	否定命題	18
全等法	104	標準偏差	102
子區域 (Subregion)	53	Fortran	122
10 進法	8	程式設計 (Programming) ..	36,122
輸出方塊	45	程式 (Program)	36
擬態 (Simulation)	104	流程圖 (Flow Chart)	37,44
處理方塊	44	分散	103
辛普遜 (Simpson)	93	平方採中法	104
真理表	18	Basic	122
推移行列	103	皮爾遜分佈	104
開關 (Switch) 迴路	24	補間法	80
正規分佈	104	補數	9
全加算迴路	27,33	麥克勞林 (Maclaurin) 定律	81
漸化式	65	馬爾克弗過程	103
相關係數	103	命題	18
軟體 (Software)	6	記憶 (Memory)	58
梯形公式	92	蒙地卡羅 (Monte Carlo) 法 ..	104
		離接命題	18
		輪 (Loop) 計算	37

1 電子計算機的運算

電子計算機究竟是何型態，可記憶很多的事情，可瞬時計算非常大的數目。對於複雜的問題可由一次判斷知曉，就必須對電子計算機的內部構造加以了解。如此考慮關於計算機上構造的問題稱為硬體 (Hardware)。若考慮對於計算機熟練使用以解答問題的諸多手續，稱為軟體 (Software)。

電子計算機本來為電氣的構成而已，由電流 (動脈 pulse) 流動，不流動二個狀態 (以後以電流流動時為 1，不流動時為 0 表示之。根據 0, 1 所表示的狀態稱為 binary 狀態) 來處理輸入的資料 (Data)。因而根據電子計算機，數的計算時，數可由 binary 的狀態表示，再來以 binary 的狀態計算，所得 binary 的結果為通常的狀態。

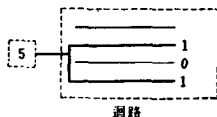
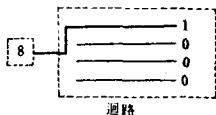
例如 $8 + 5$

考慮看看電子計算機如何計算。首先，8, 5 此二數以 binary 的狀態表示之。

很幸運，吾等皆明瞭使用 1 及 0 來表示數的 2 進法，通常的數 (10 進數) 在第 8 頁有詳細的說明。如下的 2 進數表示

$8 \rightarrow 1000$ $5 \rightarrow 101$

應用 2 進數 1000, 101 如下圖為電子計算機 8, 及 5 之數可記憶下來



前頁的圖，由 8，5 之數輸入，電子計算機為記憶 8，5 之數以迴路表示之。

即，對 8 之輸入，4 條迴路中僅最上的迴路有電流流過，又對 5 之輸入，自上起第 2 及第 4 號的迴路有電流流過。

如此，binary 狀態輸入的 2 數 1000 及 101 電氣的計算時，由 2 進法的計算規則加起來，有必要成為前進的迴路，就此迴路的作法，自 24 頁的例題及擴展問題有詳盡的說明，在原理上由下列所述二程序可作出。

(1) 2 進數的計算以合成命題表示之。

(2 進數的計算)

(命題合成)

$$a + b = c$$

$$a \quad b \quad c' = a \wedge b \quad c'' = (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$$

$$0 + 0 = 00$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 + 1 = 01$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$1 + 0 = 01$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$1 + 1 = 10$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$



位上的數

(2) 對命題 a, b ，合成命題 c', c'' 以相同的 0, 1 狀態迴路組成

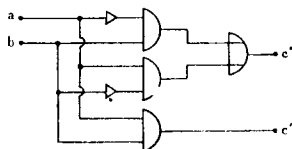
$$a \quad b \quad a \wedge b \quad (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$



根據上之(1)，(2)的程序所構成迴路，稱為加算迴路，根據此加算迴路多少的組合來計算之進數 1000 及 101。由此的計算得結果為 1101，由使用輸入時的反原理，化為 10 進數，以電器的或機械的輸出，就可得答案。

在本文的 1～3 上所述，電子計算機的運算基本 2 進數的計算合成命題，由開關 (switch) 迴路例題及擴展問題加以說明。

1. 二進法及其運算

p 進法、 p 進數 以整數 p 為基準的數所表示的稱為 p 進法，以 p 進法所表示的數稱為 p 進數。自然數以 p 進法表示時

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$$

(但 $p \neq 0$, $0 \leq a_i < p$, a_i, p 皆為整數)

p 進法可為任何數 $0, 1, 2, \cdots, p-1$ 的 p 個數字所表示者。

10 進法 吾等日常所用皆為 10 進法，以 10 為根底的數表示。在 10 進法，任何數皆可用 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 的 10 個數字表示。

