一九八五年

士研究生入学数学试题汇解

（含日本国大学研究生院入学试题选编）

《工科数学》编辑部编

一九八五年

全国硕士研究生入学数学试题汇解

（含日本国大学研究生院入学试题选编）

《工科数学》编辑部编

前　言

本刊自开辟《硕士研究生入学试题选登》专栏以来，受到广大读者的欢迎，来函要求本刊能系统、全面地提供这方面资料。为了满足广大读者，特别是复习报考硕士研究生的在校学生的要求，我们以各有关单位惠寄本刊的试题为主要材料，并约请中国科学技术大学系的有关同志对日本国大学研究生院入学试题进行精选，编写出版这本《一九八五年硕士研究生入学数学试题汇解》，供广大读者参考。

考虑到既不增加读者负担，又能帮助读者了解硕士研究生入学对数学知识的基本要求，本书介绍的基本上是教育部重点院校、各部委重点院校、科研单位以及各系统中具有代表性院校的试题。为了帮助读者了解国外同水平研究生入学的数学要求，作为本书的附录介绍了日本国大学研究生院入学试题（包括解答）选编之一至五。编入本书的试题类型典型全面，代表性强，并全部作了详细解答，有的还给出多种解法。因此，本书的复习报考硕士研究生的读者有直接的指导作用，对在校大学生提高解题能力和技巧也有著较好的参考作用。本书对教师来说也是一本有保留价值的参考资料。

在本书编写过程中，蒙中国科学院、各高等院校大力支持，惠寄大量试题，在此，向为本刊提供试题的单位和有关同志表示衷心感谢。限于篇幅，无法容纳收到的全部试题，对未编入本《汇解》的试题的提供单位表示歉意，这些试题我们将分期在《工科数学》“硕士研究生入学试题选登”专栏中发表。

参加本《汇解》汇编工作的有本刊编辑部宁日晖、潘麟生、瞿荣杰、李龙光、苏化明等同志。

限于编者水平，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

《工科数学》编辑部

一九八五年四月

目　　录

（按收到试题的顺序排序）

附　录

中国科学院

高等数学（三）

一、（10分）设

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & 当x\neq 2y时,\\ 0, & 当x=2y时。\end{cases}$$

求函数$z=f(x, y)$的间断点。

解 显然，当$x\neq 2y$时，$f(x, y)$连续；设(x_0, y_0)是直线$x=2y$上一点，则

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(x_0, x_0)\\ x\neq y}} f(x, y)=x_0$$

当$x_0\neq 0$时，上面极限值$\neq f(x_0, y_0)=0$，即除原点以外的直线$x=2y$上的所有点，都是$f(x, y)$的间断点。又

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)=0=f(0, 0)$$

故$f(x, y)$在原点连续。

二、（10分） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$ （e为自然数之底）。

解 因$e^{t^2}=1+t^2+\frac{1}{2}t^4+\cdots$，故

$$原极限=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)}{x^2[2x-1/3!(2x)^3+\cdots]}=-\frac{1}{6}$$

三、（10分）设A为实对称矩阵。证明：若$A^2=0$，则$A=0$。（0表示零矩阵）

解法一 因A是实对称矩阵，故存在正交矩阵P，使

$$P'AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\lambda_n\}$$

$$故P'A^2P=\mathrm{diag}\{\lambda_1{}^2, \lambda_2{}^2, \cdots, \lambda_n{}^2\}$$

因$A^2=0$，故$P'A^2P=0$，从而$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$。

所以 $A=P\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\cdots\}p'=0$

解法二 设$A=(a_{ij})$，则$a_{ij}=a_{ji}$，又记$A^2=(c_{ij})$，有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0$$

特别地 $c_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}{}^2=0$ （$i=1, 2, \cdots n$）

所以$a_{ij}=0$（$j, k=1, 2, \cdots, n$）。

四、（10分）某人掷不均匀钱币，出现反面的概念为p，$0<p<1$。求在两次反面之间出现正面的次数的概率分布和数学期望。

解 设第一次出现反面前正面出现的次数为X_1，再记第一次出现反面后正面出现的次为数X_2，则X_1与X_2独立同分布。因此只需求出X_1的概率分布与数字期望即可。易知

$$P\{X_1=k\}=q^k p \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中$q=1-p$，故

$$Ex_1=\sum_{k=0}^{\infty}kq^k p=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^k=pq\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=pq\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'$$

$$=pq\left(\frac{1}{1-q}\right)^2=\frac{1-p}{p}$$

五、（10分）求常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1-2x_2\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+x_2-2x_3\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt}=-2x_2\end{cases}$$

