

大學叢書

行列式之理論及其應用

司各脫 著
黃緣芳 譯

商務印書館發行

13.151/7

大學叢書

行列式之理論及其應用

司各脫著

黃維芳譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

初 版 序

本書敘述行列式之理論及其重要應用,在一切可能範圍內,余曾參考本問題之各原著及論文;且就余見所及之書報,表列於後,以俾後之學者取同一研究途徑時之用。其間,余曾謀將各國算學雜誌上關於此門之文字悉數列入表中,以補充余之研究;但,依此目標着手,即覺多所挂漏。以是所附之表,僅限於余所及之論文,並將其主要結論,編入本文或插入例題中。

本書之特點,在將 Grassmann 氏正負更迭數作有組織之應用;余信應用此數之結果,使行列式之研究非常簡便。

本書證明之修正及有價值之提示,當歸功於余友 Jas. Barnard 先生——先生爲 St. John's College 碩士,並任 Blackheath 地方 Proprietary School 之算學主任——特於此申謝。

R. F. Scott. 西曆 1880 年二月,

增訂版序

本版之主要變動，一方爲增入無窮級行列式之理論，複一次形 (Bilinear form) 理論之綱要及原始除式之基本定理。余又盡量使本書之特點不發生變動，並盡量不使篇幅增大。Scott 先生所列之行列式參考書報表，本版完全刪去；此因 Muir 博士之行列式著作表，吾人今日甚易得到也。故余以行列式最初發展之史略換入之。此外，更添入緒論一章，俾初學者不致於學普遍理論時困難生畏。同理，有數章中所用簡記法，亦不用於初步理論之章節中。

除原論文外，茲並參考 Hoepli 叢書內 Pascal 之傑作及 Muth 氏之原始除式 (Elementarteiler)。Kronecker 氏講演集第一卷乃述行列式之理論者，因出版遲，未及博採。又本版增訂事項，係由原作者全權委託，故所有變更，概由余負責。特此申明。

G. B. Mathews. 西曆 1924 年五月。

目 次

第一篇 行列式之理論

節數

頁數

第一章 緒論

1,2	記法 一次方程式.....	1
3.	Sarrus 氏法則.....	4
4—6	第三級行列式之初等性質.....	4
7,8	兩行列式之積.....	7

第二章 定義及記法 正負更迭數

1—7	單元之排列.....	10
8—10	行列式之一般定義.....	15
11	行及列之互換.....	19
12—14	正負更迭數.....	19
15.	以正負更迭數之積表行列式之式.....	22
16,17	例.....	23

第三章 行列式之一般性質

1,2	行及列之互換.....	27
-----	-------------	----

3,4	當行列式一行上單元爲他數之和時行列式之值	28
5,6	例.....	29
7.	一次方程式組之解法.....	32

第四章 小行列式及行列式之展開式

1.	第 p 級小行列式之數.....	35
2—4	相餘小行列式.....	35
5.	Laplace 氏定理.....	37
6,7	例.....	40
9—11	行列式按一行上單元而展開之展開式.....	43
12—14	例.....	46
15,16	行列式之微係數.....	50
18—21	行列式其單元爲多項式時之 Albeggiani 氏展開式.....	53
22,23	行列式按主對角線上單元之積而展開之展開式.....	57
24.	Cauchy 氏定理.....	60
25.	例.....	61

第五章 陣之合併 行列式之乘法

1—4	合併兩陣而成之行列式.....	64
-----	-----------------	----

節數	頁數
5—7 例.....	68
8. 由 Laplace 氏定理導出之基本定理.....	74
9. 積行列式之小行列式.....	76
10. 積行列式之微係數.....	77

第六章 繁行列式

1—3 反應陣	79
4,5 第一級反應陣.....	81
6,7 例.....	83
8—11 第 m 級反應陣.....	86
12—16 Sylvester 氏之定理及其他.....	89
17. Netto 氏定理.....	93
18,19 Kronecker 氏定理.....	94
20,21 兩獨立組之場合.....	97

第七章 行列式之數值性質 原始因式

1. 一般行列式不可分解.....	100
2—4 行列式因式及原始因式之定義.....	100
5—8 合法小行列式 原始因式之性質.....	102
9. 等值陣.....	109
10—13 化為標準形之法.....	110

第八章 特殊形之行列式

1—3	對稱行列式	117
4—8	變及變對稱行列式	120
9—16	變對稱行列式爲 Pfaff 氏式	122
17, 18	變行列式之例	129
20—22	正交對稱行列式	133
23—26	單元爲輪換排列之行列式	136
27—30	單元爲二項式係數之行列式	140

