参考答案

一、选择题:每小题5分,共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	B	B	A	B	C

二、填空题:

9. $2\sqrt{2}$;　10. 9;　11. $\sqrt{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$;　12. 9,10;　13. $\frac{6}{25}$,$\frac{19}{25}$;　14. $4\sqrt{6}$,2.

三、解答题:

15. 解:(1)由$f(0)=2$,得$b=2$;由$f(\frac{\pi}{6})=3$,得

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{3}{2}=3,\qquad a=2\sqrt{3}.$$

$\therefore\quad f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$$

$\therefore\quad T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(2)当$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即$x=k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in Z$时,

$f(x)=2+1=3$为最大值;

当$2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$,即$x=k\pi-\frac{\pi}{3}$,$k\in Z$时,

$f(x)=-2+1=-1$为最小值.

16. 解:(1)$\because f(x)=ax^3-4ax^2+4ax$,

$\therefore\quad f'(x)=3ax^2-8ax+4a=3a(x-\frac{2}{3})(x-2)$.

令$f'(x)=0$,得$x=\frac{2}{3}$或$x=2$.

$\because\quad f(x)=ax(x-2)^2(x\in R)$有极大值32,又$f(2)=0$,

$\therefore\quad f(x)$在$x=\frac{2}{3}$时取得极大值.

$\therefore\quad f(\frac{2}{3})=\frac{32}{27}a=32,\qquad a=27$

(2)由$f'(x)=81(x-\frac{2}{3})(x-2)>0$,得$x<\frac{2}{3}$或$x>2$.

$\therefore$　函数$f(x)$的单调增区间是$(-\infty,\frac{2}{3})$和$(2,+\infty)$.

由$f'(x)=81(x-\frac{2}{3})(x-2)<0$,得$\frac{2}{3}<x<2$.

∴　函数$f(x)$的单调减区间是$(\frac{2}{3},2)$.

17. 解:(1)有两盏灯亮的概率可视为在6次独立重复试验中恰好发生2次的概率:

$$P_6(2)=C_6^2(0.5)^2\times(0.5)^4=C_6^2(0.5)^6=\frac{15}{64}.$$

(2)至少有3盏灯亮的概率等于1减去至多两盏灯亮的概率,即

$$\begin{aligned}&1-P_6(0)-P_6(1)-P_6(2)\\&=1-C_6^0(0.5)^6-C_6^1(0.5)^6-C_6^2(0.5)^6\\&=1-\frac{1}{64}-\frac{6}{64}-\frac{15}{64}\\&=\frac{21}{32}\end{aligned}$$

(3)至少4盏灯亮的概率为:

$$\begin{aligned}&P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)\\&=C_6^4(0.5)^6+C_6^5(0.5)^6+C_6^6(0.5)^6\\&=\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}\\&=\frac{11}{32}>0.3\end{aligned}$$

至少5盏灯亮的概率为

$$\begin{aligned}P_6(5)+P_6(6)&=C_6^5(0.5)^6+C_6^6(0.5)^6\\&=\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{64}<0.3\end{aligned}$$

因此,至少有5盏灯亮的概率小于0.3.

18. 解一:(1)如图1,在$\triangle ABC$中,∵ E、F分别为AC、BC中点,

∴　$EF\parallel AB$.

又　$AB\not\subset$平面DEF,$EF\subset$平面DEF,

∴　$AB\parallel$平面DEF.

(2)∵ $AB\parallel EF$,

∴　$\angle DEF$即为异面直线AB与DE所成的角.

∵　$AD\perp CD$,$BD\perp CD$.

∴　$\angle ADB$是二面角$A-CD-B$的平面角.

∴　$\angle ADB=90°$.

∴　$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{2}a$.

又　$DE=\frac{1}{2}AC=a$,　$DF=\frac{1}{2}BC=a$.