的通解。

解 记$d/dt=D$，把方程组改写成

$$\begin{cases}(D-2)x_1+2x_2=0 & (1)\\ 2x_1+(D-1)x_2+2x_3=0 & (2)\\ 2x_2+Dx_3=0 & (3)\end{cases}$$

（2）×D－（3）×2，得 $2Dx_1+(D^2-D-4)x_2=0$ （4）

（1）×（D^2-D-4）－（4）×2，得 $(D^3-3D^2-6D+8)x_1=0$

此方程的特征方程为$k^3-3k^2-6k+8=(k-1)(k-4)(k+2)=0$，故特征根为 1，－2。4，所以

$$x_1=c_1e^t+c_2e^{-2t}+c_3e^{4t}$$

其中c_1，c_2，c_3是任意常数。把x_1代入方程（1），得

$$x_2=\frac{1}{2}(2-D)x_1=\frac{c_1}{2}e^t+2c_2e^{-2t}-c_3e^{4t}$$

把x_1，x_2代入方程（2），得

$$x_3=-x_1+\frac{1}{2}(1-D)x_2=-c_1e^t+2c_2e^{-2t}+\frac{1}{2}c_3e^{4t}$$

六、（12分）求曲线积分

$$\oint_C\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}$$

之值，其中C为单位圆的正向。

解 C的参数方程是：$x=\cos t$，$y=\sin t$（$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$）。因而

$$\oint_C\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+3\sin t\cos t}{1+3\sin^2 t}dt=4\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+3\sin^2 t}$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+3\cos^2 t}=4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4+tg^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=4\int_0^{+\infty}\frac{du}{4+u^2}$$

$$=2\text{tg}^{-1}\frac{u}{2}\Big|_0^{+\infty}=\pi$$

七、（10分）设$f(x)$是可微函数，$f'(0)<0$且$f'(1)>0$。求证存在点$c\in(0,1)$使$f'(c=0$。

证法一 若$f(0)=f(1)$，则由Rolle定理知，存在$c\in(0,1)$使$f'(c)=0$；若$f(0)\neq f(1)$，设$f(0)<f(1)$，因

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}<0$$

因而存在$x_0\in(0,1)$，使$f(x_0)<f(0)<f(1)$，于是由连续函数中间值定理知，存在$x_1\in(x_0,1)$使$f(x_1)=f(0)$，再由Rolle定理，存在$c\in(0,x_1)$，使$f'(c)=0$，$f(0)>f(1)$的情况可类似证明。

证法二 因 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<0$

因而存在$x_0\in(0,1)$，使$f(x_0)<f(0)$，故$f(0)$不是$f(x)$在$[0,1]$上的最小值，同样，$f(1)$也不是(fx)在$[0,1]$上的最小值，又由连续函数的最值定理知，存在$C\in(0,1)$，$f(x)$在C上取得$[0,1]$上的最小值。从而由Fermat定理，有$f'(c)=0$。

八、（12分）已知$\text{arctg}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$|x|\leqslant 1$。求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\quad(|x|\leqslant 1)\text{之和。}$$

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}x^{2n}-2\text{arctg}x+2x=-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=(x^2)^n$$

$$+2(x-\text{arctg}x)=2(x-\text{arctg}x)-x\ln(1+x^2)$$

九、（16分）。设$f(x)=(x^2-1)^n$，n为正整数。

（1）证明当k为小于n的正整数时$f^{(k)}(1)=f^{(k)}(-1)=0$且$f^{(n)}(1)=2^n\cdot n!$，$f^{(n)}(-1)=(-2)^n\cdot n!$。

（2）求$\int_{-1}^{1}f(x)dx$和$\int_{-1}^{1}[f^{(n)}(x)]^2dx$之值。

证 （1）由Leibnitz公式，有

$$f^{(k)}(x)=[(x+1)^n(x-1)^n]^{(k)}=(x+1)^n\frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}$$

$$+c_n^1\frac{d(x+1)}{dx}\cdot\frac{d^{k-1}(x-1)^n}{dx^{k-1}}+\cdots\frac{d^k(x+1)^n}{dx^k}(x-1)^n$$

