

拉普拉斯变换与電暫態

蔡伯儒 編著



拉普拉斯变换与电暂态

(试版)

蔡伯儒 编著

序 言

献给我亲爱的祖国——新中国诞生三十五周年纪念。为实现党的工作重点转移到社会主义现代化建设上来；为了实现在本世纪末使全国工农业年总产值翻两番的宏伟目标；为了实现四个现代化，关键是科学技术的现代化；为了把我国建设成为高度文明、高度民主的社会主义国家。在这个伟大战略决策指引下，我们每个科技工作者都应深感自己所肩负的重任，都在豪情满怀的要为我国经济建设事业作出自己应有的贡献。处于这种心情激励下，我将以前在二机部高压电器研究所工作余暇所编写“拉普拉斯变换与电暂态”一书手稿及讲义重作整理修改，试版以供读者阅读参考。

由于电工技术的进步与发展，促使人们对电暂态过程的研究工作从理论计算与试验方法等各方面都必须给予相应的重视。拉普拉斯变换是解决电路暂态计算的重要工具。近年来，拉普拉斯变换在解决电暂态问题方法上应用得更加普遍，数学理论上更加完善，这就促使电工技术人员有必要了解和掌握相关的数学理论与方法。本书全面系统阐明拉普拉斯变换的理论、方法和应用，供从事电力、电机、电讯工程技术人员和高等学校电专业师生阅读参考。读者通过对本书阅读后，能较全面、系统

了解和掌握拉普拉斯变换底理论、方法及应用。

电暂态问题的求解依靠微分方程经典法运算，程序较繁琐；而采用拉普拉斯变换方法则求解迅速，运算简便。

本书共分九章，章节安排层次是从电工专业技术人员一般已较熟悉的稳态观点出发，引深到暂态概念的建立。很多运算定理的证明都是结合物理概念进行。采用实践——理论——再实践，由浅入深，使读者易于接受的方法编写成。结合电暂态实际，举有较多例题演算求解，阐明应用；以达到读者利用数学方法来加深对物理概念的理解而获得正确的结果，使数学运算与物理概念的紧密结合，是本书编写的主要特色。为便于读者学后在求解电暂态问题时迅速方便起见，书末附有效详细拉普拉斯变换表，以供应用。

本书在编写和讲授过程中承蒙一机部第七设计院荣深梁高级工程师，一机部高压电器研究所李毅达高级工程师和庄稼人、刘次平、王勇武等工程师审阅并提出宝贵修改意见，深致谢意。

由于笔者学识菲薄，书中缺点错误难免，敬请读者批评指正。

编著者 蔡伯儒

一九八四年四月

目 录

序 言	(1)
第一章 拉普拉斯变换基本概念引入	(1)
§ 1—1 概述	(1)
§ 1—2 稳态情况下的符号运算法	(1)
§ 1—3 广义阻抗	(4)
§ 1—4 周期性函数底富里埃级数展开	(5)
§ 1—5 对称条件	(9)
§ 1—6 富里埃级数的指数形式	(15)
§ 1—7 富里埃积分与富里埃变换	(20)
第二章 拉普拉斯变换	(27)
§ 2—1 从富氏变换到拉普拉斯变换	(27)
§ 2—2 一些基本重要函数底拉普拉斯变换	(33)
§ 2—3 拉普拉斯变换底运算	(38)
第三章 利用部份分式展开定理 进行反拉普拉斯变换	(43)
§ 3—1 概述	(43)
§ 3—2 在分母 $D(P)$ 有理多项式中不含重根情况下 的反拉普拉斯变换	(44)
§ 3—3 在分母 $D(P)$ 为有理多项式且含有重根情况 下底反拉普拉斯变换	(48)
§ 3—4 在分母 $D(P)$ 有理多项式中含有一个 $j\omega$ 根 情况的反拉普拉斯变换	(50)

