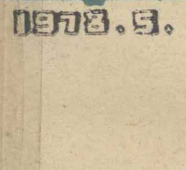
一九四九年至一九六五年全国高校招生

数理化试题汇编



1978.5.

肖山县文教局翻印

全国高考数学试题

目　　录

全国高考物理试题

目　　录

全国高考化学试题

目　　录

全国高考数学试题
一九四八年

1、 a 用$\sin x$表示$\sin 3x$之函数

解：$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x$

$= 2\sin x\cos^2 x + (1-2\sin^2 x)\sin x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

b 证恒等式：

$\sin 3x = 4\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)\sin x$

证：右式$= 2(\cos 2x - \cos 120^\circ)\sin x$

$= 2\cos 2x\sin x + \sin x$

$= (\sin 3x - \sin x) + \sin x = \sin 3x$

2、二园联心线必过相切两园之切点。

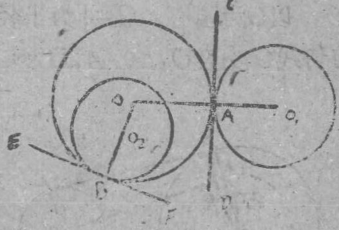


图 1

证：(i)设园O与园O_1，外切于点A，过A作公切线CD

则$OA \perp CD$，$O_1A \perp CD$

$\therefore \angle OAC + \angle O_1AC = 180°$

故OA，O_1A在一直线上且过两园的切点A。

(ii) 设园O与园O_2内切于B，过B作公切线EF，

$\therefore OB \perp EF$，$O_2B \perp EF$，故OB与O_2B共线且过两园的切点B。

3、试述自园外一点作圆的切线的方法，并解释其理由。

试述作两园公切线的方法，并解释其理由，

解：(i)作法：连结园外已知点A与已知园的园心O，以AO为直径作园弧与园O相交于B，C，连AB，AC即为所求作的切线（证明略）

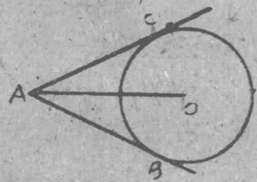


图 2

(ii)作两园的公切线，有外公切线和内公切线两种作法，

I 外公切线作法：设园O与园O_1的半径各为R与r ($R>r$)，以O为园心，$R-r$为半径作园，由O_1作该园的切线O_1A及O_1D，A,D为切点〔作法如(i)〕

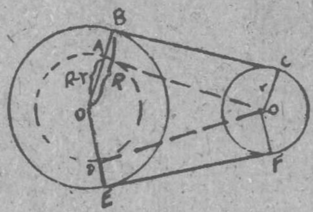


图 3

连OA，OD并延长之，分别交园O于B，E，过O_1分别作OB及OE的平行线，与园O_1相交于C，F，连BC及EF，即为所求作的外公切线，（证明略）

Ⅱ 内公切线作法：

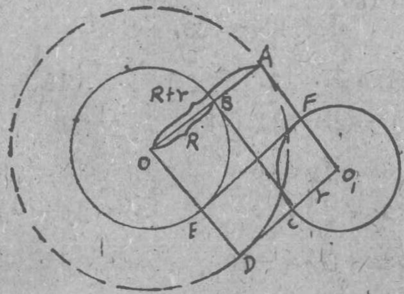


图 4

以O为园心，$R+r$为半径作园，过O_1作该园的切线O_1A,O_1D〔作法如(i)〕。连OA及OD,与园O分别相交于B及E。过O_1分别作OA,OD的平行线，与园O_1相交C，F，连BC、EF，即为所求作的内公切线。（证明略）

4、分解因式：①x^6-y^6 ②x^4-64 ③$a^4+a^2b^2+b^4$

解：①x^6-y^6

$$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

②$x^4-64=(x^2)^2-8^2=(x^2-8)(x^2+8)$

$$=(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}i)(x-2\sqrt{2}i)$$

③$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

5、解方程组：(a) $\begin{cases} 9x^2+4y^2=52 \cdots\cdots ① \\ xy=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots ① \\ x^3+y^3=65 \cdots\cdots ② \end{cases}$

解：(a)①+②×12，得$3x+2y=\pm 10$

①－②×12，得$3x-2y=\pm 2$

于是有 $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+2y=-10 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y=-10 \\ 3x-2y=-2 \end{cases}$