当k<n时，上式右端的每一项都含因子$(x+1)(x-1)$，故$f^{(k}(1)=f^{(k)}(-1)=0$，当$k=n$时，其右端从第二项起，各项含因子$(x-1)$，因而

$$f^{(n)}(1)=n!(x+1)^n\Big|_{x=1}=2^n\cdot n!$$

类似可求得$f^{(n)}(-1)=(-2)^n\cdot n!$

（2）令 $x=1-2t$，得

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n 2^{2n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^n dt=(-1)^n 2^{2n+1}B(n+1,\ n+1)$$

$$=(-1)^n 2^{2n+1}\frac{[\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)}=(-1)^n 2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

在推广的分部积分公式

$$\int_a^b uv^{(n)}dx=[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]\Big|_a^b+(-1)^n\int_a^b u^{(n)}vdx$$

中，令$u=f^{(n)}(x)$，$v=f(x)$并注意及$f^{(k)}(\pm1)=0$（$k<n$），得

$$\int_{-1}^{1}[f^{(n)}(x)]^2dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}f^{(2n)}(x)f(x)dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}x^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx=(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$=(2n)!2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2}{2n+1}(2n!!)^2$$

高等数学（四）试题

一、同（三）型第一题

二、（10分）已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\mathrm{arctg}x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c$，$c\neq0$求$p$和$c$。

解 因 $2\mathrm{arctg}x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\left(x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots\right)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots\right)$

$$+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots\right)=-\frac{4}{3}x^3+\cdots$$

由此可知，为使原极限存在且其值不为零，必须$p=3$，且此时$c=-4/3$。

三、（15分）求椭球面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点p（1，1，1）处的切平面和法线方程。

解 椭球面在点p（1，1，1）处的法向量

$\mathbf{n}=(4x,\ 6y,\ 2z)=(4,\ 6,\ 2)$

故所求切平面方程是

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0\text{即}2x+3y+z-6=0$$

法线方程是 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$

四、（15分）设$f(x)=x^3(x+4)e^x$。求函数$y=(x)$的极大值、极小值和拐点。

解 由$f'(x)=(x^4+8x^3+12x^2)e^x=x^2(x^2+8x+12)e^x=x^2(x+2)(x+6)e^x=0$

求得驻点 -6，-2，0。因 $f'(-6-0)>0$，$f'(-6+0)<0$ 故 $f(x)$ 以 $x=-6$ 为极大值点；因 $f'(0-0)>0$，$f'(0+0)>0$，$x=0$ 不是极值点；因 $f'(2-0)<0$，$f'(2+0)>0$，$x=-2$ 是 $f(x)$ 的极小值点。又

$$f''(x)=x(x^3+12x^2+36x+24)e^x$$

$x=0$ 是 $f''(x)=0$ 的一个根，且由 $f''(0-0)<0$，$f''(0+0)>0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的拐点。

记

$$\varphi(x)=x^3+12x^2+36x+24=x(x+6)^2+24$$

因 $\varphi(0)=24$，$\varphi(-1)=-1$，$\varphi(-3)=-3$，$\varphi(-4)=8$，$\varphi(-7)=17$，$\varphi(-8)=-8$，故在区间 $(-8,-7)$，$(-4,-3)$ 及 $(-1,0)$ 内 $\varphi(x)=0$ 各有一根，分别记作 x_1，x_2、x_3（$x_1<x_2<x_3$），于是

$$f''(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)x$$

因 $f''(x_1-0)>0$，$f''(x_1+0)<0$，故 x_1 是 $f(x)$ 的拐点。同理 x_2，x_3 也是拐点。综上 $f(x)$ 有四个拐点 x_1，x_2，x_3 及0。

注 因 $\varphi(x)$ 是首项系数为1的整系数多项式，故 $\varphi(x)=0$ 的有理根必是整数。易验证 $\varphi(x)$ 无整数根，所以 $\varphi(x)=0$ 的三根全是无理数。