第九章 立方形行列式及多個足指數之行列式

1, 2	定義, 記法	147
3.	以正負更迭數之積表立方行列式之式	148
4—9	立方行列式之初等性質	149
10—18	多個足指數之行列式	153
19, 20	例	157

第十章 無窮級行列式

1—4	定義	161
5—9	模範行列式之性質	164
10.	積之定理	169
11, 12	半模範行列式	170

第二篇 行列式之應用

節數

頁數

第十一章 行列式在方程式及消去法理論上之應用

1—6	一次方程式組	175
7—9	一次代入式	179
10—15	消去及判別式	182
16	Bézout 氏行列式之性質	190
17, 18	二次式組及一次式組	193
19.	Sylvester 氏對於 $\phi(\lambda)=0$ 全含實根之證明	197

第十二章 有理函數之行列式

1—3	n 數兩量之差之積	200
4—17	函數行列式之例	201

第十三章 Jacobi 式及 Hesse 式

1.	Jacobi 式之定義及記法	219
2.	非獨立函數之 Jacobi 式等零	219
3—5	有公因式之函數之 Jacobi 式	220
6—10	Jacobi 式之性質	222
11.	Bertrand 氏定義	228

節數	頁數
12.	由正負更迭數而下之定義.....231
13,14	高級積分式之變換式.....232,234
15.	Hesse 氏定義及例.....237
16.	Jacobi 式及 Hesse 式乃共變式.....239
17.	n 個一次函數之 Jacobi 式,二次式之 Hesse 式.....240

第十四章 對於複一次式及二次式之應用

1—3	複一次之記號乘法.....242
4	特性方程式.....244
5—7	記號演算法之應用.....245
8,9	Kronecker 氏定理之 Frobenius 氏證明.....250,252
10—15	複一次式及二次式之化法.....253
16,17	兩二次式之共化法.....261,262
18—24	正交代入式.....264
25.	以立方行列式表二次式之不變式.....271

第十五章 同變數函數之行列式

1—9	定義,初等性質.....273
10.	一次微分方程式之應用.....281
11.	Jacobi 氏方程式之 Hesse 氏解法.....282

第十六章 連分數理論上之應用

節數	頁數
1.	遞昇及遞降連分數.....286
2—7	表遞降連分數之漸近值之式.....286
8,9	遞昇連分數,及由此種化為遞降連分數之法.....292,294
10.	化級數為連分數之法.....295
11.	Fuerstenau 氏對於連分數之推廣.....296

第十七章 幾何學上之應用

1—3	三角形之面積,四面體之體積.....301
4—6	初等全等式.....305
7.	正負更迭數之應用.....308
8—14	直線間之夾角,立體角,球面圖形.....311
15—18	直線組,線座標,相對力距.....318
19—23	連結空間內五點之直線間關係式(Cayley), 四面 體之體積,三角形之面積 Siebeck 氏定理.....323
24—28	關於橢圓面之公式,球面上六點之 Cayley 氏定理 Faure 氏指數理論.....330
29—39	球組,位置冪數,公切線.....337
	問題.....347
	史略.....390
	術語索引.....394
	人名索引.....396

行列式之理論及其應用

第一篇 行列式之理論

第一章 緒論

1. 行列式(Determinant)乃一種具特別形狀之代數式，有一定法則以計其值，並用特殊記法以列其式。故有行列式計算法，及處理由分析式得來之行列式性質之理論。

敘述關於最初發現行列式之幾個簡單問題，為介紹行列式之最適當步驟；此最初問題，即為聯立一次方程式組之具體解法問題。

設此組為

$$\left. \begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3 &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

則其根為

$$x = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 - a_2b_1};$$

同樣，由等次方程式(Homogeneous equations)

$$\left. \begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0 \end{aligned} \right\},$$

得比例式

$$x : y : z = (a_2b_3 - a_3b_2) : (a_3b_1 - a_1b_3) : (a_1b_2 - a_2b_1),$$

式中若 $z=1$, 即得前段之結果。

次就等次方程式組

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\equiv a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0 \\ u_2 &\equiv b_1x + b_2y + b_3z + b_4t = 0 \\ u_3 &\equiv c_1x + c_2y + c_3z + c_4t = 0 \end{aligned} \right\}$$

言之;於補助方程式

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$$

中,若

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 a_3 + \lambda_2 b_3 + \lambda_3 c_3 &= 0 \\ \lambda_1 a_4 + \lambda_2 b_4 + \lambda_3 c_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