【例】 10 進數 3742 為

$$3742 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2$$

2 進法 電子計算機所用 2 進法，是以 2 為根底來表示全部數，稱為 2 進法，任何數皆可用 0 及 1 的 2 個數字來表示。

【例】 2 進數 10111 為

$$10111 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

自 2 進數至 10 進數的變換 2 進數 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ 化為 10 進數，首先應用 0 或 1 之數 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ 以如下之形式表示

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$$

如右邊所計算。

【例】 2 進數 11001 以 10 進數表示

$$11001 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 25$$

自 10 進數至 2 進數的變換 10 進數 A 化為 2 進數， A 為

$$a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0 \cdots \textcircled{1}$$

由此式得數 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ 為所求 2 進數。

10 進數 A 以①式之形表示， A 以 2

除之求餘 a_0 及商 A_1 。 A_1 為大於 2，

再 A_1

$$\begin{array}{rcl} \text{【例】} & 2 \overline{) 25} & \text{餘數} \\ & \underline{12} & \cdots 1 \leftarrow a_0 \\ & \underline{6} & \cdots 0 \leftarrow a_1 \\ & \underline{3} & \cdots 0 \leftarrow a_2 \\ & 1 & \cdots 1 \leftarrow a_3 \end{array}$$

除以 2，求得餘為 a_1 及商為 A_2 。如此運算直到商小於 2 為止。前頁右下例為， $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 等次第求得為 $A = 25$ 所表示者。

2 進數及 0 ~ 9 止以 10 進數及 2 進數表示如下：

10 進數	10 進數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
的比較		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	2 進數	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001

2 進數的運算 2 進數的計算，為 2 時進 1 位，除法與 10 進數的計算完全一樣。加法有如下四種運算為基本。

加法	$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$
	$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 10$

減法，乘法，除法與 10 進數的情形，同樣行之。

a 為 p 進法之 n 位數時 (n 位的最大數) - a 為 a 的補數。

【例】 (1) 10 進數 3785 的補數 (2) 2 進數 1100 的補數

$$9999 - 3785 = 6214$$

$$1111 - 1100 = 11$$

2 進位的補數為 1 及 0 互換即可得。

例如 1100 之補數為 0011，即 11

減法根據應用補數，化為加算可求得。

a, b 若 $a > b$ 時

$$a - b = \{a + (b \text{ 的補數}) + 1\} - \{(b \text{ 的位數} + 1) \text{ 位數的最小數}\}$$

【例】 $11011 - 110 = 11011 + 001 + 1 - 1000 = 10101$

乘法以加算，除法亦可化為加算可求得。

● 精 粹 ●

- (1) 全部的數以 2 進數表示。
- (2) 2 進數為，0 及 1 僅二種類記號所表者。
- (3) 2 進數的補數為 0 及 1 互換即可求得。
- (4) 乘法，減法，除法全部皆可用加算置換之。

例題 1. 回答下列各問題。

(1) 下列 2 進數以 10 進數表示之。

(a) 11011

(b) 10001

(2) 下列 10 進數以 2 進數表示之。

(b) 21

(b) 353

解法 (1) 2 進數 11011 化為 10 進數時，首先，以下列形式表示。

$$11011 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

計算右邊即可得所求 10 進數。

(2) 10 進數 21 化為 2 進數時，21 變形為

$$a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$$

利用其結果，化為 2 進數 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ 如右所示 21 每次以 2 除之，求商及餘數。此運算直至商為小於 2 時止。

由右之結果

$$21 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$

因之

21 以 2 進數為 10101。

2	21	餘數
2	10	1
2	5	0
2	2	1
	1	0

解答 (1) (a) $11011 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

$$= 16 + 8 + 2 + 1 = 27 \quad \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$$