第四章 拉普拉斯变换在集中参数电路中底应用·····	(55)
§ 4—1 R、L 串联电路·····	(55)
§ 4—2 R、C 串联电路·····	(68)
§ 4—3 R、L、C 串联电路·····	(74)

第五章 拉普拉斯变换方法底定理及其应用·····	(97)
§ 5—1 概述·····	(97)
§ 5—2 平移定理及其运用·····	(98)
§ 5—3 单位冲击·····	(102)
§ 5—4 单位函数·····	(105)
§ 5—5 衰减定理及其应用·····	(106)
§ 5—6 幅值定理及其应用·····	(111)
§ 5—7 起始值定理和最后值定理及其应用·····	(113)
§ 5—8 周期函数定理及其运用·····	(117)
§ 5—9 相乘相除定理及其运用·····	(122)

第六章 拉普拉斯变换方法底定理及其应用(续)·····	(129)
§ 6—1 概述·····	(129)
§ 6—2 冲击反应和单位级反应·····	(129)
§ 6—3 围线积分·····	(131)
§ 6—4 乘积定理及其运用·····	(134)
§ 6—5 若干无理函数的反拉普拉斯变换·····	(140)
§ 6—6 乘积定理的物理意义及其应用·····	(145)
§ 6—7 重叠积分(杜美尔定理)·····	(152)

第七章 具有分布参数系统·····	(159)
§ 7—1 概述·····	(159)
§ 7—2 输电线路·····	(160)

§ 7—3	用拉普拉斯变换进行求解的方法	(163)
§ 7—4	无穷长输电线路	(169)
§ 7—5	一定长度输电线路	(185)

第八章 复变函数 (197)

§ 8—1	概述	(197)
§ 8—2	复变数与复变函数	(197)
§ 8—3	复变函数的微分	(201)
§ 8—4	柯西—黎曼条件	(202)
§ 8—5	复变函数的积分	(204)
§ 8—6	柯西定理	(206)
§ 8—7	极点、留数和留数定理	(210)
§ 8—8	留数计算	(214)
§ 8—9	在拉普拉斯变换理论中曲线的重要性	(217)

第九章 反拉普拉斯变换 (221)

§ 9—1	概述	(221)
§ 9—2	反拉普拉斯变换式	(221)

附录A	运算变换表	(241)
-----	-------	-------

附录B	拉普拉斯变换表	(243)
-----	---------	-------

附录C	贝塞尔函数	(267)
-----	-------	-------

第一章 拉普拉斯变换 基本概念引入

§ 1—1 概述 本章从稳态运算开始，引进了广义阻抗概念。而后过渡到暂态观念的初步建立。再通过富氏级数和富氏积分以及富氏变换的简要分析而比较出拉普拉斯变换方法的优越性。

§ 1—2 稳态情况下的符号运算法

在稳态电路中，电压、电流和阻抗的线性关系为 $I = \frac{u}{Z}$ ，而暂态电路中三者关系怎样呢？这是应该思考的。

考虑像图 1 这样一个 R、L 和 C 的串联电路加上一个正弦电压

$$u = u_m \sin(\omega t + \phi_1)$$

在这回路中流过的电流 i 可用下列线性微分方程式关系表示

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u \quad (1-2)$$

或

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt} \quad (1-3)$$

为了明确一些基本概念，首先让我们只考虑稳定状态的情况，也就是说不考虑它的起始暂态过程，这样对于式 (1-2) 的稳态解我们可以获得

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_2) \quad (1-4)$$

同时可以很容易求得 I_m 和 ϕ_2 仅是 R、L、C、 U_m 和 ω 的函数

按照三角函数和复指函数的关系我们可以得到下式

$$u = U_m \sin(\omega t + \phi_1) = U_m \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi_1} - e^{-j\omega t} e^{-j\phi_1}}{2j}$$

