

运筹学讲义

线性规划

排队论



上海交通大学1220教研室

无锡市纺织工业职工大学图书馆	
总号	29885
类别	01数 学
分类号	3720
书页	81

运 筹 学 讲 义

第二部分 排队论及其应用

江南大学图书馆



91241765

引言

研究如何以合理的方式组织具有明确目的性的活动，这样一门专门科学即称为运筹学。运筹学的范围极为广泛，在企业、管理、工业生产、交通运输、军事领域及行政管理部门等方面都得到广泛的运用。总之，凡是为达到一定的目的而组织任何一项活动，都可以运用运筹学的方法。当然，组织任何一项活动，都应选取最优的方式以达到预期的目的，也就是说，获得最好的效果。

线性规划是运筹学的一部分，它是从二十世纪四十年代发展起来的一个新兴的数学分支。G. B. Dantzig 于 1947 年发表单纯形方法，为线性规划作为运筹学的第一个正规学科奠定了基础。在这以前，第二次世界大战期间，为了解战争中发生的各种复杂问题，最优化技术已被经济学家和军事学家所认识。1947 年对策论之父 J. Von. Neumann 发表了对偶的概念，Dantzig 的单纯形方法的实用性越来越被人们所认识，这个概念开辟了线性规划中许多研究的领域，进一步提高了它的实用性和解决问题的能力。五十年代涌现出大量新的标法并在理论上取得了新的进展。今天，由于线性规划具有成熟的理论，有效的标法和广泛的运用，所以它是最好的最优化技术之一。事实上，线性规划的成就直接为其它数学规划的进展产生了重要的作用，其中包括整数规划、随机规划和非线性规划标法的发展。同时线性规

划理论的发展和运用也为近年来国内外迅速发展起来的系统工程提供了重要的理论根据。

毫无疑问,线性规划应该把它的许多成功,如有效的求解算法,归功于数字电子计算机的这种速度和贮存能力的极大的提高。例如单纯形算法可以解任何类型的线性规划问题,但它的计算很繁锁,用人工计算就不能解决复杂的实际问题,由于电子计算机的运用才使它大显身手。1951年国际上只能解 10个约束方程的线性规划问题,到1965年即能解 1,000 ~ 10,000个约束方程的线性规划问题,而且速度也大大提高。现在不但问题的规模更大,速度更快,而且有的计算机还带有解线性规划问题的通用程序,解题时,只要调用这程序,输入有关数据,几乎立即就可把要计算的结果打印或显示出来。

目前线性规划主要的研究方向有以下四个方面:

1. 分节算法 要解决一个大系统问题,变量往往不至于几千个,即使用计算机计算变量也不能太多,所以要分节运算,目前我们对特殊结构的线性规划问题能够进行二分节, P 分节运算,问题越大效果越显著。但除了特殊结构以外,一般大型线性规划问题如何进行分节,目前正在研究。

2. 特殊方法 对特殊的问题可用特殊的方法解决,例如运输问题,用解运输问题的方法就比用单纯形方法为好。

3. 近似计算 近似计算目前已经有人在使用,但算法的收敛性目前尚无法给予证明。

4. 研究算法的有效性。

§ 1 概述

§ 2 排队过程的特点及某些基本概念

§ 3 泊松过程和负指数分布

§ 4 生灭过程

§ 5 $M/M/1$ 系统

§ 6 $M/M/S$ 系统

§ 7 $M/M/1/K$ 系统

§ 8 $M/M/S/K$ 系统

§ 9 资源有限情况下的 $M/M/S$ 模型

§ 10 $M/G/1$ 系统

第一章 线性规划问题的数学模型

§1-1 线性规划问题的数学形式

线性规划问题是一种规划问题，其中要使之极小化或极大的目标函数是未知变量的线性函数，目标函数所受的约束也是由线性等式或线性不等式组成的。其数学形式为：

$$\text{Max (或 Min)} \quad Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

从经济意义来说，线性规划的模型可以作如下的解释：
线性规划模型包括 j 个活动 ($j=1, 2, \dots, n$)，将有限资源 b_i ($i=1, 2, \dots, m$) 进行分配，第 i 个资源输入给第 j 个活动，每单位的使用率是 a_{ij} ，对应于这个输入，第 j 个活动每单位的输出（成本或利润）用 C_j 来表示。

模型的目标是决定每个活动的活动量 x_j 的大小，在不违反资源约束的条件下，使所有活动的总输出达到最优（极大或极小）。我们把 Z 称作目标函数，资源的限制称为约束。

