一元微分概念
和思想方法

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{x}{x-1}\approx 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^n} \qquad (-1<x<1)$$

3.4 例题分析

1．中值定理的简单应用

例1 试证拉格朗日中值定理。

证 先作辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right] \tag{1}$$

容易证明$F(x)$满足洛尔定理的三个条件．事实上，由于$f(x)$在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可导，由连续函数的运算性质和求导法则，知$F(x)$也在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可导．由（1）式，得

$$F(a)=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right]=0$$

$$F(b)=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right]=0$$

所以$F(a)=F(b)$．于是由洛尔定理，存在一点$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$。

现在证明在$x=\xi$处，有$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$．事实上，对（1）式两边关于$x$求导，得

$$F'(x)=f'(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]'$$

$$=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

于是在$x=\xi$处，有

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

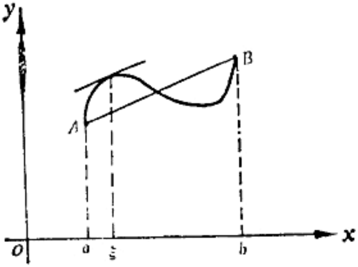
这就证明了拉格朗日中值定理。

以上证明过程中引入了一个辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

初学者对于这个函数的来源和构造常感困惑，因而会问"这个函数是怎么想出来的？"在今后的学习中，常常会遇到构造辅助函数的情况.因此在这里对这个问题加以说明，读者可以从中体会构造函数的思路和技巧.

从洛尔定理的几何解释中，只要稍加注意，就会发现"曲线上必有一点处的切线平行于x轴"，其实质是这条切线"平行于联结两端点的弦".因为当曲线两端点处的函数值相等时，联结两端点的弦平行于x轴，故平行于x轴的切线必平行于联结两端点的弦.而拉格朗日中值定理则指出在两端点的函数值不等时，也有这样的结论.从而不难想到可以用洛尔定理来证明拉格朗日中值定理.参照图2.20，弦AB



（图2.20）

的斜率为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，由直线的点斜式可写出直线AB的方程

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

要证明曲线$y=f(x)$上有一点ξ处的切线与直线AB平行，只须证明

$$f'(\xi)=g'(\xi) \qquad \text{或} \qquad f'(\xi)-g'(\xi)=0$$

容易看出，函数$F(x)=f(x)-g(x)$满足洛尔定理的条件，而洛尔定理的结论恰好是

$$F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)=0$$

因此引入辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

就是十分自然的了.

例2 试证明：若函数$f(x)$的导数$f'(x)$恒为常数，则$f(x)$是线性函数。

证 设$f'(x)=k$，若能证得$f(x)=ax+b$，则$f(x)$就是线性函数。由于$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续。于是$f(x)$满足拉格朗日中值定理的条件，任取$[x_0,x]$，在该区间上$f(x)$当然也满足定理条件，故存在ξ $(x_0<\xi<x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

将$f'(\xi)=k$代入上式，得

$$f(x)=kx+[f(x_0)-kx_0]$$

考虑到x_0是一个定点，$f(x_0)-kx_0$就是一常数，不妨记为b，于是

$$f(x)=kx+b$$

例3 试验证拉格朗日中值定理对于函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x$

在区间〔0,1〕上的正确性。

解 因为$f(x)$在〔0,1〕上连续，在（0,1）内可导，因此$f(x)$在〔0,1〕上满足拉格朗日定理条件，所以至少存在一点ξ，$\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{\pi}{4}$$

下面验证这一事实，即在（0,1）上找到使上式成立的ξ。因为

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

令 $f'(x)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{\pi}{4}$，即 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$，解得

$$x_1=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}, \quad x_2=-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1},$$

这就说明了在（0,1）内确实存在一点$\xi=x_1$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{\pi}{4}$$

因此拉格朗日中值定理是正确的。

例4 试证方程 $x^3-3x^2+C=0$在区间〔0,1〕上不可能有两个不同的实根。

证 用反证法。假设所给方程有两个不同的实根x_1和x_2，且 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$。由于函数$f(x)=x^3-3x^2+C$在$[x_1,x_2]$上满足洛尔定理条件，因而至少存在一点$\xi$，$\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=0$，因为 $f'(x)=3x^2-6x$，所以$f'(\xi)=3\xi^2-6\xi=0$，由此解得 $\xi_1=0$，$\xi_2=2$，这与$\xi\in(x_1,x_2)$矛盾，所以开始的假设是错误的，从而命题得证。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例5 证明下列不等式

