上海电視大学物理系試用教材

力学学习指导书

第四册

华东师范大学物理系理論物理教研組譚叔婴编

上 海 电 視 大 学

第七章 剛体动力学

1. 剛体是一种特殊的质点系。剛体中任意两个质点間的距离在整个运动过程中始終保持不变。我們又把剛体看成为由无限数目的质点組成的連續体，在剛体所占的空間內連續地布滿着质点。

2. 本章的內容与前一章是极其紧密地結合着的；我們学习的时候，应把这两章看为一个整体。

前一章讲述质点系动力学的普遍定理，是一般的；即对于一般的质点系都可适用。当然，对于剛体也可适用。

剛体虽是特殊的质点系，但却是我們在生产实踐与日常生活中最常遇到的一种质点系。因此，在我們結合实际时，剛体动力学便显得十分的重要。可以說，在本課程中，本章是实际上最重要的一章，同时也是占比重最大、內容极丰富的一章。我們将化大量的时間来学习，并应做較多的习题，因为只有这样才能深入掌握。

3. 本章的內容——将着重討論：

(1) 剛体定軸轉动的动力学問題；

(2) 剛体平面运动的动力学問題；

(3) 剛体定点轉动的动力学問題。

4. 在讲述剛体的定軸轉动之前，先讲述轉动慣量与剛体对于平行軸的轉动慣量間的关系(平行軸公式)。在所有关于剛体轉动的动力学問題里，轉动慣量的概念具有重要的地位。在剛体动力学中，最常遇到的是剛体对軸的轉动慣量；它是剛体轉动时慣性的度量。

对于簡单形状的均质剛体，其轉动慣量可用积分方法由定义直接計算。对于形状不規則或不均质的物体来說，要用計算方法来求轉动慣量是很困难的。有时可用实驗方法測定轉动慣量。因

此在工程实际中，时常采用这方法。較常用的方法有物理摆法（摆动振动法）与扭轉振动法等。

此外，还介紹了慣性积（或称慣量积）与慣性主軸，以备讲定点轉动时之用。

5. 剛体的定軸轉动：

(1) 一般常用第三定理（质点系动量矩定理）与第四定理（质点系动能定理）来解决剛体定軸轉动的动力学問題。

将第三定理应用于剛体定軸轉动，便得剛体定軸轉动的基本方程（有許多书称为剛体定軸轉动的微分方程），卽教材（7.3-3）式：

$$I\frac{d\omega}{dt}=I\frac{d^2\theta}{dt^2}=L_z$$

将第四定理应用于剛体定軸轉动，便得剛体定軸轉动的动能定理，卽教材(7.3-5)式：

$$dT=L_z\,d\theta$$

(2) 剛体定軸轉动的微分方程 $I\frac{d^2\theta}{dt^2}=L$ 与质点直綫运动（以及剛体直綫平动）的微分方程 $m\frac{d^2x}{dt^2}=F$ 完全相对应。因此，在质点动力学中有关质点直綫运动的一切結論，都可以移用于剛体定軸轉动；——只要用轉角 θ 代替坐标 x，角速度 ω 代替綫速度 v，角加速度 α 代替綫加速度 a，力矩 L 代替力 F，轉动慣量 I 代替质量 m 等等。

由以上对比可以知道，质量是质点运动（或剛体平动）时慣性的度量，而轉动慣量是剛体轉动时慣性的度量。

6. 对剛体平面运动的两种看法：

(1) 作平面运动的剛体的任何运动，都可以看作由一个以基点为代表的平动和一个繞基点的轉动所組成。

基点的选擇是任意的。

平动部分与基点的选擇有关。轉动部分的轉角与基点的选擇

无关,因此轉动角速度和角加速度也与基点的选擇无关。

在解決实际問題时,一般总选擇剛体的质心为基点,因为这样有利于問題的解决。

(2) 剛体的平面运动也可以单純地看作一次轉动。

讲述瞬时轉动中心(簡称瞬时轉心或瞬心,又名卽刻轉心,又名瞬时速度中心)的概念及其求法。

7. 关于解决剛体平面运动动力学問題的方法:

(1) 一般的(絕大多数的)力学課本都是这样讲的:卽联合运用第二定理与第五定理来解决剛体平面运动的动力学問題。由这两个动力学普遍定理,我們可得三个方程,卽教材43頁上的(7.6-1)式与(7.6-2)式:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_c}{dt^2}=\sum F_{ix} \\ M\dfrac{d^2y_c}{dt^2}=\sum F_{iy} \\ I_c\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\sum L_{iz} \end{cases}$$

一般的力学課本把这三个方程式称为剛体平面运动微分方程式(或称为剛体平面运动基本方程式);并說,用它們来解决凡属剛体平面运动的动力学問題。

(2) 而我們准备这样讲:

(i) 首先,按照一般的习惯讲法(卽上述的方法)来讲。

(ii) 然后,打破常規,用自己的讲法来讲——:

应当强調指出,应用剛体平面运动微分方程式(或基本方程式)来解决剛体平面运动动力学問題的方法并不是唯一的方法。

其实,我們尽可不必拘泥于这个方法;我們可以根据各問題的实际具体情况,十分灵活地綜合运用动力学的各个普遍定理,用各种不同的方法来解决問題。

举例来說:我們可以联合运用第二定理与第三定理来解决剛体平面运动动力学問題;也可以联合运用第二定理与第四定理来

解决問題；也可以联合运用第二定理与第六定理来解决問題；……等等。用这些方法有时反比用基本方程式易于解决問題。有时，一个問題同时可以用許多各种不同的方法来解决。經过大量地解决实际問題，才能对所有普遍定理有較深的体会与領悟，融会貫通。

8. 对于任一动点 O' 的动量矩定理和它的特殊情况——对于某些匀质剛体的瞬时轉心的动量矩定理：

若 O' 是任一动点，在教材 44 頁上我們証明了对于 O' 点的动量矩定理为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_{O'}+\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{Q}=\sum\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i\text{。}\qquad(7.6\text{-}4)$$

这个定理的实用价値幷不大。但它的特殊情况，即合于条件 $\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{Q}=0$ 时，却常应用。

在剛体平面运动的动力学的某些問題中，有一些匀质剛体的瞬时轉心是合乎上述条件的动点，它的速度 $\boldsymbol{v}'$ 在运动过程中始終保持与同时刻的质心速度平行，故 $\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{Q}=0$，因而(7.6-4)式变为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_{O'}=\sum\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i,$$

或写作

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_{O'}=\boldsymbol{L}_{O'};\quad\text{或}\quad\frac{d}{dt}\boldsymbol{G}_E=\boldsymbol{L}_E\text{。}$$

这个对某些匀质剛体瞬时轉心的动量矩定理具有和第三定理与第五定理相同的数学形式。这个定理在解决实际問題时往往很有用，以后我們常要应用它，为了称呼方便起見，我們簡称它为第七定理。

至此，我們可以得出一个小結論，即动量矩定理常应用于三种点：

(1) 任一固定点 O (即第三定理)；

(2) 质点系或剛体的质心 C (即第五定理)；

(3) 某些匀质剛体的瞬心 E(即第七定理)。

而对于任意动点的动量矩定理却很少用,因为用(7.6–4)式来解題实际上很不方便。

应当注意: 第一、二、三、四、五、六定理是质点系动力学的普遍定理,当然也适用于剛体动力学。第七定理并不是普遍定理,但在我們解决剛体平面运动动力学問題时却常应用。

9. 在讲述剛体定点轉动动力学之前,需先讲述剛体对于相交軸的轉动慣量間的关系,幷引入慣量椭球(或称慣性椭球)的概念。慣量椭球使通过剛体內一点的所有軸的轉动慣量之間的关系有一个清楚的几何概念。

10. 欧拉角:

作定点轉动的剛体具有三个自由度, 需用三个独立的坐标来确定它的位置。 这三个坐标的选取方法是可以不同的, 其中几何意义最清楚而又最有实用价值的是欧拉所提出的三个参数 φ, ψ 和 θ, 它們都是角度,称为欧拉角。

