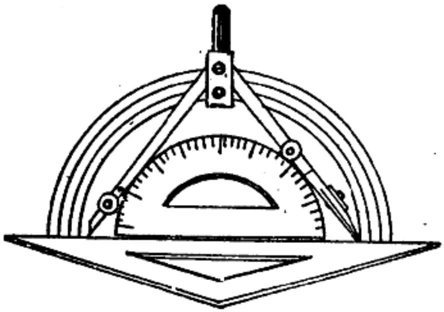
高级中学

平面几何复习参攷資料

PINGMIAN JIHE FUXI CANKAO ZILIAO



南京市教育局教学研究室编

編 者 的 话

这本"平面几何复习参考資料"是供1963—1964学年度第一学期高中一年級复习平面几何使用的。我們根据1961—1963年初中二、三年級所采用的平面几何課本，适当地將基础知识进行了系統整理，并补充了有关邏輯知识和证題方法，編輯了这本資料，其目的在于使学生通过复习后，能进一步巩固和熟练的掌握与应用基础知识，提高邏輯推理与论证能力，并且为順利的学好立体几何打下基础。

为了便于学生閱读，在資料中所补充的內容，一般都作了較詳細的闡述，而对于定理的证明，全部从略。資料中部分未加解释的定义，我們均在其后面附有符号（?），以便引起学生的注意。

資料中有些內容要求較高，各校根据具体情况，可进行适当的調整。关于三角形解法、測量等內容，由于原平面几何課本（指1961—1963年初中二、三年級所采用的平面几何課本）較詳細，复习与否由教师酌情处理，本資料未作介紹。

在习題方面，資料中分为练习題和思考題两种，一般说来，练习題偏重于巩固基础知识，思考題要求比較高，可作为进一步培养学生独立思考能力之用。

这本資料是參考性的：各校可以全部采用；也可以采用一部分，自編一部分。关于复习时間長短和复习方式，各校可根据具体情况进行适当的安排。

李子婁、岁少誠、宋家澳等老师參加了本資料的編写工

作，在編輯过程中，市教师进修学院有关老师曾提出了有益的意见，在此一并致以衷心的感謝。由于編写时間仓促，未经領导审查，缺点和錯誤在所难免，热忱地希望使用它的教师們給予批评与指正。

南京市教育局教学研究室

1963年8月

目 录

第一章　定理和证明

I　定　　理

1. 命題　叙述一个明确判断的完整的語句叫做命題。所謂"判断"，就是对所述的对象要有所肯定或有所否定。

例如："北京是中华人民共和国的首都"。"我們已经不是初中学生了"都是命題。

又如："明天不一定下雨。""这块黑板"都不是命題。

2. 定义　説明一个名詞或术語意义，使它和别的名詞意义不相混淆的命題叫做定义。

例如："知道了乘法中的积和一个乘数而求另一个乘数的計算方法"，这是算术上对除法的定义。"几何学是研究物体的形状、大小以及物体間相互位置关系的学科，"是对几何学(包括平面几何、立体几何)这一个名詞的定义。

3. 公理　为人类長期实践所证实的，不用推理的方法加以证明而作进一步推理的基础的命題，叫做公理。在几何中通常公理都用命題的形式叙述出来。

(1) 普通公理　在数学里能适用于各科的公理叫做普通公理。下列是几何中常用的等量公理和不等量公理，事实上我們学习代数时已经常常应用它們。

i. 等量公理

① 任一个量等于它的自身。($a=a$)

② 第一个量等于第二个量，则第二个量一定等于第一个量。(若 $a=b$，则 $b=a$)

③ 等于同一个量的量相等。(若 $a=b$，$b=c$，则 $a=c$)

④ 等量加等量，共和相等。(若 $a=b$，$c=d$ 则 $a+c=b+d$)

⑤ 等量减等量，其差相等。(若 $a=b$，$c=d$，则 $a-c=b-d$)

⑥ 等量乘以等数，其积相等。(若 $a=b$，$m=n$，则 $ma=nb$，m、n 是正实数，不是量)

⑦ 全量等于各分量之和。(若 b 与 c 是 a 的两部分，则 $a=b+c$)

⑧ 在等式中，一个量可以用和它相等的量来代替。(简称等量代换)(若 $a+b=c$ 且 $b=d$，则 $a+d=c$)

ii. 不等量公理

① 若第一量大于第二量，则这两个量不等。(若 $a>b$，则 $a\neq b$)