则 (1-5)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \omega U_m \cos(\omega t + \phi_1) \\ &= \omega U_m \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi_1} + e^{-j\omega t} e^{-j\phi_1}}{2} \end{aligned} \quad (1-6)$$

同样

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= I_m \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi_2} - e^{-j\omega t} e^{-j\phi_2}}{2j} \end{aligned} \quad (1-7)$$

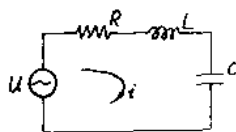


图1.R.L.C电路

因此

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi_2} + e^{-j\omega t} e^{-j\phi_2}}{2} \quad (1-8)$$

而

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = j\omega^2 I_m \frac{e^{j\omega t} e^{j\phi_2} - e^{-j\omega t} e^{-j\phi_2}}{2} \quad (1-9)$$

把式(1-6)、(1-7)、(1-8)和式(1-9)代入式(1-3)中并把

含有 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 项分别进行比较即可得到

$$\left(j\omega^2 L e^{j\phi_2} + \omega R e^{j\phi_2} + \frac{e^{j\phi_2}}{jC} \right) I_m = \omega u_m e^{j\phi_1} \quad (1-10)$$

$$\left((-j\omega L e^{-j\phi_2} + \omega R e^{-j\phi_2} - \frac{e^{-j\phi_2}}{jC}) \right) I_m = \omega u_m e^{-j\phi_1} \quad (1-11)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \left[R + (j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \right] I_m e^{j\phi_2} &= u_m e^{j\phi_1} \quad (a) \\ \left[R - (j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \right] I_m e^{-j\phi_2} &= u_m e^{-j\phi_1} \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

设

$$\left. \begin{aligned} U_m e^{j\phi_1} &= \bar{u} \quad (a) \\ I_m e^{j\phi_2} &= \bar{i} \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

此处 $\bar{u}$ 和 $\bar{i}$ 称为 u 和 i 的矢量符号, 我们得到

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad \bar{u} \quad (1-14)$$

因为 $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$, 所以 $\bar{u}$ 和 $\bar{i}$ 两者都是复数, 式 (1-14) 的分母亦是复数, 我们可以用复数阻抗 Z 来代表

$$\left. \begin{aligned} R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) &= Z \\ R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

从上式的关系我们可以将式 (1-14) 简写成

$$\bar{i} = \frac{\bar{u}}{Z} \quad (1-16)$$

式中 Z 习惯上被称为符号阻抗

从上述例子的分析过程，如果我们将式(1—2)和式(1—12)进行比较即可发现一个简单的符号替换规则

$$j\omega \text{ 代替 } \frac{d}{dt} \quad \frac{1}{j\omega} \text{ 代替 } \int dt$$

$$i \text{ 代替 } i \quad \text{和} \quad \bar{u} \text{ 代替 } u$$

上述规则可以运用到任何线性电路和常系数微分方程，由于这样，利用符号来替换的结果，使得以微分方程形式出现的运算变成了复数加、减、乘、除的简单运算，同时符号电流 i ，符号电压 $\bar{u}$ 和符号阻抗 Z 之间的关系也呈现了像直流电路中电压、电流和电阻之间的简单关系

§ 1—3 广义阻抗：

上节讨论的是当一个正弦电压加到RLC串联电路的稳态情况，如果所加的是具有阻尼的正弦电压

$$U = Ume^{pt} \quad (p = \alpha + j\omega)$$

其情况又该是怎样呢？无可置疑的电压 u 和电流 i 的关系仍应和前式(1—3)一样

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt} \quad (1-3)$$

假设

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{u}{Z} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{Z} \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2 i}{dt^2} &= \frac{1}{Z} \frac{d^2 u}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

以式 (1-17) 代入式 (1-3) 中便得

$$\frac{L}{Z} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{R}{Z} - 1 \right) \frac{du}{dt} + \frac{u}{CZ} = 0 \quad (1-18)$$