11. 运用矢量投影定理, 可以很快得出欧拉运动学方程, 卽教材(7.8–2)式

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi\\ \omega_y&=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi\\ \omega_z&=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi\end{aligned}\right\}$$

此式給出了 ω 在动坐标軸上的三个投影与三个欧拉角的时間导数之間的关系。如果知道了剛体定点轉动的运动方程,卽 $\varphi=\varphi(t)$、$\psi=\psi(t)$、$\theta=\theta(t)$, 就可根据此式求得 ω 的三个投影 ω_x、ω_y、ω_z; 反之,如果知道了 ω 的三个投影,則可由此式求出欧拉角的三个导数。

12. 欧拉动力学方程:

在导出欧拉动力学方程 (剛体定点轉动的动力学方程) 之前, 先求出剛体作定点轉动时的动量矩表示式与动能表示式。

将第三定理应用于剛体定点轉动,略加变化,很快就得到

$$A\frac{d\omega_x}{dt}+(C-B)\,\omega_y\omega_z=L_x$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt}+(A-C)\,\omega_z\omega_x=L_y$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt}+(B-A)\,\omega_x\omega_y=L_z,$$

这就是剛体定点轉动的欧拉动力学方程，即教材(7.9–8)式。

所以，欧拉动力学方程实质上就是第三定理。

13. 只用欧拉动力学方程还不能求出剛体定点轉动的运动規律来，即不能求得 $\varphi=\varphi(t)$、$\psi=\psi(t)$、$\theta=\theta(t)$；只有再找得三个补充方程，才能解决問題，而欧拉运动学方程正是我們所需的补充方程。

把欧拉动力学方程和欧拉运动学方程(一共六个方程式)联立起来，我們就得到六个一阶非綫性常微分方程，由这两組方程消去 ω_x、ω_y、ω_z，就得到 φ、ψ、θ 的三个二阶微分方程，解它們就可得到剛体定点轉动的运动規律：$\varphi=\varphi(t)$，$\psi=\psi(t)$，$\theta=\theta(t)$。

理論上，联合应用欧拉动力学方程和欧拉运动学方程应該可以解决剛体定点轉动动力学的一切問題。

实际上，由于数学上的困难，只在三种特殊情况下才能求解，这三种情况是：欧拉情况、拉格朗日情况与柯娃列夫斯卡雅情况。

其中，最重要的是拉格朗日情况。較不重要的是柯娃列夫斯卡雅情况，而且这种情况还要遇到超椭圓型积分，数学上也比較难，因此不在本課程范圍之內。

14. 在本章之末，讲述回轉仪的近似理論及其应用。

凡是非常快速地繞对称軸旋轉的匀质剛体都称为回轉仪。

当外力矩为零时：回轉仪都有保持其轉軸方向不变的特性。而且，动量矩 $\boldsymbol{G}$ 的大小和方向也保持不变，并与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 及轉軸相重合。

当外力矩不为零时：回轉仪由于外界原因发生进动，产生回轉力矩；这回轉力矩企图使轉动軸轉向进动軸，这种現象叫做回轉

效应。

回轉仪在工程技术上的应用很广，主要如回轉稳定器与回轉罗盘等。

15. 本章是本課程中作为重点的一章。望学习时格外鼓足干劲，以期得到极好的学习成績。

第八章　分析力学大意

1．分析力学是应生产实踐的要求而产生，并随生产的发展而发展。自十八世紀以后，机械工业大大发展，提出大量的新的力学問題，分析力学就是在解决这些問題的过程中发展起来的。这些問題的主要特点是：許多物体互相約束，而且系統是由更多的物体所組成。这时，用旧的方法已經不能适应解决这些問題的要求。分析力学继承了以前力学发展的成果，給出解决力学問題的更广的道路和方法，开辟了解决受約束的物体以及更为复杂的质点系的运动問題的新途徑，从而把理論力学推向新的阶段。分析力学不仅使复杂的力学問題可能得到解决，而且它对于进一步学习理論物理也是十分重要的。