② 若第一量大于第二量，则第二量小于第一量。(若 $a>b$，则 $a<b$)

③ 任何两个量，都可以比較其大小。第一量或大于第二量，或小于第二量，或等于第二量。(即 $a>b$ 或 $a<b$ 或 $a=b$)

④ 第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量。(若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$)

⑤ 等量加不等量，其和同向不等，大的仍大，小的仍小。(若 $a=b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$)

⑥ 不等量加不等量，其和同向不等，大的仍大，小的仍小。(若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$)

⑦ 等量减不等量，其差反向不等，减小的結果反大，减大

的結果反小。(若 $a=b, c>d$，且 $a>c, b>d$，则 $a-c<b-d$)

⑧ 不等量减等量，其差同向不等，大的仍大，小的仍小。(若 $a>b$，$c=d$，且 $a>c$，$b>d$，则 $a-c>b-d$)

⑨ 不等量乘以相等的正实数，其积同向不等，大的仍大，小的仍小。(若 $a>b, m=n$，则 $ma>nb$，m、n 是正实数)

⑩ 不等量除以相同的正实数，其商同向不等，大的仍大，小的仍小。若 $a>b$，$m=m$，则 $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$，$m\neq 0$)

⑪ 全量大于其任何分量。(若 b 与 c 是 a 的两部分，则 $a>b$，$a>c$)

⑫ 在不等式中，一个量可以用和它相等的量来代替。(若 $a+b>c$，且 $b=d$ 则 $a+b>d$)

(2) 几何公理　仅适用于几何学一科的公理叫做几何公理。

例如："过任意两点可以引一条直线，并且只可以引一条直线。"

4．定理　从定义、公理或已经证明了它的正确性的命题所推断得出的具有正确性的命题叫做定理。

例如："两条直线相交所成的对頂角相等。"两条直线和第三条直线相交，如果同位角相等，这两条直线就平行。"

5．推论　从公理或定理直接推出来的命题叫做这个公理或这个定理的推论，也叫做系。

例如：从公理"过任意两点，可以引一条直线，并且只能引一条直线"直接推出来的"两条直线不能有一个以上的交点，"就是这个公理的推论。

6．定理的组成　每个定理都可以分为条件(假設)和結论(終結)两部分；条件是定理中已知的事項，結论是从定理

所提出的条件經过推理而得到的事項。例如，定理“在同圓或者等圓中，如果圓心角相等，那末它們所对的弧也相等”中，前一部分“在同圓或者等圓中，圓心角相等”就是条件，而后一部分“它們所对的弧也相等”就是結论。

所有的定理，我們都可以把它写成“如果……；那末……”的形式。即定理的条件部分用“如果”这个詞开始，而結论部分用“那末”这个詞开始。例如，定理“对頂角相等”，可以写成“如果两个角是对頂角，那末这两个角相等”。

7. 原定理、逆定理、否定理、逆否定理。

(1) 原定理和逆定理　比較下面的两个命題:

在一个三角形中，如果两条边相等，它們所对的角也相等。	在一个三角形中，如果两个角相等，它們所对的边也相等。

我們可以看出，在这两个命題中，一个命題的条件与結论分别是另一个命題的結论与条件。

如果一个命題的条件是另一个已知命題的結论（或者結论的一部分），而它的結论是已知命題的条件(或者条件的一部分)，那末，这个命題叫做已知命題的逆命題，已知命題叫做原命題。例如在上面所举的例子中，把一个命題作为原命題，另一个命題就是它的逆命題。

我們必須注意，从一个命題的正确性并不能断定它的逆命題一定也是正确的。例如，“如果两个角是对頂角，那末这两个角相等”这个命題是正确的，但它的逆命題，“如果两个角相等，那末这两个角是对頂角”就不正确。因为相等的两个角不一定就是对頂角。例如，我們作一个已知角的平分线，这条

平分线把这已知角分成两个較小的角，这两个角是相等的，但它們并不是对頂角。

如果一个定理的逆命题是正确的，这个逆命題就叫做已知定理的逆定理，已知定理叫做原定理。例如把定理“在一个三角形中如果两条边相等，它們所对的角也相等”作为原定理，它的逆命題“在一个三角形中如果两个角相等，它們所对的边也相等”因为也是正确的，所以就是它的逆定理，这时这两个定理互为逆定理。