五、（10分） 求微分方程 $\dfrac{xdy}{dx}-y=x^2+y^2$ 的通解。

解 把方程两边除以 x^2，得

$$\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

再令 $y/x=u$，得 $du/dx=1+u^2$，$du/1+u^2=dx$

所以 $\operatorname{arctg}u=x+c$

代回原变量，得通积分 $\operatorname{arctg}x/y=x+c$ 或 $y=x\operatorname{tg}(x+c)$

六、（15分）同（三）型第八题

七、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微且 $f(0)=1$，$|f'(x)|<f(x)$，$x\geqslant0$。求证 $f(x)<e^x$，$x>0$。

证 由所设条件，$f(x)>0$（$x\geqslant0$）。令 $F(x)=x-\ln f(x)$。有 $F(0)=0$。又当 $x\geqslant0$，由题设得

$$F'(x)=1-\frac{f'(x)}{f(x)}\geqslant1-\frac{|f'(x)|}{f(x)}>0$$

所以，当 $x>0$ 时，有 $F(x)>0$，即

$$x>\ln f(x),\quad e^x>f(x)$$

八、（15分）同（三）型第六题。

清　华　大　学

高等数学（甲类）

一、［10分］已知$\sqrt{x^2+y^2}=\exp\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]$，求$y'_x$及$y''_x$。

解：　两边取对数得：$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$　　　　（＊）

将（＊）式两边对x求导得$\frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}=\frac{xy'_x-y}{x^2+y^2}$

$\therefore y'_x=\frac{x+y}{x-y}$　（$x\neq y$和$x\neq 0$）

再将上式两边对x求导得：

$$y''_{xx}=\frac{(1+y'_x)(x-y)-(1-y'_x)((x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2xy'_x-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x\left(\frac{x+y}{x-y}\right)-2y}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\quad(x\neq y\text{和}x\neq 0)$$

二、〔10分〕计算曲线积分：$I=\int_L\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$其中L是从点$A$（$-a$，0）经上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$到点$B$（$a$，0）弧段。

解：　记$X=\frac{x-y}{x^2+y^2}$，$Y=\frac{x+y}{x^2+y^2}$

则$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，　$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore$当　$x^2+y^2\neq 0$时，即除去原点外$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$

因此，对于在XOY平面上任何一条不包含原点的闭曲线c，曲线积分

$$\int_c\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0$$

今考虑由上半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geq 0)$及上半圆$x^2+y^2=a^2(y\geq 0)$

所构成的闭曲线c_0'，那么有$\int_{c_0'}\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=0$

于是 $\int_{L(\overset{\frown}{AEB})} \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=-\int_{L^*(\overset{\frown}{BFA})}\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$

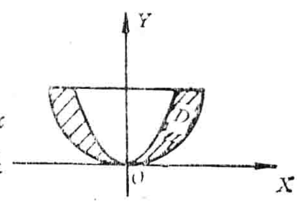
而 $\int_{L^*(\overset{\frown}{BFA})}\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=\int_0^\pi\Big[(\cos t-\sin t)(-\sin t)dt+(\cos t+\sin t)\cos t dt\Big]$

$=\int_0^\pi dt=\pi$

∴ $I=\int_L\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x^2+y^2}{x+y}dy=-\pi$

三、〔10分〕计算二重积分：$\iint\limits_D(x+y)d\sigma$，其中$D$是抛物线，

$y=x^2$，$y=4x^2$所围 成的区域。



解　区域D的图形如右，显然它对称于y轴而被积 函数$x+y$中的x对x是奇数，$x+y$中的y对x是偶函数设D_0是D位于 第一象限内的区域，于是有$\iint\limits_D(x+y)d\sigma=\iint\limits_D xd\sigma+\iint\limits_D yd\sigma=2\iint\limits_{D_0}yd\sigma$

$=2\int_0^1 dy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}ydx=\frac{2}{5}$

四、〔10分〕将$\cos x$在$0<x<\pi$内展开成以2π为周期的正弦富氏(Fourier)　级数，并在$-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$上写出该数的和函数，同时画出它的图形。

解　当$0<x<\pi$时，$\cos x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

其中：$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\Big]dx$

当$n=1$：$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin 2xdx=\frac{-1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^\pi=0$

当$n=2$，$3\cdots$时

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1-(-1)^{n+1}}{n-1}\right]=\frac{1+(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)$$

