大學叢書

行列式之理論及其應用

司各脫著
黃緣芳譯

商務印書館發行

13·151/7

大學叢書

行列式之理論及其應用

司各脫著
黃緣芳譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

初 版 序

本書敍述行列式之理論及其重要應用,在一切可能範圍內;余曾參考本問題之各原著及論文;且就余見所及之書報,表列於後,以俾後之學者取同一研究途徑時之用。其間,余曾謀將各國算學雜誌上關於此門之文字悉數列入表中,以補充余之研究;但,依此目標着手,即覺多所挂漏。以是所附之表,僅限於余所及之論文,並將其主要結論,編入本文或插入例題中。

本書之特點,在將 Grassmann 氏正負更迭數作有組織之應用;余信應用此數之結果,使行列式之研究非常簡便。

本書證明之修正及有價値之提示,當歸功於余友 Jas. Barnard 先生——先生爲 St. John's College 碩士,並任 Blackheath 地方 Proprietary School 之算學主任——特於此申謝。

R. F. Scott. 西曆1880年二月,

增訂版序

本版之主要變動,一方爲增入無窮級行列式之理論,複一次形(Bilinear form)理論之綱要及原始除式之基本定理。余又盡量使本書之特點不發生變動,並盡量不使篇幅增大。Scott 先生所列之行列式參考書報表,本版完全删去;此因 Muir 博士之行列式著作表,吾人今日甚易得到也。故余以行列式最初發展之史略換入之。此外,更添入緒論一章,俾初學者不致於學普遍理論時因難生畏。同理,有數章中所用簡記法,亦不用於初步理論之章節中。

除原論文外,玆並參考 Hoepli 叢書內 Pascal 之傑作及 Muth 氏之原始除式 (Elementarteiler)。Kronecker 氏講演集第一卷乃述行列式之理論者,因出版遲,未及博採。又本版增訂事項,係由原作者全權委託;故所有變更,概由余負責。特此申明。

G. B. Mathews. 西曆1924年五月。

目　次

第一篇　行列式之理論

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第四章　小行列式及行列式之展開式

第五章　陣之合併　行列式之乘法

第六章　隨行列式

第七章　行列式之數值性質　原始因式

第二篇　行列式之應用

第十四章 對於複一次式及二次式之應用

第十五章 同變數函數之行列式

第十六章 連分數理論上之應用

第十七章 幾何學上之應用

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

行列式之理論及其應用

第一篇　行列式之理論

第一章　緒論

1. 行列式(Determinant)乃一種具特別形狀之代數式,有一定法則以計其值,並用特殊記法以列其式。故有行列式計算法,及處理由分析式得來之行列式性質之理論。

敍述關於最初發現行列式之幾個簡單問題,為介紹行列式之最適當步驟;此最初問題,即為聯立一次方程式組之具體解法問題。

設此組為

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3=0 \\ b_1x+b_2y+b_3=0 \end{aligned}\right\},$$

則其根為

$$x=\frac{a_2b_3-a_3b_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_1b_2-a_2b_1};$$

同樣,由等次方程式(Homogeneous equations)

$$\left.\begin{aligned} a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z=0 \end{aligned}\right\},$$

得比例式

$$x:y:z=(a_2b_3-a_3b_2):(a_3b_1-a_1b_3):(a_1b_2-a_2b_1),$$

式中若 $z=1$, 卽得前段之結果。

次就等次方程式組

$$\left.\begin{aligned} u_1\equiv a_1x+a_2y+a_3z+a_4t=0 \\ u_2\equiv b_1x+b_2y+b_3z+b_4t=0 \\ u_3\equiv c_1x+c_2y+c_3z+c_4t=0 \end{aligned}\right\}$$

言之;於補助方程式

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0$$

中,若

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1a_3+\lambda_2b_3+\lambda_3c_3=0 \\ \lambda_1a_4+\lambda_2b_4+\lambda_3c_4=0 \end{aligned}\right\}$$

卽

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=(b_3c_4-b_4c_3):(c_3a_4-c_4a_3):(a_3b_4-a_4b_3),$$