（1） $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)$

$(x>y>0,\ n>1)$

（2） $1-\dfrac{a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-1 \qquad (b>a>0)$

证 （1）考虑函数 $f(z)=z^n$，则 $f'(z)=nz^{n-1}$，在区间 $[y,x]$ 上应用拉格朗日中值公式 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，得

$$x^n-y^n=n\xi^{n-1}(x-y) \qquad (y<\xi<x)$$

由 $x>\xi>y>0$，$n>1$ 知 $y^{n-1}<\xi^{n-1}<x^{n-1}$，从而得到

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)$$

（2）考虑函数 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值公式，得

$$\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a) \qquad (a<\xi<b)$$

由 $b>\xi>a>0$ 知 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，从而得到

$$\frac{1}{b}(b-a)<\ln b-\ln a<\frac{1}{a}(b-a)$$

即

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$$

由本例可以看出，利用拉格朗日中值定理证明不等式时，关键是适当地选择函数和定义区间，然后通过将ξ换为区间端点即得到不等式。

2．洛比塔法则的应用

例6 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$。

解 （1）这是$\frac{0}{0}$型未定式，由洛比塔法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\cos x}=2$$

（2）这是$\frac{0}{0}$型未定式，由洛比塔法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}$$

右端仍是$\frac{0}{0}$型未定式，但经过简单的恒等变形

$$\frac{\dfrac{1}{\cos x^2}-1}{1-\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos x^2}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}$$

当 $x\to 0$时，上式右端极限显然是2，于是得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}=2$$

由本例可以看出，洛比塔法则是求未定式的极限的有力工具，许多用以前的知识难以计算的极限，应用洛比塔法则便可以很容易地求出来.应用洛比塔法则对分子和分母分别求导后，应做整理化简工作（如消去公因子等），以便简化计算.

例7 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}$ ．

解 这是$\frac{0}{0}$型未定式，应用洛比塔法则得

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=-\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

上式右端仍是$\frac{0}{0}$型未定式，继续应用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$$

于是

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=-\frac{1}{2}$$

本例中两次使用了洛比塔法则．一般说来，只要符合法则条件，就可连续使用洛比塔法则，直到求出极限或得出不符合法则条件的结果时为止．$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}$已不是未定式，不能再用洛比塔法则．

例8 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$．

解 $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

$$\xlongequal{\text{分母有理化}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)$$

$$\xlongequal{\text{极限运算法则}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})$$

$$\overline{\overline{\qquad\qquad}}\ 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$\xlongequal{\text{洛比塔法则}}2\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin x+x\cos x}$$

$$\xlongequal{\text{整　　理}}4\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}$$

$$\xlongequal[\text{及重要极限}]{\text{极限运算法则}}4\cdot\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{4}{3}$$

求未定式极限时，应将所学过的求极限的方法结合起来使用，不要只局限于使用洛比塔法则，本例若一开始便用洛比塔法则，计算将变得很繁.

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$。

解 这是$\dfrac{0}{0}$型未定式，由对数求导法可得

$$[(a+x)^x]'=(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]$$

于是应用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right]-a^x\ln a}{2x}$$

上式右端仍是$\dfrac{0}{0}$型未定式，再应用洛比塔法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left\{(a+x)^x\left[\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right]^2\right.$$

$$\left.+(a+x)^x\left[\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right]-a^x\ln^2 a\right\}$$

$$=\frac{1}{a}$$

例10 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^a}$ （$a>0$）； （2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{\ln x}$（$a>0$）.

解 （1）这是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，由洛比塔法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{a\,x^{a-1}}$$ 讨论.

若 $0<a\leqslant 1$，上式右端的极限显见为$+\infty$。

若 $a>1$，则上式右端仍是$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，继续应用洛比塔法则，最后必将在分母上得出x的负（或零）指数幂，因此对任何$a>0$，总有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty$$

（2）这也是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式。应用洛比塔法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\alpha x^{\alpha}=+\infty$$

由本例可知，当x增大时，幂函数比对数函数增大得快，而指数函数比幂函数增大得快.