(b) $10001 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$

$$= 16 + 1 = 17 \quad \cdots \cdots \cdots \text{(答)}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{(2) (a)} \quad 2 \overline{) 21} \\
 \underline{2 \quad 10} \cdots 1 \\
 2 \quad \underline{5} \cdots 0 \\
 2 \quad \underline{2} \cdots 1 \\
 1 \cdots 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{(b)} \quad 2 \overline{) 353} \\
 \underline{2 \quad 176} \cdots 1 \\
 2 \quad \underline{88} \cdots 0 \\
 2 \quad \underline{44} \cdots 0 \\
 2 \quad \underline{22} \cdots 0 \\
 2 \quad \underline{11} \cdots 0 \\
 2 \quad \underline{5} \cdots 1 \\
 2 \quad \underline{2} \cdots 1
 \end{array}$$

(答) 10101

1 (答) 11100001

擴展問題

回答下列各問題

(1) 將下列 5 進數化為 7 進數。

(a) 4321

(b) 3442

(2) 試說明化 p 進數為 q 進數之順序。

要點

2 進數化為 10 進數或
10 進數化為 2 進數的方
法可應用為其他進法的
的變換。首先化為 10 進
數然後化為 7 進數。

與例題 1 及擴展問題

(1) 相同，為 p 進法化為
 q 進法之一般化之方法
。

解答 (1) (a) $4321 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1$
 $= 586$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 586} \quad \text{餘數} \\ 7 \overline{) 83} \cdots 5 \\ 7 \overline{) 11} \cdots 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 83} \cdots 5 \\ 7 \overline{) 11} \cdots 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 11} \cdots 6 \end{array}$$

$$1 \cdots 4 \quad (\text{答}) 1465$$

(b) $3442 = 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2 = 497$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 497} \\ 7 \overline{) 71} \cdots 0 \\ 7 \overline{) 10} \cdots 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 71} \cdots 0 \\ 7 \overline{) 10} \cdots 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 10} \cdots 1 \end{array}$$

$$1 \cdots 3 \quad (\text{答}) 1310$$

(2) 順序 1 p 進數 p 化為 10 進數 q_1

順序 2 若 $q_1 < q$ ，答為 q_1

順序 3 若 $q_1 \geq q$ 時， q_1 除以 q ，應用
商 Q_1 及餘 q_2 ， q_1 可變為如下

$$q_1 = Q_1 \cdot q + q_2$$

順序 4. 若 $Q_1 < q$ ，答為 $Q_1 q_2$

順序 5. 若 $Q_1 \geq q$ ， Q_1 以 q 除之，得商
 Q_2 及餘 q_3 ， q_1 變為如下

$$q_1 = Q_1 \cdot q + q_2 = Q_2 \cdot q^2 + q_3 \cdot q + q_2$$

順序 6. 若 $Q_2 < q$ ，答為 $Q_2 q_3 q_2$

順序 7. 以下，當商 Q_n 繼續運算直至 Q_n
 $< q$ 時所求答為 $Q_n q_{n-1} q_n \cdots q_3$
 q_2

習題

(解答在第 132 頁)

1. 將下列 2 進數化為 10 進數，10 進數化為 2 進數。

(1) 2 進數 11111

(2) 2 進數 100000

(3) 10 進數 9

(4) 10 進數 1000

例題 2. 試計算下列 2 進數。

$$(1) \quad 11110 + 10111$$

$$(2) \quad 11100 - 1111$$

$$(3) \quad 10101 \times 1101$$

$$(4) \quad 110011 \div 101$$

解法 (1) 2 進數的加算與 10 進數的補法不同，即 10 進數為 10 時進 1 位，2 進數為 2 時進 1 位。

(2) 2 進數的減算 $10-1$ 時，自 0 減 1 為不可能。此時，與 10 進數的減算相同自上一位借 10 來減。在 2 進位，所借為 2， $10-1$ 之值為 $10-1=1$ 此外與 10 進數之情形之計算法相同。

(3) 2 進數的乘算，與 10 進數之情形同樣。

2 進數之特徵如下所示，自乘數 $a_3 a_2 a_1 a_0$ (此 $a_3=1, a_2=1, a_1=0, a_0=1$) 之右端 a_0 開始， a_0 為 1，被乘數 A (此 $A=10101$) 加之，若為 0 不加。其次 a_1 進一位， a_1 為 1 時 A 之末尾加一個 0，若為 0 不加。以下同法繼續運算。