线性规划模型有着各种广泛的应用，因为在实际问题中所出现的大量约束和目标函数是线性的。

用线性规划解具体问题一般分为二步：首先将问题写成线性规划的数学模型，然后解这模型，求得最优解。对管理人员来说，重要的是如何把一个实际问题归纳为数学模型，也就是说，明确有待决策的未知变量，确切地列出问题的目标函数及约束条件。一旦把问题归纳成为线性规划问题，实际上该问题已被解决，因为具体求解只要通过计算机很快就能获得解答。

§1-2 建立线性规划模型的例子

[例1] 营养问题

有几种食物，每种食物都是由蛋白质、脂肪、维生素、碳水化合物、无机盐类等 m 种不同的营养成分所组成。不同的食物中营养成分含量各不相同，价格也不同。问如何购买食物，既能满足营养方面的要求，又使开支最省。

设： C_j — 第 j 种食物的单位价格， $j=1, 2, \dots, n$

x_j — 购买第 j 种食物的数量， $j=1, 2, \dots, n$

a_{ij} — 第 j 种食物每个单位含第 i 种营养成分的数量， $i=1, 2, \dots, m$ ， $j=1, 2, \dots, n$

b_i — 人们所需要的第 i 种营养成分的最小量， $i=1, 2, \dots, m$

营养问题不仅说明了线性规划问题的实质，而且具有普遍的应用价值。凡在一产品的生产过程中，决定于各种原料的最优混合比例，以制成一定性产品

成本最低的产品，都可用此模型。例如：应用于石油工业，就是汽油掺合问题，以炼成具有一定特性且成本最低的汽油。应用于纺织工业，就是各类纤维的混合比例，以织成一定性质且成本最低的纺织品。应用于畜牧业，就是牲畜饲料的最优配料。应用于空间开发和核潜艇人员，就是决定各种食品的数量，以满足营养要求，且使食品的总重量最小。

在这个示例中 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知量， x_j 为未知的决策量，于是，这个问题就是要选择 x_j ，使总成本最小，且满足营养约束及对食品数量的非负约束。

列出数学模型：

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

[例2] 运输问题

某类物资有 m 个产地， n 个销地，第 i 个产地的产量为 a_i ($i=1, 2, \dots, m$)，第 j 个销地的需求量为 b_j ($j=1, 2, \dots, n$)，第 i 个产地到第 j 个销地的运价为 c_{ij} 。产销平衡，问应如何来确定最佳调运方案，使它既满足各地的需要，又使运费最省。

设： x_{ij} —— 由产地 i 供给销地 j 的物资数量。

为了明确起见，把产销情况列成下表：

运价 产地 \ 销地	1		j		n	产量
1	$c_{11} x_{11}$		$c_{1j} x_{1j}$		$c_{1n} x_{1n}$	a_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
i	$c_{i1} x_{i1}$		$c_{ij} x_{ij}$		$c_{in} x_{in}$	a_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	$c_{m1} x_{m1}$		$c_{mj} x_{mj}$		$c_{mn} x_{mn}$	a_m
销量	b_1		b_j		b_n	

由于每个产地运往所有销地的总数量是确定的,即等于该地的产量。每个销地销售各地运往它的数量之和也是确定的,即等于它的销量。问题是要确定表内的非负变量 x_{ij} , 使得第 i 行的和为 a_i , 第 j 列的和为 b_j , 并使总运费 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ 最小。

这样, 我们就得到如下的线性规划模型

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1, 2, \dots, m \\
 & \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1, 2, \dots, n \\
 & \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \\
 & \quad x_{ij} \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

[例3] 人事安排问题

把各种可用的人力资源与工作需要相配合, 合理
1~4~

开发人力资说，做到人尽其才，这就是本题的实质。

今有A、B、C三人，经过一连串的测验以决定三人中谁适合于做技术员，设计师或职员的工作。三人各项考核得分如下：

	技术员	设计师	职员
A	5	4	7
B	6	7	3
C	8	11	2

人与工作一一对应，也就是一人一职，一职一人。并且全部分配价值是各个分配价值的总和。例如A、B、C三人分别分配从事技术员、设计师、职员的工作，则总分为 $5+7+2=14$ 。

我们由运输问题得知，以A、B、C三人作始发点，每一始发点有一单位物品（被选人员），准备运往目的地，目的地是三种职务，需由三人中派一人担任。

求人员分配的最佳方案，即求分配测验总分之和的最大值。

设： x_{ij} ——将第*i*人分配做第*j*项工作。

求运输问题一样 列表如下：

	技术员	设计师	职员	
A	5 x_{11}	4 x_{12}	7 x_{13}	1
B	6 x_{21}	7 x_{22}	3 x_{23}	1
C	8 x_{31}	11 x_{32}	2 x_{33}	1

所以线性规划的模型是：

$$\text{Max } 5x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + 3x_{23} + 8x_{31} + 11x_{32} + 2x_{33}$$

$$\text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1, 2, 3; \quad j=1, 2, 3$$