2．本章的主要內容：

(1) 虛位移原理(虛功原理)；

(2) 达朗貝尔原理；

(3) 达朗貝尔-拉格朗日方程；

(4) 拉格朗日方程(第二类拉格朗日方程)；

(5) 哈密頓方程。

其中，尤以(4)、(5)为主要。本章只研究完整系。

3．本章讲述的綫索(系統性)如下：

$$\left.\begin{array}{l}\text{虛位移原理}\\ \text{达朗貝尔原理}\end{array}\right\}\longrightarrow\text{达朗貝尔-拉格朗日方程}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\text{拉格朗日方程}\longrightarrow\text{哈密頓方程。}$$

分析力学的基础是虛位移原理与达朗貝尔原理。虛位移原理給出解决力学系統平衡問題的普遍原理；达朗貝尔原理使我們可以用平衡的观点来处理动力学問題。将这两个基本原理結合起来，便得到达朗貝尔—拉格朗日方程，它是动力学的普遍方程。从

达朗貝尔一拉格朗日方程出发，并运用数学工具把它广义化、一般化，我們便得到拉格朗日方程与哈密頓方程。

4．在讲述虛位移原理之前，需先讲述約束与虛位移的概念。

約束：是事先对系統的位置（或位置与速度）所加的限制。

研究約束对物体的限制，我們引入虛位移的概念。

虛位移：是系統在約束条件允許之下，可能发生的一切不需要时間的无穷小位移。

虛位移与实位移不同：实位移是系統实际所发生的位移；而虛位移只說明系統在約束条件下运动的可能性，它不是系統实际运动所作的，它是想象的，不需要时間的，而且决定于系統在当时的位置和当时所受的約束。

我們得到两个結論：——

(1) 在稳定約束的情况下：实位移为諸虛位移之一（实位移与我們任取的某一虛位移可能一致，也可能不一致）。

(2) 在不稳定約束的情况下：实位移与任何的虛位移都不相同。

要点在于：虛位移不需时間；而实位移需要时間 dt。（即 $\delta t=0$，而 $dt\neq 0$。）

5．我們所讲的虛位移和虛位移原理，仅限于理想的双面約束。

6．虛位移原理是靜力学的普遍原理，又是分析力学的一个基础；它說明了在理想的双面約束条件下系統平衡的充分必要条件。

在讲述虛位移原理时，有一点应該指出，使学員們注意：——在虛位移原理中，我們的目的是处理系統的平衡問題，然而并不是孤立地靜止地研究平衡这一特定状态，而是改变这个平衡状态，給予系統虛位移，从变革中认識平衡时的規律。这辯証的观点在认識事物本质与客观規律时是十分重要的。

虛位移原理的数学表示式是：

$$\delta W=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0; \tag{8.2-5}$$

如用广义坐标表示虚位移原理则为：

$$\delta W=\sum_k Q_k\delta q_k=0\ 。$$

有了虚位移原理，我們就找到了特别是解决多約束系統的靜力平衡問題的普遍而又簡捷的方法。

虚位移原理的主要貢献是在于它不包含未知的約束力在內，即消除了約束。

7. 达朗貝尔原理是力学的重要原理之一；而且，它又是分析力学的一个基础。

通过这个原理，借助于引入慣性力的概念，可以将质点与质点系的动力学問題，在形式上归結为靜力学問題，因而提供了极大的方便。它为我們提供了研究动力学的一个新的普遍的方法，即用靜力学中研究平衡的方法来研究动力学問題，故又称为动靜法。这个方法不但在工程力学剛体动力学中有广泛的应用；而且在分析力学的建立与发展过程中，它起了极其重要的作用。

达朗貝尔原理的主要貢献是在于它能使虚位移原理应用到动力学問題上来；并当約束是完整的和理想的时候，能把未知的約束力消去。

8. 虚位移原理和达朗貝尔原理是分析力学的基础，将它們結合起来，即把虚位移原理应用于动力学問題，由于約束是理想的，所以約束力的虚功之和为零，即 $\sum N_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，因此很容易地就可得到达朗貝尔-拉格朗日方程：

$$\sum(\boldsymbol{F}_i-m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0。 \tag{8.3-6}$$