解得：1 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=2 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=3 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_3=-\frac{4}{3} \\ y_3=-3 \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x_4=-2 \\ y_4=-2 \end{cases}$

(b)②÷①得$x^2-xy+y^2=13 \cdots\cdots ③$

由①得$y=5-x$代入③整理后，得

$x^2-5x+4=0$，$(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x_1=1$，$x_2=4$ 代入①得$y_1=4$，$y_2=1$

故方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$

6、在直角三角形中，a，b，c为三边，c为斜边，求证：

(a) $sin2A=\frac{2ab}{c^2}$；(b) $cos2A+cos2B=0$

(c) $tgA-ctgB+cosC=0$

证：(a) $sin2A=2sinAcosA$

$=2\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}$

$=\frac{2ab}{c^2}$

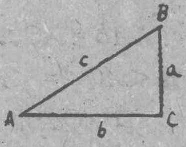


图 5

(b) $cos2A+cos2B$

$=cos^2A-sin^2A+cos^2B-sin^2B$

$=\frac{b^2}{c^2}-\frac{a^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}=0$

(c) $tgA-ctgB+cosC=tgA-ctg(90°-A)+cos90°$

$=tgA-tgA+0=0$

7、一等边三角形面积等于另一等边三角形内切园的面积，求三角形边长之比？

解：设一等边三角形的边长为a，另一个等边三角形的边长为b，则两边长为a的等边△的面积为

$$S_\triangle=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

另一个等边△的内切园半径为

$$r=\frac{b}{2}\cdot tg30°=\frac{\sqrt{3}}{6}b$$

由已知条件有：

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 \quad 即\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\pi}{12}b^2$$

$$\therefore\frac{a^2}{b^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

故三角形边长比为 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}=\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3}\pi}$

8、由等腰三角形ABC之顶点A，引直线交底边BC于D，交外接园于Q，求证：$AB^2=AD\cdot AQ$

证：$\because AB=AC\ \therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$

于是$\angle AQB=\angle ABD$，

$\angle BAQ$公用

$\therefore \triangle AQB\backsim\triangle ABD$

故$\frac{AB}{AQ}=\frac{AD}{AB}$，

即$AB^2=AD\cdot AQ$

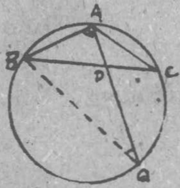


图 6

9、求证：$lg\left\{(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^{-3}+(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^{-3}\right\}$

$$=lg\left(p^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}lg(p^2+1)$$

证：$(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^{-3}+(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^{-3}$

$$=\frac{(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^3+(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^3}{(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^3\cdot(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{p^2+1})^3+6\sqrt{p^2+1}\cdot(\sqrt{p^2-1})^2}{[(\sqrt{p^2+1})^2-(\sqrt{p^2-1})^2]^3}$$

$$=\frac{2\sqrt{p^2+1}\cdot4\left(p^2-\frac{1}{2}\right)}{2^3}$$

$$=\sqrt{p^2+1}\cdot\left(p^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore lg\left\{(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^{-3}+(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^{-3}\right\}$$

$$=lg\left(p^2\quad-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}lg(p^2+1)$$