显然，人事安排问题的未知变量必须是整数 0 或 1。这就引出了线性规划的一个重要分支，即 0-1 线性规划问题。

[例 4] 生产规划问题

某地区有三个农场，这三个农场组成了一个联盟，联盟统一计划作物布局。

这个地区适合于种甜菜，棉花和高粱，每个农场 1~6~

产量都受到可耕地的面积以及灌溉用水量的限制。
 不同的作物每亩期望的纯收入和用水量完全不同。另外
 在于这联盟的三农场达成协议，每一农场将种植它可耕地
 相同比例。我们面临的问题是如何计划每个农场各种
 作物分别种多少亩，既满足上述约束条件，又使联盟的
 收入最大。

数据由下表给出：

表1. 资源数据

农场	可耕地 (亩)	分配用水量 (单位)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

表2. 作物数据

作物	最大定额 (亩)	消耗水量 (单位/亩)	纯收入 (元/亩)
甜菜	600	3	400
棉花	500	2	300
高粱	325	1	100

设： x_{ij} —— 第 i 个农场种植第 j 种作物的数据。

见表3：

表3.

农场 \ 作物	甜菜	棉花	高粱
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

这样就得到线性规划模型， Z 是总收入

$$\text{Max } Z = 400(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 300(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 100(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

$$\text{s.t. } x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 300$$

} 耕地约束

$$3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} \leq 600$$

$$3x_{21} + 2x_{22} + x_{23} \leq 800$$

$$3x_{31} + 2x_{32} + x_{33} \leq 375$$

} 灌溉水约束

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 600$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 500$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 325$$

} 作物约束

$$\frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}}{400}$$

$$\frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}}{600}$$

$$\frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}}{600}$$

$$\frac{x_{31} + x_{32} + x_{33}}{300}$$

$$\frac{x_{31} + x_{32} + x_{33}}{300}$$

$$\frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}}{400}$$

} 社会约束

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, 3$$

非负约束

这模型中，社会约束的形式不合适，因为决策变量在约束方程的右边。因此它们的最后形式是

$$3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - 2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) = 0$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} - 2(x_{31} + x_{32} + x_{33}) = 0$$

$$4(x_{31} + x_{32} + x_{33}) - 3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) = 0$$

[例5] 投资问题

某公司第一年有资金100万元。若每年都按如下的投资方案：即如果第一年投入一笔资金，第二年又继
1~8~

投入此金额的50%，那末到第三就可以收回第一年投资的一倍金额。甚至即可在当年投资。问公司如何决定最优的投资策略，使第6年所掌握的资金为最多。

公司每年有如下的活动：

1. 补充去年的投资，需继续增加50%投资。
2. 开始今年的投资。
3. 保存现金，供将来投资用。

第一项活动取决于上一年之新投资，因此对于这一年就没有选择的余地。对于2、3项活动，却有充分的自由。因此，每年需要两个决策变量——一个变量用来表示这一年开始的总投资，另一个表示该年所保留的资金。

设： x_i ——第*i*年所作的新投资， $i=1, 2, 3, 4$ 。

y_i ——第*i*年所保留的资金。

第5年不再进行新的投资，因为这笔投资要到第7年才能回收。

约束条件保证每年满足如下的关系：

投资总金额（续加投资和新增投资）+保留金[资]
=可利用的现金总额。

$$\text{第一年, } x_1 + y_1 = 100$$

$$\text{第二年, } \frac{x_1}{2} + x_2 + y_2 = y_1$$

$$\text{第三年, } \frac{x_1}{2} + x_3 + y_3 = y_2 + 2x_1$$

$$\text{第四年, } \frac{x_2}{2} + x_4 + y_4 = y_3 + 2x_2$$

第五年 $\frac{x_4}{2} + y_5 = y_4 + 2x_3$

到第六年手头所有的现金总额等于 $y_5 + 2x_4$ 。因此，
目标函数是：

$$\text{Max } Z = y_5 + 2x_4$$

[例6] 控制生产进按问题

假如产品的需求量随季节波动，而每个月的需求量 D_i 可通过预测的办法得到。如果工厂的生产量每个月都正好等于预测出来的需求量，这样安排不会是最优的，因为在生产量高的月份要增加加班费用，而生产量低的月份设备与人员又空闲起来。如果采用另一种办法，使生产保持平稳，把需求量低的月份的剩余产品存貯起来，补充作为需求量高的月份的不足量。但产品存貯在仓库中就要增加成本。问题是要决定最优生产进按，使得由于生产波动与库存成品而增加的成本总和为最小。