即

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (b_3c_4 - b_4c_3) : (c_3a_4 - c_4a_3) : (a_3b_4 - a_4b_3),$$

則因補助方程式中 z 及 t 之係數等零,遂約簡為

$$Qx + Py = 0$$

之形,此處

$$P = a_2(b_3c_4 - b_4c_3) + b_2(c_3a_4 - c_4a_3) + c_2(a_3b_4 - a_4b_3),$$

$$Q = a_1(b_3c_4 - b_4c_3) + b_1(c_3a_4 - c_4a_3) + c_1(a_3b_4 - a_4b_3).$$

此二式所含原方程式組之係數雖不同,形式上確甚相

似。爲便利計，以

$$P = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

記之，而稱右邊之式爲第三級行列式(Determinant of the third order)。式中有三行(Row)，三列(Column)，及九單元(Element)；例如， a_2, a_3, a_4 屬第一行， a_2, b_2, c_2 爲第一列，而 $a_2, a_3, \dots, c_4$ 爲各單元。

做此， Q 可記爲

$$Q = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix};$$

而上述方程式組之完全答案，可以次式表之，

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

2. 做前節所用之乘式法(Method of multipliers)，並應用前節所得結果，可以解含有五未知量之四等次方程式，依此類推。其最普遍之結論，乃爲 n 個聯立一次等次方程式中之 $(n+1)$ 個變數之根，必與由係數構成之 $(n+1)$ 個有理整函數成比例，此各函數乃由 n^2 個係數所構成之等次函數，其次

數為 n ;且為第 n 級行列式,與前述之第三級行列式相似。

第一級行列式 $|a|$ 即為一項式 a ;第二級行列式為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

第 n 級行列式之展開法則,當於次章述之。

3. 展開第三級行列式之最簡便方法,應推 Sarrus 氏法則,茲述之如次:

設行列式為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

重列第一第二兩列於式之右方

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & & \\ & b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & \\ & c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 & \end{array}$$

而求與原正方形上對角線成平行之各線上單元之積,並定由左上方至右下方各線上單元之積為正值,他向為負值,則得行列式之展開式為

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

但實用時,祇須心中假定前兩行之重列,固不必實際列出也。

4. 茲先證明關於第三級行列式數種簡單性質,以資

讀者熟悉行列式之記法,又此等性質,俱爲高次行列式定理之特例,讀者並可證明第二級行列式亦具此等性質。

試研究行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

展開式中各項之形爲 $\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma$,此處 (α, β, γ) 乃排列 $(1, 2, 3)$ 而得之一種順序;換言之,展開式之各項,俱含三個單元之積,而其中無二單元屬同行或同列者。在主對角線 (Principal diagonal) 上單元 $a_1 b_2 c_3$ 之積,其符號定爲正;其餘各項 $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ 之爲 $-$ 或 $+$,則視由 $(1, 2, 3)$ 變爲 (α, β, γ) 時,所施置換 (Transposition) 之數爲奇或爲偶而定。故展開式中,一半爲正項,一半爲負項。

設不變行列式中 $a_1 b_2 c_3$ 之位置,而互換行與列,則 D 之值不變;即謂

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

此可由展開兩邊之式而證之。

5. 若互換 D 中任二行或二列,則新行列式之值爲 $-D$ 。此因在 D 之行列式中,由互換之結果,或同於交換兩文字(例如 a, b)而不變其足指數 (Suffix) 之位置;或同於互換兩足指數,但兩者之結果俱爲 $-D$ 。例如,交換第二三兩行,則新

行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 c_2 b_3 - a_1 c_3 b_2 + a_2 c_3 b_1 - a_2 c_1 b_3 + a_3 c_1 b_2 - a_3 c_2 b_1 \\ = -D.$$

故若兩行或兩列完全相同,則 D 值等零。

6. 因

$$D = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

故 D 爲第一行上單元 a_1, a_2, a_3 之一次等次函數,其係數爲由他行上單元所組成之第二級行列式,同理, D 亦可列爲他行或他列上各單元之一次函數。

由是得

$$\begin{vmatrix} p_1 + q_1 & p_2 + q_2 & p_3 + q_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

若他行或他列上各單元,俱爲二項式,則亦得相似之定理,更進而言之,設第一列(行)上各單元俱爲 l 項之和,第二列(行)爲 m 項之和,第三列(行)爲 n 項之和,則 D 可書爲 lmn 個行列式之和。

又若以 k 乘行列式之任一行或列上各單元,則其值等