10、三角形三边为$3x+y-7=0$，$x+3y-5=0$，

$x-3y+1=0$，求内切园之方程：

解：三直线通过一点，(2,1)此题无解

11、一动点到$A(5,-4)$之距离较到直线$x+5=0$之距离少4，

求动点轨迹之方程，并作图，

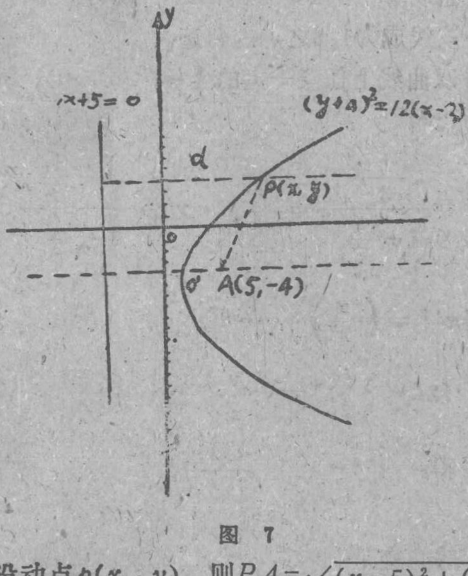


图 7

解：设动点$p(x, y)$，则$PA=\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$

p到直线$x+5=0$的距离为$d=x+5$

由$PA=d-4$得$\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}=x+1$

两边平方，移项整理后得$(y+4)^2=12(x-2)$，

故动点的轨迹是以，$O'(2,-4)$为顶点，对称轴平行x轴的抛物线，如图所示。

12、设：$tgA=m$，求$tg3A$

$$\text{解：} tg3A=\frac{tg2A+tgA}{1-tg2A\cdot tgA}=\frac{tgA+\dfrac{2tgA}{1-tg^2A}}{1-tgA\cdot\dfrac{2tgA}{1-tg^2A}}$$

$$=\frac{3tgA-tg^3A}{1-3tg^2A}=\frac{3m-m^3}{1-3m^2}$$

13、已知双曲线$x^2-4y^2=16$，由(0，4)到其上各点连线，试求分该线成为1:3之点的轨迹。

解：设双曲线上任意一点的坐标为(x, y)，分点坐标为(x', y')

$$\text{则}\quad x'=\frac{\frac{1}{3}x}{1+\frac{1}{3}}=\frac{x}{4},\quad y'=\frac{4+\frac{1}{3}y}{1+\frac{1}{3}}=3+\frac{y}{4}$$

由此得$x'^2=\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$ ……①

$$[2(y'-3)]^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdots\cdots ②$$

①—②得：$x'^2-\dfrac{(y'-3)^2}{\frac{1}{4}}=1$

故所求的轨迹是双曲线，

14、等边双曲线上任意一点，至其中心之距离，为该点的二焦点半径之比例中项，

证：设双曲线的焦点半径为r_1及r_2，任一点为$M(x,y)$，根据定义有：$r_2-r_1=\pm 2a$……①(其中正号为右枝、负号为左枝)

且：$r_1=F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，

$r_2=F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

于是：$r_2^2-r_1^2=4cx$……②

解①与②得：$\begin{cases} r_2-r_1=2a \\ r_2+r_1=2\dfrac{c}{a}x \end{cases}$ (右)

$\begin{cases} r_2-r_1=-2a \\ r_2+r_1=-2\dfrac{c}{a}x \end{cases}$ (左)

由上解得：$\begin{cases} r_1=-a+\dfrac{c}{a}x \\ r_2=a+\dfrac{c}{a}x \end{cases}$ (右)

$\begin{cases} r_1=a-\dfrac{c}{a}x \\ r_2=-a-\dfrac{c}{a}x \end{cases}$ (左)

对于等边双曲线$b=a$，即$c^2=b^2+a^2=2a^2$

且$x^2-y^2=a^2$

于是：$r_1\cdot r_2=\left(\dfrac{c}{a}x\right)^2-a^2=\dfrac{c^2}{a^2}x^2-a^2$

$=2x^2-a^2=2x^2-x^2+y^2=x^2+y^2$(右枝)

$r_1\cdot r_2=\left(\dfrac{c}{a}x\right)^2-a^2=\dfrac{c^2}{a^2}x^2-a^2$

$=2x^2-a^2=2x^2-x^2+y^2=x^2+y^2$左(枝)

但x^2+y^2是双曲线上任意一点$M(x,y)$至中心的距离，所以得证，

15．化简：$\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{2}{3}}C}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(\dfrac{\sqrt{a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{b}}{a^2c^{-1}}\right)^{-2}$

原式$=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b\cdot c^{-\frac{3}{2}}}\times\dfrac{a^{-4}c^2}{a^{\frac{1}{2}}b^{-1}}=a_-{}^4c^{\frac{7}{2}}=\dfrac{c^{\frac{7}{2}}}{a^4}$

16．$\triangle ABC$三边$a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=\sqrt{6}$，求$<A$及外接园直径，

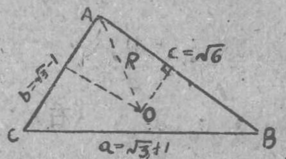


图 8

解：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4-2\sqrt{3}+6-4-2\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{6}}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\because\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$

$=\sqrt{1-\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\therefore D_{外}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

$=2(\sqrt{3}-1)\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$$=2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{2}$$