若已知： D_i —— 第 i 个月的需求量。

a —— 第 i 个月到第 $i+1$ 个月增加一个单位的生产量所需要的成本。

b —— 单位产品存貯一个月所需的成本。

设： x_i —— 第 i 个月的生产量

S_i —— 第 i 个月的产品存貯量

由产销平衡得到下面的关系式

1~10~

$$x_i + s_{i-1} = D_i + s_i$$

$$\text{即 } x_i + s_{i-1} - s_i = D_i$$

工厂希望生产进度的波动小些。任何两个连续月份的生产量之差为：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\text{令 } x_i > x_{i-1} \text{ 时, } \Delta x_i = \begin{cases} y_i = x_i - x_{i-1} \\ z_i = 0 \end{cases}$$

$$x_i < x_{i-1} \text{ 时 } \Delta x_i = \begin{cases} y_i = 0 \\ z_i = -(x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$

$$\therefore x_i - x_{i-1} = y_i - z_i$$

$$\text{即 } x_i - x_{i-1} - y_i + z_i = 0$$

生产总成本为： $a \sum y_i + b \sum s_i$

这样就得到控制生产进度问题的线性规划模型：

$$\text{Min } Z = a \sum_{i=1}^n y_i + b \sum_{i=1}^n s_i$$

$$\text{s. t. } x_i - s_{i-1} - s_i = D_i$$

$$x_i - x_{i-1} - y_i + z_i = 0$$

$$x_i \geq 0, x_0 = 0$$

$$s_i \geq 0, s_0 = 0$$

$$y_i \geq 0$$

$$z_i \geq 0$$

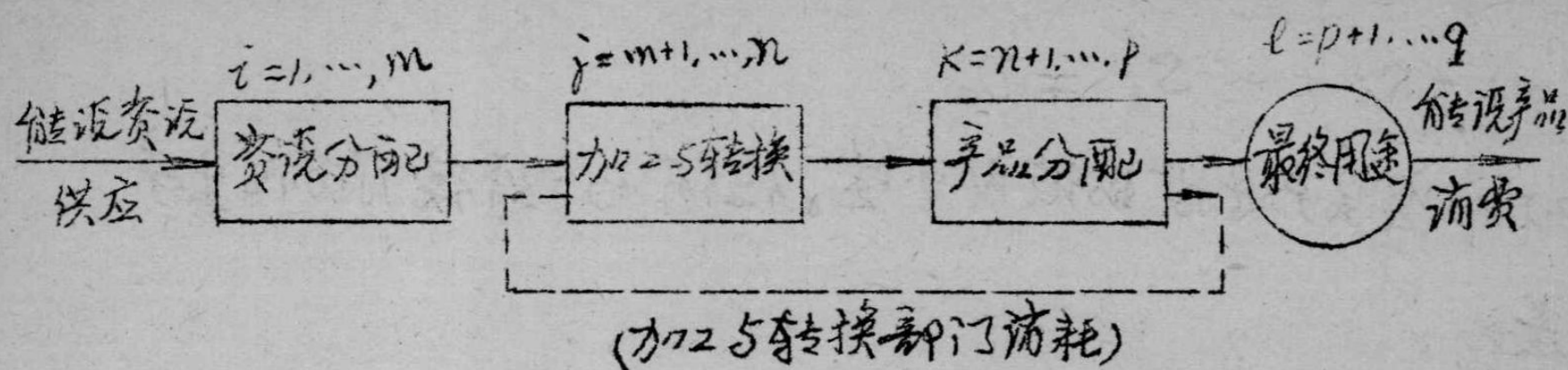
$$(i=1, 2, \dots, n)$$

[例7] 能耗模型

能耗系统按能耗关系构造的线性规划模型的示意

1 ~ 11 ~

图如下。能流方向由左至右。模型大体区分为资源分配、



S_i

D_e

$$\sum_j a_{ij} x_{ij} \leq S_i, \quad \sum_i x_{ij} = \sum_k a_{jk} x_{ik},$$

$$\sum_j x_{ik} = \sum_l a_{kl} x_{il}, \quad \sum_k a_{kl} x_{il} = D_e$$

加工与转换、产品分配、

最终用途等环节，每个环节又分为若干部门。图上的标 i 、 j 、 k 、 l 为部门数目。资源供应的限制量为 S_i ，产品消费需求（最终用途）为 D_e 。各环节由环节间的能流量相连接，它们均用变量 x 表示， x_{ij} 表示从 i 环节的第 j 部门到另一个环节的第 j 部门的能流量。如果把各个能流过程按顺序排列编号， x 的下标也可改用相应的顺序号。以后讨论具体模型时采用这种流水编号方式更为简便。所有能流量都用统一的能量单位常用：“万吨标准煤/年”计量。

i) 约束条件的一般形式

A. 资源分配环节：各部门的能流量要服从资源供应量的限制。即

$$\sum_{j=m+1}^n a_{ij} x_{ij} \leq S_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

1~12~