这一方程是动力学的普遍方程。从它出发，既可推导出以前讲过的动力学的基本定理，又可推导即将讲述的拉格朗日方程以及哈密頓原理等等。

达朗貝尔-拉格朗日方程的特点是：

(1) 一切理想約束的約束反作用力从方程中自动消去；

(2) 在具有任意多个自由度的系統中，方程的数目恒与系統的自由度数目一致；因此，本方程提供了具有任意多自由度的系統的全部运动方程式，其普遍性亦正在此。

9. 簡言之，我們現在所讲授的分析力学要解决两个主要矛盾：

(1) 消約束；

(2) 換坐标(即換为广义坐标)。

綜合上述，虛位移原理給出了消除約束后，处理平衡問題的普遍方法；达朗貝尔原理提供了把动力学問題在形式上化为平衡問題的可能性；而两者的結合——达朗貝尔-拉格朗日方程就給出了消除約束后的动力学普遍方程。至此，第一个主要矛盾（消約束）已然解决。剩下来需待解决的問題就只有設法把达朗貝尔-拉格朗日方程換成广义坐标的形式了。

此后，我們的任务就是要解决这第二个主要矛盾：从达朗貝尔-拉格朗日方程出发(注意：此时約束已經消除了!)，把它化为广义坐标形式，即得出拉格朗日方程。

10. 如何推导拉格朗日方程，是本章中在数学推演方面的一个难点；其过程比較长而繁，为了有助于学員們学习起見，特将綫索与要点叙述如下：

(1) 用广义坐标表示虛位移；

(2) 用广义坐标表示主动力的虛功，即(8.5-3)式；

(3) 用广义坐标表示慣性力的虛功，得到两項，即(8.5-4)式；

(4) 为了将(8.5-4)式作进一步的变换，必需借助两个輔助等式，即(8.5-5)式与(8.5-6)式，而这两个关系式需要加以証明；

(5) 将这两个輔助等式代入(8.5-4)式，于是(8.5-4)式就变为(8.5-4′)式；

(6) 最后，将(8.5-3)式与(8.5-4′)式代入达朗貝尔-拉格朗日方程，得：

$$\begin{aligned}&\sum_i (\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\\&=\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i\boldsymbol{a}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\\&=\sum_k Q_k\delta q_k - \sum_k\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\partial q_k\\&=\sum_k\left[Q_k-\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k=0,\qquad(8.5\text{–}10)\end{aligned}$$

由于所有 δq_k 的独立性与任意性，立即得到拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k。\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)\qquad(8.5\text{–}11)$$

11. 上述的(8.5–11)式是拉格朗日方程的一般形式；在保守力場的特殊情况下，很容易就得到拉格朗日方程的另一形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0。\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)\qquad(8.5\text{–}12)$$

因此，拉格朗日方程有两种形式。(8.5–11)式是一般形式。(8.5–12)式是在保守力場中的特殊形式；虽是特殊形式，但在生产实踐与日常生活以及自然現象中极多的問題都属保守力場問題(如彈性力場、重力場、万有引力場)，因此它也十分有用。

12. 拉格朗日方程的优点：

拉格朗日(Lagrange)的重要貢献是将动力学普遍方程由原来的形式化为广义坐标形式。拉格朗日方程是一組联立方程，它們都是以广义坐标 q 为因变数，以时間 t 为自变数的二阶常微分方程，而方程的数目等于系統自由度的数目 ν。由此可見，系統所受的約束愈多，自由度数就愈少，要解的运动微分方程数目也就愈少，这就是拉格朗日方程的最大优点。此外，我們还可以看到在拉格朗日方程中不再出現未知的約束力，也就是說，拉格朗日方程可以完全消除約束。