以 $u = U_m e^{pt}$ 代入式 (1-18) 中求得 Z 值

$$\frac{Lp^2}{Z} + \left(\frac{R}{Z} - 1 \right) p + \frac{1}{CZ} = 0 \quad (1-19)$$

或

$$Z = R + pL + \frac{1}{Cp} \quad (1-20)$$

则电流 $i(t)$

$$i(t) = \frac{u_m e^{pt}}{Z} \quad (1-21)$$

这里虽然我们不能设想 Z 的物理意义，但对于采用了复数运算的结果，使得广义阻抗 Z 在形式上像一个纯粹的电阻一样。

比较式 (1-15) 与式 (1-20) 很明显的看到：相当于式 (1-15) 中的 $j\omega$ 用 P 来代替而得式 (1-20) 对于这种用 P 来代替 $j\omega$ 所得的阻抗，我们不妨给它定名为“广义阻抗”。因为它是符号阻抗的进一步推广。

联系上节正弦稳态下的符号阻抗关系，在广义阻抗的条件下亦可以用 P 代 $\frac{d}{dt}$ 和由 $\frac{1}{P}$ 代 $\int dt$ 而得（同样可用 P^2 代 $\frac{d^2}{dt^2}$ 等）。也就是说在所加电压为阻尼振荡情况下，我们也能用比较简单的复数 P 的乘除运算来代替微分和积分的运算。

如果我们能把 $j\omega$ 当做一个算子看待，那么 P 也就可以作为另一个算子看待了。

§ 1-4 周期性函数底富里埃级数展开

任何一个具有周期 2π 底周期性函数 $f(\theta)$ 如能满足下列三个条件

(1) 在一个周期内函数不连续点为有限个

(2) 在一个周期内函数的极大值与极小值为有限数, 如果 $f(\theta)$ 在 θ_0 有一个第一类间断点则 $f(\theta)$ 的富里埃级数在该点之值等于

$$\frac{1}{2} [f(\theta_{0-1}) + f(\theta_{0+})]$$

(3) 积分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$ 存在

则该周期性函数 $f(\theta)$ 即能展开成如下形式的富里埃级数

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (1-22)$$

其中系数 a_n 和 b_n 为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (1-23)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (1-24)$$

这一系数关系表示式的证明可用 $\cos m\theta$ 和 $\sin m\theta$ 分别乘式 (1-22) 两边并从 $-\pi$ 到 π 进行积分获得

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{a_0}{2} \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \cos m\theta \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \theta \cos m \theta \Big] d\theta \quad (1-25)$$

式 (1-25) 右边第一项积分当 $m \neq 0$ 时显然为 0, 第二项和第三项积分能展开如下

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos n \theta \cos m \theta d\theta \\ &= \frac{a_1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m+n) \theta + \cos (m-n) \theta] d\theta \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi a_1 & m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (1-26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin n \theta \cos m \theta d\theta \\ &= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (m+n) \theta - \sin (m-n) \theta] d\theta = 0 \end{aligned} \quad (1-27)$$

因此当 $m = n$ 时式 (1-26) 才不等于 0 而为

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n \theta d\theta = \pi a_n \quad (1-28)$$

同样可证

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n \theta d\theta = \pi b_n \quad (1-29)$$

假定式 (1-23) 中 $n = 0$, 我们便得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \right]$$

$$= 2 \left[f(\theta) \text{ 在一周期内平均值} \right]$$

或

$$\frac{a_0}{2} = f(\theta) \text{ 的平均值} \quad (1-30)$$

假使所给函数是一个时间函数，如像在工程中常见的一些问题那样，若令 T 为所给时间函数 $f(t)$ 的周期，那末

$\theta = \left(\frac{2\pi}{T} \right) t = \omega t$ ，此处 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 是角频率，这样我们得到

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (1-31)$$

其中

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \quad (1-32)$$

(n = 1, 2, 3, \dots)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \quad (1-33)$$