乘數 $\rightarrow 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$ (以下位數依順序)

$$(1001) \quad 10101 + 0 + 1010100 + 10101000$$

(4) 2 進數的除算，與 10 進數的情形相同。又就除算言，減算的應用可行之。

解答

$$(1) \quad 11110$$

$$\begin{array}{r} + 10111 \\ \hline 110101 \end{array}$$

$$11100$$

$$\begin{array}{r} - 1111 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$(3) \quad 10101$$

$$\begin{array}{r} \times 1101 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ 10101 \\ 10101 \\ \hline 100010001 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{r} 1010 \cdots \cdots \text{商} \\ 101 \overline{) 110011} \\ \underline{101} \\ 101 \\ \underline{101} \\ 101 \end{array}$$

1 ... 餘數

(答) (1) 110101 (2) 1101 (3) 100010001 (4) 1010 餘 1

擴展問題

下列 12 進數的計算及 2 進數的計算，比較何者較為簡單。但，10, 11 相當數以 a, b 之記號表示之。

(1) $859a b + b 67 a 4$

(2) $b 710a - 8ba 32$

(3) $a 3257 \times b 4$

(4) $18a 98 \div 4 b 2$

要點

2 數之和或積

超過 12 時，此值除以 12。商為進位的數，餘數為原位之數。以下為此例。

$$9 + 11 = 20$$

$$20 \div 12 = 1 \cdots 8$$

(商)(餘數)

解答 在 12 進數，需注意為 12 時進一位，其後與 10 進數的計算相同。

$$\begin{array}{r} (1) \quad \begin{array}{r} 859ab \\ + b67a4 \\ \hline 180593 \end{array} \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \begin{array}{r} b710a \\ - 8ba32 \\ \hline 27298 \end{array} \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad \begin{array}{r} a3257 \\ \times \quad b4 \\ \hline 3509a4 \\ 94b315 \\ \hline 9843b34 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdots \cdots \text{(答)} \\ \cdots \cdots \text{(答)} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad \begin{array}{r} 4b2 \overline{) 18a98} \\ \underline{1788} \\ 1218 \\ \underline{9a4} \\ 434 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdots \cdots \text{(答)} \\ \cdots \cdots \text{(答)} \end{array} \end{array}$$

2 進數及 12 進數計算的比較

- (a) 用 2 進數其數僅 0 及 1，12 進數需用 12 個數甚煩雜。
- (b) 進位時，在 2 進數為 2，12 進數為 12，進位時與原來的數找出甚煩雜。

習題 (解答在第 132 頁)

2.2. 計算下列 2 進數。

(1) $11000 + 10010$

(2) $10111 + 111$

(3) $11101 - 10101$

(4) $11000 - 10001$

(5) 10011×10011

(6) 11101×10110

(7) $11001 \div 111$

(8) $10110 \div 101$

例題 3. 下列之 2 進數之乘算，減算化為加算的計算。

(1) 1101×11

(2) 1101×1101

(3) $1101 - 1001$

(4) $1001 - 111$

解法 (1), (2) 以 (a) 10 進數計算 $13 \times 3 = 13 + 13 + 13$

2 進數 11 為 10 進數之 3, 1101×11 為 1101 加三次。

$$1101 \times 11 = 1101 + 1101 + 1101 = 100111$$

$$(b) 1101 \times 11 = 1101 \times (10 + 1) = 11010 + 1101 = 100111$$

此計算以別種方式

查乘數的最初 (右端) 之數為 1 或 0, $\begin{array}{r} 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ + 1101 \\ \hline 100111 \end{array}$ } 乘數
若為 1 記錄被乘數 1101, 若 0 不記錄, 向 + 110101
左與被乘數平行挪一位數。查乘數的第二數 (自右端起第 2 位) 為 1 或 0, 若為 1 記錄之。若 0 不記錄平行挪一挪。此運算繼續至左端之數為止, 求所記錄數的和。

(3), (4) $a > b$ 之數, 考慮 a, b (b 為 n 位之數) 的減算 $a - b$ 。

b 的補數以 b' 表示

$$b' = (n \text{ 位的最大數}) - b$$

應用 (n 位的最大數) + 1 = ($n + 1$) 位的最小數 (但, 整數的範圍)

$$\begin{aligned} a - b &= a - b + (n \text{ 位的最大數}) + 1 - (n + 1) \text{ 位的最小數} \\ &= a + b' + 1 - (n + 1) \text{ 位的最小數} \end{aligned}$$