根据以上所述我們要注意这方面的錯誤，就是一个定理的逆命題，它的正确性沒有经过证明，是不能作为定理应用的。

(2) 否定理　比較下面的两个命題:

如果一点在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这条线段两端的距离相等。	如果一点不在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这条线段两端的距离不等。

我們可以看出，在这两个命題中，右面的命題的条件和結论分别是左面命題的条件和結论的反面。

如果一个命題的条件和結论分别是另一个已知命題的条件和結论的反面，这个命題叫做原命題的否命題。例如：命題如果一点不在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这条线段两端的距离不等”和命題“如果一点不在一个角的平分线上，那末这点到这个角两边的距离不等”。就分别是定理“如果一点在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这条线段两端的距离相等”和定理“如果一点在一个角的平分线上，那末

这点到这个角两边的距离相等”的否命题。又如算术中的定理：“如果一个整数的各位数字的和能被 9 整除，那末这个整数也能被 9 整除”，它的否命题就是“如果一个整数的各位数字的和不能被 9 整除，那末这个整数也不能被 9 整除”。

这里必须注意到，根据原命题的正确性并不能断定它的否命题也是正确的。例如，“如果两个角是对頂角，那末这两个角相等”，这个命题是正确的；但它的否命题“如果两个角不是对頂角，那末这两个角不等”，就不正确。

如果一个定理的否命题是正确的，这个否命题就叫做原定理的否定理，这时这两个定理*互为否定理*。

（3）逆否定理　比較下面的两个命题：

如果一点在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这条线段两端的距离相等。	如果一点到一条线段两端的距离不等，那末这点不在这条线段的垂直平分线上。

我們可以看出，在这两个命题中，右面的命题的条件和結论分别是左面的命题的結论和条件的反面。

如果一个命题的条件和結论分别是另一个已知命题的結论和条件的反面，这个命题叫做原命题的逆否命题。例如命题“如果一点到一条线段两端的距离不等，那末这点不在这条线的垂直平分线上。”和命题“如果一点到一个角两边的距离不等，那末这点不在这个角的平分线上”。就分别是定理“如果一点在一条线段的垂直平分线上，那末这点到这线段两端的距离相等。”和定理“如果一点在一个角的平分线上，那末这点到这个角两边的距离相等”的逆否命题。

很明显的，一个命题的逆否命题就是它的逆命题的否命题，也就是它的否命题的逆命题。

在下面我們可以看到，如果一个命题能够成立，那末它的逆否命题也一定成立；换句话说，根据原命题的正确性就可以断定它的逆否命题的正确性。

一个定理的逆否命题，叫做这个定理的逆否定理，这时两个定理是互为逆否定理。

8. 四种命题間的关系　为了容易了解这个关系起见，我們簡单地用 A 来代表原命题的条件，用 B 来代表它的結论：

(1) 原命题：如果有 A，就有 B。

(2) 逆命题：如果有 B，就有 A。

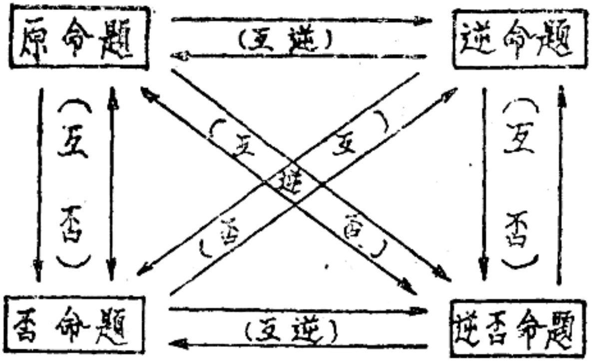
(3) 否命题：如果沒有 A，就沒有 B。

(4) 逆否命题：如果沒有 B，就沒有 A。

研究这些命题，很容易看出：其中 (1) 和 (4) 之間的关系正和 (2) 和 (3) 之間的关系一样，就是 (1) 和 (4) 可以互相推出，(2)和(3) 也可以互相推出。例如，从 (1) "如果有 A 就有 B"能够直接推出 (4) "如果沒有 B，就沒有 A" (因为如果有 A，根据 (1) 就应該有 B)；反过来，从 (4) "如果沒有 B，就沒有 A"，也能够直接推出 (1) "如果有 A，就有 B"(因为如果沒有 B，根据 (4) 就应該沒有 A。)同样的，从 (2) 能够直接推出 (3)，从 (3) 能够直接推出 (2)。