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，应用洛比塔法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin bx\cos ax}{b\sin ax\cos bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b\cos bx}{a\cos ax}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

例12 求极限$\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

解 这是$0\cdot\infty$型未定式，化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型再应用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

若化为$\frac{0}{0}$型再应用洛比塔法则，则有

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\left(-x(\ln x)^2\right)$$

可见这后一极限比原来的极限更为复杂，所以不能解决问题.因此对$0\cdot\infty$型未定式，是化为$\frac{0}{0}$型还是化为$\frac{\infty}{\infty}$型，应视具体情况而定.

例13 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. $\ln x \sim x-1$

解 这是（$\infty-\infty$）型未定式，化为$\frac{0}{0}$型再应用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$$

例14 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 这是一个0^0型未定式。因为

$$\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot\dfrac{-1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

例15 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$。

解 这是∞^0型未定式。因为

$$(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^{\sin x\ln\operatorname{ctg}x}$$

而
$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\csc x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\csc^2x}{-\operatorname{ctg}x\csc x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2x}=0$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}=e^0=1$$

例16 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

解 这是1^∞型未定式，因为

$$(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x}$$

而
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\sec^2x}{-2\csc^22x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\sin2x)=-1$$

所以
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

例17 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解 （1）将函数适当变形，再求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1$$

无穷小×有界量.

本例虽是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式，但若应用洛比塔法则，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

上式右端极限不存在，因此洛比塔法则失效了.应注意，当$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$却有可能存在.

（2）由极限运算法则及幂函数的连续性，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1$$

本例虽是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，但若使用洛比塔法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

至此已经看到，继续使用洛比塔法则，并不能解决问题.

例18 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^a}$（$a>0$）；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{\ln n}$（$a>0$）。

解 对于数列的极限，不能应用洛比塔法则，但根据函数极限与数列极限的关系，可先求出与数列相应的函数的极限，从而得到数列的极限。由本节例10知：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{\ln x}=+\infty.$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^a}=+\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{\ln n}=+\infty.$$

3．台劳公式的应用

例19 试把多项式 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ 表成 $(x-4)$ 的正整数次幂的多项式。

解 取 $x_0=4$。将$f(x)$按~~台劳~~泰勒公式在点x_0展开。

$f'(x)=4x^3-15x^2+2x-3$，

$f''(x)=12x^2-30x+2$， $f'''(x)=24x-30$，

$f^{(4)}(x)=24$， $f^{(5)}(x)=0$，

所以 $f(4)=-56$，$f'(4)=21$，$f''(4)=74$，$f'''(4)=66$

$f^{(4)}(4)=24$， $R_4(x)=0$，

由台劳公式得

$$f(x)=-56+21(x-4)+\frac{74}{2!}(x-4)^2+\frac{66}{3!}(x-4)^3+\frac{24}{4!}(x-4)^4$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4$$

例20 将下列函数按马克劳林公式展开：

（1）e^x， （2）$\sin x$， （3）$\ln(1+x)$

解 （1）设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n)}(x)=e^x$，从而

$f^{(k)}(0)=1$ $(k=0,1,2\cdots)$，

$f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}$ $(0<\theta<1)$，

由马克劳林公式，得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}x^n}{n!}$$

（2）设 $f(x)=\sin x$，则 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，

从而 $f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,\cdots)$

即 $f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$ $(k=1,2,\cdots)$，

$$f^{(2k)}(0)=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

又 $$f^{(2n+1)}(\theta x)=(-1)^n\cos(\theta x) \qquad (0<\theta<1)$$

由马克劳林公式，得

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

（3）设 $f(x)=\ln(1+x)$，当 $n>1$ 时，

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\ \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

从而 $$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)! \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$f^{(n)}(\theta x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n} \qquad (0<\theta<1)$$

又 $f(0)=0$，由马克劳林公式，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

例21 写出下列函数的带皮亚诺型余项的台劳展开式：

（1）$\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$到含有$x^2$的项；

（2）$\operatorname{tg}x$到含有x^5的项；

解 （1）设 $f(x)=\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$，则

$$f'(x)=\frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}},$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com