∴当$n=1$，3，5，…时：$b_n=0$，$n=2$，4，6，…时，$b_n=\frac{4n}{\pi(n^2-1)}$。

∴ $\cos x=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\left(\frac{m}{4m^2-1}\right)\sin 2mx\quad(0<x<\pi)$

$$\text{于是，}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\left(\frac{m}{4m^2-1}\right)\sin 2mx=\begin{cases}\cos x & x\in(-2\pi,\ -\pi)\\ & x\in(0,\ \pi)\\ -\cos x & x\in(-\pi,\ 0)\\ & x\in(\pi,\ 2\pi)\\ 0 & x=0,\ \pm\pi\pm2\pi\end{cases}$$

图略

五、〔10分〕设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&3&0&0&0\\0&0&a&a^2&a^3\\0&0&0&a&a^2\\0&0&0&0&a\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

（1）试给出矩阵A可逆的条件，并求A^{-1}；（2）当A不可逆时，二次型$X'AX$是否正定？并说明理由（其中X'是X的转置矩阵）。

解 ∵ $$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&3&0&0&0\\0&0&a&a^2&a\\0&0&0&a&a\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_6\end{pmatrix}$$

（1）

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&a^2&a^3\\0&a&a^2\\0&0&a\end{vmatrix}=2a^3,$$ A可逆的条件是$|A|\neq0$即$a\neq0$。下而求A^{-1}：

[方法一]

设 $A=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}$，$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}a&a^2&a^3\\0&a&a^2\\0&0&a\end{pmatrix}$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix}$ 而 $A_1^{-1}=\frac{1}{|A_1|}A^*_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

$$\because\left(\begin{array}{ccc:ccc}a&a^2&a^3&1&0&0\\0&a&a^2&0&1&0\\0&0&a&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}a&a^2&0&1&0&-a^2\\0&a&0&0&1&-a\\0&0&a&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}a&0&0&1-a&0&\\0&a&0&0&1-a&\\0&0&a&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{a}&-1&0\\0&1&0&0&\frac{1}{a}&-1\\0&0&1&0&0&\frac{1}{a}\end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \qquad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & & & \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{a} & -1 & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{a} & -1 \\ & & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

[**方法二**]
$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & & \\ 0 & 0 & a & a^2 & a^3 & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & & & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & & & & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & & & -1 & 1 & & & \\ & & a^2 & a^3 & 0 & & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & a & a^2 & & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & a & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 1 & & & & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & & & -1 & 1 & & & \\ & & a & a^2 & 0 & & & 1 & 0 & -a^2 \\ & & 0 & a & 0 & & & 0 & 1 & -a \\ & & 0 & 0 & a & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & & & & & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & & & \\ & 2 & & & & & & & & \\ & & a & & & & & 1 & -a & 0 \\ & & & a & & & & 0 & 1 & -a \\ & & & & a & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & & & & & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & & & \\ & 1 & & & & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & & & & \frac{1}{a} & -1 & 0 \\ & & & 1 & & & & 0 & \frac{1}{a} & -1 \\ & & & & 1 & & & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & & & \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{a} & -1 & 0 \\ & & 0 & \frac{1}{a} & -1 \\ & & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

（2） A不可逆时，$|A|=0$，即$a=0$。

二次型$X'AX=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&3&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$

不是正定二次型。理由如下。（回答其中之一即可）：

1）取$X=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0$，得$X'AX=0$，　∴二次型$X'AX'$不是正定的

2）∵ $\det A=\begin{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&3\end{matrix}&0\\0&0\end{vmatrix}=0$，　∴$A$不是正定矩阵，于是二次型$X'AX$不是正定的。

3）根据正定矩阵的必要条件：主对角元全大于0。∴A不是正定矩阵，于是$X'AX$不是正定的。

六、〔10分〕设$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$

试讨论p，t取什么值时，方程组有解或无解，并在有解时，求其全部解。

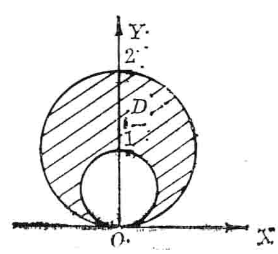
解　设方程组的增广矩阵为$[A|b]$，作初等变换：

$$[A:b]=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&1\\0&-1&p+6&-2&1\\0&-2&-4&-4&t\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{array}\right)$$