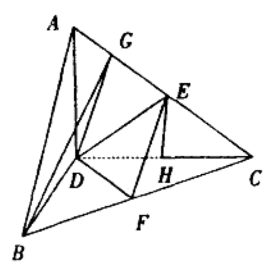

图1

$\therefore \quad \cos\angle DEF=\dfrac{DE^2+EF^2-DF^2}{2DE\cdot EF}=\dfrac{a^2+\dfrac{a^2}{2}-a^2}{2a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ 异面直线 AB 与 DE 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

(3)过 D 作 $DG\perp AC$ 于 G,连 BG.

$\because \quad BD\perp DC,\quad BD\perp AD$,且 $BD\cap AD=D$,

$\therefore \quad BD\perp$ 平面 ADC,

$\therefore \quad BG\perp AC$.

$\therefore \quad \angle BGD$ 是二面角 $B-AC-D$ 的平面角.

在 $Rt\triangle ADC$ 中,$AD=a,DC=\sqrt{3}a,AC=2a$,

$\therefore \quad DG=\dfrac{AD\cdot DC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a.$

在 $Rt\triangle BDG$ 中,$\tan\angle BGD=\dfrac{BD}{DG}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \quad \angle BGD=\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,即二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

解二:CD 如图 2,建立空间直角坐标分 $0-xyz$,则

$D(0,0,0),A(0,0,a),B(a,0,0),C(0,\sqrt{3}a,0),E(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\dfrac{a}{2}),F(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,0)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(a,0,-a),\overrightarrow{EF}=(\dfrac{a}{2},0,-\dfrac{a}{2})$

$\because \overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \therefore \overrightarrow{EF}/\!/\overrightarrow{AB}.$

$\therefore AB/\!/EF$,且 $EF\subset$ 平面 DEF.

$\therefore AB/\!/$ 平面 DEF.

(2)$\because AB/\!/EF$,

$\therefore \angle DEF$ 即为异面直线 AB 与 DE 所成的角.

$\because \overrightarrow{ED}=(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,-\dfrac{a}{2})$,

$\overrightarrow{EF}=(\dfrac{a}{2},0,-\dfrac{a}{2}).$

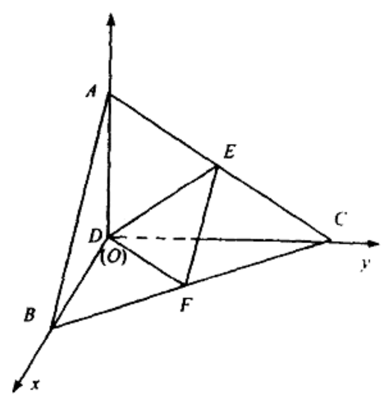

图 2

$\therefore \cos<\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ED}>=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{\dfrac{a^2}{4}}{a\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

∴ 异面直线 AB 与 DE 所成角的大小为 $arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3)∵ $\overrightarrow{DB}=(a,0,0)$ 为平面 ACD 的一个法向量，设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 ABC 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=ax-az=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}ay-az=0,\end{cases}$$ 取 $z=1$，则 $x=1,y=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1)$

$$\therefore \cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DB}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DB}|}=\frac{a}{\sqrt{\frac{7}{3}}a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

∴ 二面角 $B-AC-D$ 的大小为 $arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$

19. 解：$a_{n+1}^2a_n+a_{n+1}a_n^2+a_{n+1}^2-a_n^2=0$ 可变形为

$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n)=0$

∵ $a_n>0,n=1,2,3,\cdots$,

∴ $a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1,n=1,2,3,\cdots.$

∴ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，

$\therefore \frac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n,a_n=\frac{1}{n},n\in N^*$

(2)∵ $b_n=\frac{n(n+1)}{(n+3)^2}a_n$

$$\therefore b_n=\frac{n+1}{(n+3)^2}=\frac{n+1}{[(n+1)+2]^2}$$
$$=\frac{n+1}{(n+1)^2+4(n+1)+4}$$
$$=\frac{1}{n+1+\frac{4}{n+1}+4}$$
$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n+1+\frac{4}{n+1}}+4}=\frac{1}{8}$$

等号当且仅当 $n+1=\frac{4}{n+1}$.

即 n = 1 时成立

原书缺5--末