則因補助方程式中 z 及 t 之係數等零,遂約簡爲

$$Qx+Py=0$$

之形,此處

$$P=a_2(b_3c_4-b_4c_3)+b_2(c_3a_4-c_4a_3)+c_2(a_3b_4-a_4b_3),$$

$$Q=a_1(b_3c_4-b_4c_3)+b_1(c_3a_4-c_4a_3)+c_1(a_3b_4-a_4b_3)。$$

此二式所含原方程式組之係數雖不同,形式上確甚相

似。爲便利計,以

$$P=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

記之,而稱右邊之式爲第三級行列式(Determinant of the third order)。式中有三行(Row),三列(Column),及九單元(Element);例如,a_2, a_3, a_4 屬第一行,$a_2\,b_2\,c_2$ 爲第一列,而 $a_2, a_3, \cdots, c_4$ 爲各單元。

倣此,Q 可記爲

$$Q=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix};$$

而上述方程式組之完全答案,可以次式表之,

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}}=\frac{-t}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}。$$

2.　倣前節所用之乘式法(Method of multipliers),並應用前節所得結果,可以解含有五未知量之四等次方程式,依此類推。其最普遍之結論,乃爲 n 個聯立一次等次方程式中之 $(n+1)$ 個變數之根,必與由係數構成之 $(n+1)$ 個有理整函數成比例,此各函數乃由 n^2 個係數所構成之等次函數,其次

數爲n;且爲第n級行列式,與前述之第三級行列式相似。

第一級行列式$|a|$即爲一項式a;第二級行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1;$$

第n級行列式之展開法則,當於次章述之。

3.　展開第三級行列式之最簡便方法,應推 Sarrus 氏法則;玆述之如次:

設行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

重列第一第二兩列於式之右方

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

而求與原正方形上對角線成平行之各線上單元之積,並定由左上方至右下方各線上單元之積爲正值,他向爲負值,則得行列式之展開式爲

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3。$$

但實用時,祇須心中假定前兩行之重列,固不必實際列出也。

4.　玆先證明關於第三級行列式數種簡單性質,以資

讀者熟悉行列式之記法。又此等性質,俱爲高次行列式定理之特例,讀者並可證明第二級行列式亦具此等性質。

試研究行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1。$$

展開式中各項之形爲$\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma$,此處$(\alpha,\beta,\gamma)$乃排列$(1,2,3)$而得之一種順序;換言之,展開式之各項,俱含三個單元之積,而其中無二單元屬同行或同列者。在主對角線(Principal diagonal)上單元$a_1b_2c_3$之積,其符號定爲正;其餘各項$a_\alpha b_\beta c_\gamma$之爲$-$或$+$,則視由$(1,2,3)$變爲$(\alpha,\beta,\gamma)$時,所施置換(Transposition)之數爲奇或爲偶而定。故展開式中,一半爲正項,一半爲負項。

設不變行列式中$a_1b_2c_3$之位置,而互換行與列,則D之值不變;卽謂

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

此可由展開兩邊之式而證之。

5. 若互換D中任二行或二列,則新行列式之值爲$-D$。此因在D之行列式中,由互換之結果,或同於交換兩文字(例如a, b)而不變其足指數(Suffix)之位置;或同於互換兩足指數。但兩者之結果俱爲$-D$。例如,交換第二三兩行,則新

行列式爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1c_2b_3 - a_1c_3b_2 + a_2c_3b_1 - a_2c_1b_3 + a_3c_1b_2 - a_3c_2b_1$$

$$= -D。$$

故若兩行或兩列完全相同,則D值等零。

6. 因

$$D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

故D爲第一行上單元a_1, a_2, a_3之一次等次函數,其係數爲由他行上單元所組成之第二級行列式。同理,D亦可列爲他行或他列上各單元之一次函數。

由是得

$$\begin{vmatrix} p_1+q_1, & p_2+q_2, & p_3+q_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

若他行或他列上各單元,俱爲二項式,則亦得相似之定理。更進而言之,設第一列(行)上各單元俱爲l項之和,第二列(行)爲m項之和,第三列(行)爲n項之和,則D可書爲lmn個行列式之和。

又若以k乘行列式之任一行或列上各單元,則其值等

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com