1）当$t\neq-2$时，无解，2）无论p，t取什么值，无唯一解。3）当$t=-2$时，有无穷多解。

i）当$p=-8$时，$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$　∴　$\begin{cases}x_1=4x_3-x_4-1\\x_2=-2x_3-2x_4+1\\x_3,\ x_4\text{任意}\end{cases}$

ii）当$p\neq-8$时，$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\(p+8)x_3=0\end{cases}$　∴　$\begin{cases}x_1=-1-x_4\\x_2=1-2x_4\\x_3=0\\x_4\text{任 意}\end{cases}$



七、〔10分〕求曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$　夹在两曲面$x^2+y^2=y$；$x^2+y^2=2y$之间的那部分的面积。

解　$x^2+y^2\geqslant y$与$x^2+{}^2\leqslant 2y$的公共部分的曲面的面积：

$$S=\iint_{\Sigma} ds$$

其中：Σ为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所对应的一部分，它在XOY平面上的投影为D

$\because \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$

$$\therefore S=\iint_{\Sigma} ds=\iint_{D}\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

八、［10分］设 $\begin{cases} x''(t)+2mx'(t)+n^2x(t)=0, \\ x(0)=x_1 \\ x'(0)=x_2, \end{cases}$ 其中；m、n为常数试求 $\int_0^{+} x(t)\,dt$

解：方程$x''(t)+2mx'(t)+n^2x(t)=0$的特征方程为$\lambda^2+2m\lambda+n^2=0$，$\therefore \lambda=-m\pm\sqrt{m^2-n^2}$。

$\because m>n$，$\therefore$特征方程有两个不同相等的实根，因此，方程的通解为

$x(t)=c_1e^{(-m+\sqrt{m^2+n^2})t}+c_2e^{(-m-\sqrt{m^2-n^2})t}$

$\because \lambda_1=-m+\sqrt{m^2-n^2}<0$，$\lambda_2=-m-\sqrt{m^2-n^2}<0$

容易知道，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)=0$

也不难道知，$\int_0^{+} x'(t)$ $\int_0^{+} x''(t)dt$都收敛

于是 $\int_0^{+} n^2x(t)dt=-\int_0^{+} x''(t)dt-\int_0^{+} 2mx'(t)dt=-\left[x'(t)+2mx(t)\right]\Big|_0^{+}$

$=x_2+2mx_1$

$$\therefore \int_0^{+} x(t)dt=\frac{x_2+2mx_1}{n^2}.$$

九、(10分)设$B=AA'$，其中$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$且$a_i$为非零实数($i=1,2\cdots,n$)，$A'$为$A$的转置矩阵。

(1)证明$B^k=tB$，并求数t(k为正整数)；

(2)求可逆矩阵p使$p^{-1}Bp$为对角矩阵，并写出该对角矩阵。

解：(1)［**方法一**］：$B^k=\underbrace{(AA')(AA')\cdots(AA')}_{K个}=A\underbrace{(A'A)\cdots A'A)}_{K-1个}A'$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a^2{}_i\right)^{k-1}AA'=tB$$

$$t=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{k-1}$$

[方法二]: $B^2=(AA')(AA')=A(A'A)A'=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)AA'=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)B$

$$B^3=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)B^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2B$$

用数学归纳法不难证明：$B = tB$，其中$t=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{k-1}$

(2)、 $B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}[a_1,\ a_2\cdots,\ a]=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_na_1 & a_2a_n & \cdots & a_n^2\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2\cdots\cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2\cdots\cdots & -a_2a_n\\ \vdots & & \\ -a_na_1 & -a_na_2\ \cdots\cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \cdots\cdots & -a_1a_n\\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & 0 & \cdots\cdots & 0\\ -\frac{a_3}{a_1}\lambda & 0 & \lambda & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda\end{vmatrix} \qquad (*)$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \cdots\cdots & -a_1a_n\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda\end{vmatrix} \qquad (*)'$$

$$=\lambda^{n-1}\cdot\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)=0.$$

$\therefore\ \lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\qquad \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

相应于λ_1的特征向量X是线性齐次方程组$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)E-B\right)X=0$

的解，利用$(*)'$中的矩阵，即可求得$X_1=\begin{pmatrix}a_1\\c_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.