(n = 1, 2, 3, \dots)

式 (1-31) 亦可改写成如下形式

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \psi_n) \quad (1-34)$$

其中

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1-35)$$

$$\psi_n = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad (1-36)$$

式(1—34)很清楚的表示出任一满足上述三个条件的周期性函数能被分解为平均值(直流成分)和具有谐波频率为基波频率($\frac{1}{T}$)整倍数的各种谐波成分,这些成分的幅值和相角如式(1—35)和(1—36)所表示,如果画出 C_n 的幅值 $|C_n|$ 随 $n\omega$ 而变化的图形如图1—2

所示。那末这一图形可被称为所给函数 $f(t)$ 的频谱,成分中 $\omega = 0$ 所在处是所给函数底平均值,其幅值与其他成分谐波的幅值不存在一定关系。各种成分的频率分离间隔为 ω ,在某种特殊情况下某些成分可以不存在。因此它的频谱形成一不连续折线,即相当于一系列不连续

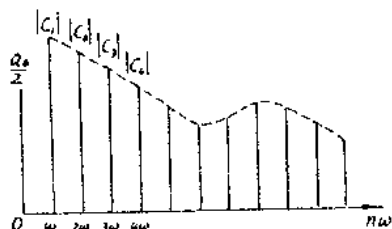


图1—2. 不连续频谱

频率响应。自然会想到 ψ_n 亦可作出随 $n\omega$ 变化的图形,但对我们来说这是次要的,这里不予讨论。当 T 增加(ω 减少),图1—2的频率相邻间隔愈加接近,在极限情况下如 T 增加到无限大则不连续的频谱将趋向一连续的频谱曲线同时富里埃级数将变成我们在§1—6节将要讨论的富里埃积分。

§1—5 对称条件

当所给函数具有某种对称性的时候,这就是说这一函数的富里埃级数展开式中某些项是没有的,对于另一些存在项的系数的表示式可以被简化,下面我们将讨论两种对称属性:

(A) 仅有正弦项或余弦项, (B) 仅有偶次或奇次谐波。

(A) 仅有余弦或正弦项

一个函数 $f_c(\theta)$ 若为偶函数则必

$$f_c(\theta) = f_c(-\theta)$$

(1—37)

因此图 (1—3 a) 所示函数为一偶函数

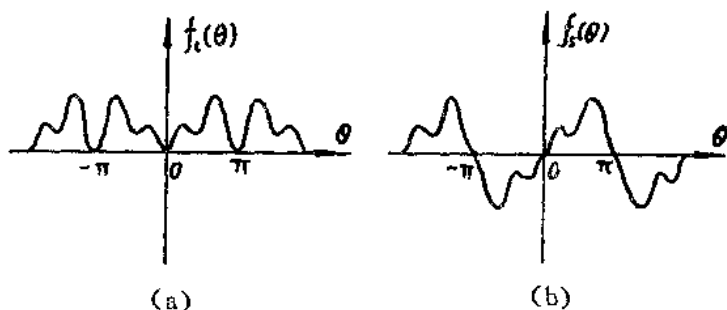


图 1—3 (a) 偶函数 (b) 奇函数

一个偶函数不仅对称于通过原点 ($\theta = 0$) 的纵坐标轴, 而且也对称于所有过 $\theta = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 的垂线, 因为所有周期性函数具有周期 2π , 亦必须满足 $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ 条件, 当 $f_c(\theta)$ 是偶函数时我们得

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_c(\theta) \cos n\theta d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_c(\theta) \cos n\theta d\theta \\
 (n &= 0, 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{1-38}$$

式 (1—38) 是一个偶函数 $f_c(\theta) \cos n\theta$ 在区间 $-\pi \leq \theta \leq 0$ 和在区间 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的积分值完全相等的推论, 而

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_c(\theta) \sin n\theta d\theta = 0 \\
 (n &= 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{1-39}$$