13. 拉格朗日方程适用于研究具有完整的理想約束的质点系动力学問題，应用它可以很簡捷地写出系統的运动微分方程式。

应用拉格朗日方程解决具体問題时，一般可采取如下的步驟：

(1) 明确系統，弄清楚所考虑的系統究竟包括那些物体。

(2) 确定系統的自由度，再选一套适当的广义坐标。必須注意：坐标选得恰当会使問題处理起来比較簡捷方便。

(3) 将系統的动能 T 表达成广义坐标的形式：$T=T(q, \dot{q}, t)$。

一般情况，T 是广义速度的二次式；如果約束是稳定的，则 T 是广义速度的二次齐次式。

(4) 写出广义力 Q_k。

广义力本来可以用定义(8.5-3′)式来求，但实际上此法少用。比較簡捷而且常用的方法是这样的：

給系統以这样的虛位移，只令广义坐标 q_k 有一变更 δq_k，而其他广义坐标都不变，这样得出的虛功表示式将具有 $Q_k\delta q_k$ 的形式，由此立即得到广义力 Q_k。

特殊情况：——如主动力是保守力，则求出系統在任意位置时的勢能 Π，且以广义坐标来表达这一勢能。然后建立拉格朗日函数 $L=T-\Pi$。一般情况：$L=L(q, \dot{q}, t)$。

(5) 将已經求出的 T 和 Q_k 代入拉格朗日方程(8.5-11)式，或将 L 代入拉格朗日方程(8.5-12)式，这样就可得出质点系的运动微分方程。

余下的工作，只是去解这些微分方程，求出广义坐标 q_k 对时間 t 的函数关系，即运动規律 $q_k=q_k(t)$。

14. 拉格朗日方程的第一积分：

(1) 对于保守、稳定、完整系統，拉格朗日方程給出能量积分；

(2) 当拉格朗日函数不显含某广义坐标 q_k 时，拉格朗日方程給出循环积分。

利用能量积分及循环积分，即可得到运动微分方程式的一次积分式。

15. 从拉格朗日方程出发，借助于广义动量 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$，并規定一个新的函数 H（称为哈密頓函数）：

$$H=\sum_k p_k\dot{q}_k-L, \tag{8.7-5}$$

經过一些数学推演,很易得到:

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_k&=\frac{\partial H}{\partial p_k},\\ \dot{p}_k&=-\frac{\partial H}{\partial q_k}。\end{aligned}\right\}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu) \tag{8.7-8}$$

这就是哈密頓方程,或称为正則方程,它們是以 q, p 为因变数,以 t 为自变数的 2ν 个一阶常微分方程。

16. 哈密頓(Hamilton)的重要貢献,是通过作变数替換,以正則变数(又名正則共軛量) q, p 来替换拉格朗日变数 q, $\dot{q}$; 把拉格朗日方程降阶,由 ν 个以 q 对 t 的二阶常微分方程变为 2ν 个以 q, p 对 t 的一阶常微分方程——正則方程。

在解决实际問題时,哈密頓方程和拉格朗日方程是等价的。但是哈密頓方程在形式上比拉格朗日方程要簡单,在許多較复杂的力学問題中(如天体力学、振动問題),更便于作普遍討論;而且,与哈密頓正則方程相联系所引进的新的概念(如正則共軛量),在理論物理中(如統計物理、量子力学等)有很多用途。

17. 应用哈密頓正則方程解决具体問題时,一般可采取如下的步驟:

(1) 确定系統的自由度,选取适当的广义坐标。

(2) 写出动能 $T(q,\ \dot{q},\ t)$ 与势能 $\Pi(q,\ t)$ 的表达式。

(3) 求出 $p_k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, 并反解出 $\dot{q}_k=\dot{q}_k(q,\ p,\ t)$。

(4) 求出哈密頓函数 $H(q,\ p,\ t)=\sum p\dot{q}-L$。

如果是稳定約束,可直接写出 $H=T+\Pi$, 再将 $\dot{q}_k=\dot{q}_k(q, p, t)$ 代入,即把其中变数换成 q, p, t, 即写出 $H=H(q,\ p,\ t)$。