因此，要想断定这四个命题全部的正确性，并不需要把每一个命题都分别加以证明，只要证明 (1)、(4) 两个中的一个以及 (2)、(3) 两个中的一个就够了。

四种命题間，互逆、互否、互为逆否的关系，可用下面的图簡单地表示出来。



9. 簡单定理和复合定理

有些定理的条件只有一个，結論也只有一个，这样的定理叫做簡单定理。

但是有些定理，它們的条件虽然只有一个(或几个)，而它們的結論不止一个。例如定理“如果两条平行线和第三条直线相交，那末 (1) 同位角相等，(2) 內錯角相等，(3) 外錯角相等，(4) 同旁內角的和等于 $2d$，(5) 同旁外角的和等于 $2d$，”便是一个条件，五个結論。

象这样的定理，是由几个独立的条件和結論所組成的，便称为复合定理。

我們可以将每一个复合的定理，分成几个簡单的定理。例如上面那一个含有一个条件，五个結論的定理，便可以分成五个簡单的定理：

“如果两条平行线与第三条直线相交，那末同位角相等”；

“如果两条平行线与第三条直线相交，那末內錯角相等”；

“如果两条平行线与第三条直线相交，那末外錯角相等”；

“如果两条平行线与第三条直线相交，那末同旁內角的和等于 $2d$”；

“如果两条平行线与第三条直线相交，那末同旁外角的和等于 $2d$”。

10．性质定理和判定定理

我們为定理定一个名称，不但使讀者易于掌握，并且在以后引用該定理时比較方便。例如：定理“两条直线相交，所成的对頂角相等”，我們簡称它为“对頂角定理”。又如“n 条边的多边形的內角和等于 $(n-2)\cdot180°$”，我們簡称它为“多边形內角和定理”。

从以上两个定理看来，我們总是择取定理中主要研究事項的名称，来定定理的名称；但是有些定理对于同一主要事項所要研究的目的是不同的，因此作用也不相同。我們看下面两个定理：(1)“两条直线和第三条直线相交，如果同位角相等，这两条直线就平行。(2)“两条平行直线和第三条直线相交，同位角相等”。很明显，它們主要的研究事項都属于平行线問題，但是这两个定理的目的却不相同，定理(1)的目的是根据哪些条件可以判断直线具有平行的性质，这个定理起了判定直线是否平行的作用，我們看出直线平行是作为定理的結论。定理(2)的目的是研究具有平行性质的直线（結合其它条件）可以推求出一些什么性质。这个定理起了确定平行线性质的作用，我們看出直线平行是作为条件的。假使两个定理都簡称“平行线定理”，就混淆了它們之間这种不同的作用，因此，定理(1)我們称它为平行线判定定理；定理(2)我們称它为“平行线性质定理”。

复习题和练习题

1. 说出下列命题中的条件和結论:

(1) 两条直线相交成四个角,如果其中有一个角是直角,那末其余的三个角也都是直角。

(2) 平角都相等。

(3) 同圓或等圓的半径相等。

(4) 末位是 5 或 0 的整数, 都能被 5 整除。

2. 簡单的定理和复合的定理的区别是什么?

3. 一个已知定理的逆命題是什么?

4. 对于含有三个条件和两个結论的复合定理,可以作出多少逆命題?它們是否一定都正确?

对于下面的各定理, 作出和它相联系的所有的命題: 逆命題、否命題和逆否命題,并且检查它們是否正确。

5. 如果两个已知角相等,則它們的邻补角也相等。

6. 一个平角等于两个直角的和。

7. 对頂角相等。

8. 如果两个同旁內角的和等于 $2d$,則这两条直线平行。

9. 如果两个数都能被 5 整除, 則它們的和也能被 5 整除。

10. 如果已知数的最后两个数字所表示的数能被 25 整除,則这个已知数也能被25整除。

11. 如果一数能被 2 和 3 整除,則它也能被 6 整除。

Ⅱ 证題法

1. 定理的证明

证明一个定理(或证明題)，就是从定理(或证明題)的条件，根据已经讲过的定义、公理和定理，推导出定理(或证明題)的結论。定理(或证明題)中的条件是我們已經知道的，定理(或证明題)中的結论是我們需要证明的。例如，要证明原課本平行线判定定理2“两条直线和第三条直线相交，如果內錯角相等，这两条直线就平行”，就是从定理中的条件“两条直线和第三条直线相交并且內錯角相等”，設法推导出定理中的結论“这两条直线平行”。我們先作出图形，写出已知部分和求证部分：

已知 如图1.1，直线 l_1 和 l_2 和直线 l 相交，且 $\angle 3=\angle 5$。

求证 $l_1 \parallel l_2$.