解答 (1) $1101 \times 11 = 1101 \times 3$ (10 進數) = $1101 + 1101 + 1101 = 100111$

$$(2) \begin{array}{r} 1101 \\ 1101 \\ 1101 \\ + 1101 \\ \hline 10101001 \end{array} \left. \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \text{乘數}$$

$$(3) 1101 - 1001 = 1101 + 110 + 1 - 10000 = 100$$

$$(4) 1001 - 111 = 1001 + 0 + 1 - 1000 = 10$$

擴展問題

4位以下的2進數，例如，10等可由0010考慮之為4位的2進數。
在此問題，4位以下的2進數，全部皆可用4位表示之。

此時，回答下列各問題。

- (1) 10進數0, 1, 2, ..., 9全部用4位的2進數表示之。
- (2) 4位的2進數最大於多少，又此數相當10進數的多少。
- (3) 設任意的4位的2進數為 a, b 時

(a) 若 $a > b$ 則 $a + b' + 1$ 必然為5位的2進數。

(b) 若 $a < b$ 則 $a + b' + 1$ 為4位的2進數。

但， b' 為 b 的補數，即 $b' = 1111 - b$ 。

- (4) $a - b$ 的計算確定可由下列方法行之。

$$a + b' + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

- (a) 在①式的計算，因第5位有進位， $a - b$ 的答案為

$$a + b' + 1 - 10000$$

- (b) 若在①式的計算第5位不進位， $a - b$ 的答案為

$$-(a + b')$$

但， $(a + b')'$ 為 $a + b'$ 的補數，即 $(a + b')' = 1111 - (a + b')$

- (5) 應用(4)，計算下列10進數。

(a) $9 - 6$

(b) $3 - 5$

要點

此問題為根據2進化為10進法
電子計算機的減算的原理說明之。

解答 (1) $0 \rightarrow 0000, 1 \rightarrow 0001$

$2 \rightarrow 0010, 3 \rightarrow 0011, 4 \rightarrow 0100,$

$5 \rightarrow 0101, 6 \rightarrow 0110, 7 \rightarrow 0111,$

$8 \rightarrow 1000, 9 \rightarrow 1001,$

上所述皆為4位的2進數表示法。

(2) 4位的2進數的最大數因各位數皆為1

$$1111, 1111 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 15$$

$$(3) (a) \quad a + b' + 1 = a + 1111 - b + 1 \\ = 10000 + a - b$$

因 $a - b > 0, a + b' + 1$ 為5位的

(a), (b) 的減算，皆可用加算運算之。

根據第 5 位進位，查明答案的符號。

計算機為具有由輸入的 10 進數改為 2 進數的 10 進數的自動減算的裝置。像此問題為其構造的運算。

2 進數。

$$\begin{aligned} (b) \quad a+b'+1 &= a+1111-b+1 \\ &= 10000+a-b \end{aligned}$$

因 $a-b < 0$ ， $a+b'+1$ 為 4 位的 2 進數。

$$(4) (a) \quad a+b'+1-10000 = a+1111-b+1-10000 = a-b$$

$$\begin{aligned} (b) \quad -(a+b')' &= -\{1111-(a+b')\} \\ &= -\{1111-a-(1111-b)\} \\ &= a-b \end{aligned}$$

$$(5) (a) \quad 9 \rightarrow 1001, 6 \rightarrow 0110$$

$$a=1001, b=0110$$

$$a+b'+1=1001+1001+1$$

$$= \boxed{1} 0011$$

↑ 第 5 位有進位

$$a-b=a+b'+1-10000$$

$$= 1001+1001+1-10000$$

$$= 10011-10000$$

$$= 0011 \rightarrow 3$$

$$(b) \quad 3 \rightarrow 0011, 5 \rightarrow 0101$$

$$a=0011, b=0101$$

$$a+b'+1=0011+1010+1$$

$$= \boxed{} 1110$$

↑ 第 5 位不進位

$$a-b=-(a+b')' = -(0011+1010)'$$

$$= -(1101)'$$

$$= -0010 \rightarrow -2$$

習題 (解答在第 132 頁)

3. 將下列 2 進數之乘算，減算改為加算。

$$(1) \quad 10101 \times 1011$$

$$(2) \quad 10111 \times 10111$$

$$(3) \quad 10000 - 1011$$

$$(4) \quad 11111 - 10101$$

4. 由擴展問題之(5)，計算下列之 10 進數。

$$(1) \quad 8-5$$

$$(2) \quad 4-7$$