17．由$\triangle ABC$之顶点B，C向$\angle A$之外角平分线作垂线BR和CS，而CR与BC交于T。

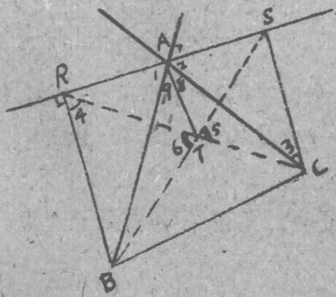


图 9

求证：(i)$BT:TS=RA:AS$

(ii)AT为$\angle BAC$的平分线。

证：(i)$\because \angle 1=\angle 7$，$\angle 2=\angle 7$，$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\therefore$直角$\triangle ARB\backsim$直角$\triangle ASC$

$\therefore \dfrac{RA}{AS}=\dfrac{RB}{SC}$……①

又$\because \angle 5=\angle 6$，$\angle 3=\angle 4$ $\therefore \triangle TRB\backsim\triangle TCS$

$\therefore \dfrac{RB}{CS}=\dfrac{BT}{ST}$……②

考察①与②，即得$\dfrac{BT}{TS}=\dfrac{RA}{AS}$

(ii)从$RA:AS=BT:TS$，可知$AT\parallel BR$

即$AT\perp RS$，又$\because \angle 1=\angle 2$ $\therefore \angle 8=\angle 9$

即AT是$\angle BAC$的角平分线。

18、试证：$tg(B-C)+tg(C-A)+tg(A-B)$

$$=tg(B-C)\cdot tg(C-A)\cdot tg(A-B)$$

证明：$tg(A-B)=tg[-(B-C)-(C-A)]$

$$=-tg[(B-C)+(C-A)]$$

$$=-\frac{tg(B-C)+tg(C-A)}{1-tg(B-C)\cdot tg(C-A)}$$

$\therefore tg(A-B)-tg(B-C)\cdot tg(C-A)\cdot tg(A-B)$

$$=-tg(B-C)-tg(C-A)$$

移项即得所求证之式，

19、试用解析法，证明三角形三中线交于一点。

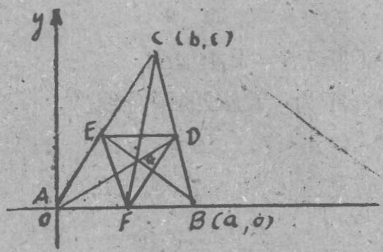


图 10

〔证 I〕：如图，建立坐标系xoy；在这坐标系中，$\triangle ABC$的三个顶点分别为：$A(o,o)$，$B(a,o)$，$C(b,c)$，则三边BC，CA，AB的中点D，E，F的坐标分别为：

$$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c}{2}\right),\ \left(\frac{B}{2},\ \frac{c}{2}\right),\ \left(\frac{a}{2},\ o\right),$$

设点G是分AD的比为 2 的点，则G的坐标是：

$$x=\frac{0+2\left(\frac{a+b}{2}\right)}{1+2}=\frac{a+b}{3}$$

$$y=\frac{0+2\cdot\frac{c}{2}}{1+2}=\frac{c}{3}$$

同理：分BE的比为2的点的坐标是：

$$x=\frac{a+2\cdot\frac{b}{2}}{1+2}=\frac{a+b}{3}\qquad y=\frac{0+2\cdot\frac{c}{2}}{1+2}=\frac{c}{3}$$

分CF的比为2的点的坐标是：

$$x=\frac{b+\frac{a}{2}\cdot 2}{1+2}=\frac{a+b}{3}\qquad y=\frac{c+0}{1+2}=\frac{c}{3}$$

由此可见，三角形的三条中线交于一点 $G\left(\frac{a+b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$

试用解析法证明三角形三中线交于一点。

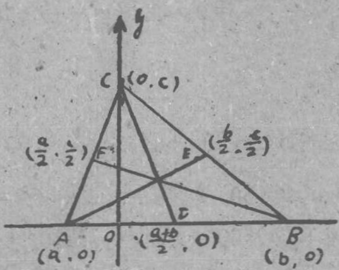


图 11

〔证Ⅱ〕如图：建立坐标系xoy。在这个坐标系中$\triangle ABC$

三个顶点的坐标分别为：$A(a,0)$，$B(b,0)$，$C(0,c)$，