然后从直线 l_1 和直线 l 相交出发，根据已经讲过的定义、公理、定理，推导出定理的結论 $l_1 \parallel l_2$，推导的过程如下：

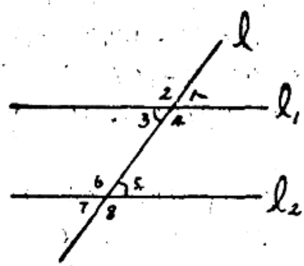


图 1.1

证明 直线 l 和直线 l_1 相交(題設)

则 $\angle 3$ 和 $\angle 1$ 是对頂角(定义)

$\therefore$ $\angle 3=\angle 1$ (对頂角定理)

又 $\angle 3=\angle 5$ (題設)

则 $\angle 5=\angle 1$ (等于第三个量的两个量相等)

$\therefore\quad l_1 \parallel l_2$（平行线判定定理1）

从上面的例子中可以看出，证明一个定理(或证明题)的步骤是：

1. 分清定理中的条件和結论，作出图形，根据图形写出已知和求证。

2. 从已知的条件，根据已经讲过的定义、公理、定理，逐步推导出求证的結论。

现在我們再举原課本一个三角形內的边角关系定理证明如下：

“一个三角形的大边所对的角比小边所对的角大”。

已知：图1.2，$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，

求证：$\angle ACB>\angle B$。

证明：在較大的边 AB 上截取线段 AD，使它等于較小的边 AC。連結 CD。

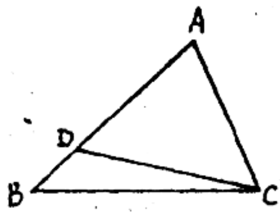


图 1.2

在 $\triangle ADC$ 中，$AD=AC$，(所作)

$\therefore\quad \angle ADC=\angle ACD$（等腰三角形底角相等）。

$\because\quad \angle ACB>\angle ACD$（全量大于它的一部分），

$\therefore\quad \angle ACB>\angle ADC$（等量代換）。

$\because\quad \angle ADC>\angle B$（三角形的外角大于不相邻的內角），

$\therefore\quad \angle ACB>\angle B$（第一量大于第二量，第二量大于第三量，第一量就大于第三量）。

上面两个定理都是用推理的方法来证明的。不过在原課本中也有用观察、实验等方法来说明某些定理的正确性而略去了证明的。主要的是为了我們初学几何容易理解的原故，当

然这些定理的正确性是无庸怀疑的，事实上許多定理也可以用推理的方法进行证明，例如上面“一个三角形內角关系定理1就是这样，学者可以和原課本对照。

对于上述两种方法，我們要有正确的认识：观察、实验的方法虽然是发现眞理和说明某些判断正确性的一种直观方法，但是它存在很多缺点，首先因观察、实验只能是部分的、有限次的，所以缺乏一般性，其次，由于用眼睛观察常会发生錯覺，加之实验时(包括实测、实繪)，使用工具度量也存有一定的誤差，因此往往缺乏精密性，何况有些問題反不如用推理方法证明来得方便。

用推理的方法进行证明，就沒有以上这些缺点，所以在以后的学习中沒有必要的話，总是采取推理方法的证明。因此我們一方面在证題时，不能随便用观察、实验的说明来代替证明，同时必須很好的提高这方面的能力。

2. 证題法

我們要想对于定理(或证明題)能够用推理的方法，进行严格的证明，必須掌握一些基本的证明方法。证題的方法，可以分作两大类，即直接证法和間接证法。

(1) 直接证法　直接证法中主要的证法是綜合法和分析法(或称解析法)。

(i) 綜合法

我們在初中学过了不少的定理和证明題，所采用的证法，总是由假設推出終結，就是按照題設的条件，应用公理、定义、定理逐步推理到題的求证为止。在全部推理过程中，是把前一步推理的終結，当做后一步推理中的假設，这样逐步順序的推论，終于推出題的求证是正确的。我們再用上面所举“平行线判定定理2”的证明，说明如下：