(5) 把 $H(q,\ p,\ t)$代入正則方程(8.7-8),即可得出系統的运动微分方程。

余下的工作,只是去解这些微分方程了。

总 习 题

1．求証匀质正圓錐体对于錐体的对称軸的轉动慣量为 $\frac{3}{10}MR^2$。M 为錐体的质量，R 为錐底面半徑。

2．求証匀质正圓錐体对于通过頂点而与錐体的对称軸垂直的直綫的轉动慣量为 $\frac{3}{5}M\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right)$。$M$ 为錐体的质量，R 为錐底面半徑，h 为錐的高度。

3．求証一半徑为 R 的匀质球体对于一直徑的回轉半徑为

$$k=\sqrt{\frac{2}{5}}R。$$

4．一均质細直杆 AB，长 l，质量为 m，对于与杆垂直离杆 A 端 x 距离的 L 軸的轉动慣量和在 A 处的质量为 M 的一质点对于 L 軸的轉动慣量有同一的值。

(1) 問 x 为何值时，M 的值最小？

(2) 又問这 M 的极小值是多少？

(答：$2l/3$；$m/4$)

5．一均质正圓錐体，质量为 M，其对称軸的方位为鉛垂，其尖端向上。今在其表面上沿一母綫钻一細槽。在开始时，圓錐繞其对称軸的角速度为 ω_0，一质量为 m 的小球无相对初速自槽的上端自由滑下，試求当小球滑出槽时圓錐的角速度。

$$\left(\text{答：}\ \omega=\frac{\omega_0}{1+\frac{10m}{3M}}\right).$$

6．同质量的两小球 A 与 B 用一細杆連接，此杆可在鉛垂平面內繞固定点 O 轉动。設杆的质量可忽略不計，且 $OA=a, OB=b$，$a>b$。試求此摆的小振动周期。

$$\left(\text{答：}\ T=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a-b)g}}\right)$$

7．均质棒重 P，其两端悬于二平行绳上，此时棒的位置为水

平。如其中一绳断了，求在此瞬間另一绳子的張力。

$$\left(\text{答：}\frac{P}{4}\right)$$

8．轉动惯量为 J_1 和 J_2 的两个轉子，各自以角速度 ω_1 和 ω_2 繞相同的軸轉动。現在利用离合器将两个轉子突然接合在一起。求它們在一起轉动的角速度。

$$[\text{答：}\omega=(J_1W_1+J_2W_2)/(J_1+J_2)]$$

9．一繞水平軸轉动的滑輪其重量为 G_1，半徑为 r，而其质量是沿輪緣均匀分布的。取一根绳（质量不計），将绳的一端繞于滑輪上，而另一端系重物 G_2。若在滑輪上作用一轉动力矩 $M(M>G_2r)$，M 的轉向使 G_2 产生向上的加速度，試求 G_2 的加速度。

$$\left(\text{答：}a=\frac{M-G_2r}{r(G_1+G_2)}g=\text{常量}\right)$$

10．一重为 G，半徑为 r 的圓盘可在水平面上作純滚动。但这圓盘的质心 c 和它的几何中心 o 不重合，且 $oc=d$。圓盘对通过质心并垂直于盘面的轉动惯量为 J_c。求圓盘受微小扰动后的运动規律。并討論。

$$\left[\text{答：}\varphi=A\sin\left(\sqrt{\frac{Gd}{J_c+\frac{G}{g}(r-d)^2}}\,t+\alpha\right)\text{其中 }A,\alpha\text{ 为积分常数}\right]$$

11．龙門刨床的工作行程为 2 米，进刀时間为 10 秒，刨削力等于 1200 公斤，由于摩擦等所造成的損失为 20%。設刨削的速度均匀，求刨床的功率（单位用馬力）。

（答：4 馬力）

12．飞輪重 $G=60$ 公斤，直徑 $d=50$ 厘米，回轉半徑 $\rho=20$ 厘米，轉速 $n_0=1000$ 轉/分。若制动时閘瓦的压力为 $N=50$ 公斤，閘瓦与飞輪間的摩擦系数为 $f=0.4$，試求制动后經过多少时間与轉过多少圈飞輪才靜止。（用动量矩定理做）

13．一絞車，其实心圓柱形鼓輪直徑 $d=50$ 厘米，重量为 $G=$