高中三角學

附　　表

王明夏
張玉壽　合編

勞動書店印行

編 輯 大 意

1. 本書依歷年教學經驗，大部係根據 Granville 所著之 Plane Trigonometry 加以改編，復參照 Wentworth-Smith 及 Loney 之平面三角而成。

2. 本書共分九章，附錄一章，習題 48 組，並附答案。

3. 三角學爲學習高等數學，理化，天文，工藝等諸科之基礎科學，本書兼顧及高中學生學習能力與實用。

4. 教授三角，於說明三角函數定義：$\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$，………時，初學者雖能依定義以計值，往往無明顯之概念，本書將三角函數之定義，特別由比之概念引出，可免學者知其然而不知其所以然之弊。

5. 問題之利用直角三角形解之者較爲普遍，本書於直角三角形解法就已知條件之所有情形分類例示，且選擇應用問題，以便學者用於實用。

6. 本書應用單位圓中函數之直線定義及餘角之關係，推出化任何角之函數爲銳角函數之通則，使教者省力而學者易於領悟與記憶。

7. 本書將解斜三角形問題列於對數之後，可免重復講授以節省時間。

8. 每節之後均多備例題，詳示解證方法，以供學者演算習題之準繩。

[illegible]表法根據高等代數之理論，學者或不易領悟，特設附錄，以供教者作伸縮之餘地。

10. 本書蒙吾師，現任國立北京師範學院數學系主任傅仲嘉先生訂正；又承學長韓耀洲，王卓亭二先生友誼協助；復承劉家驥先生對於印刷方面之指示，誌此鳴謝。

11. 近以物價高昂，印刷未臻完善，加以匆卒付印，其中予教者，學者不宜之處，勢所難免，尙望海內宏達多爲指敎是幸。

民國37年3月編者謹識

二 版 誌 言

本書第一版印行不久，卽完全售罄。原擬依最近教育部精簡綱目詳加修正後，再行出版；但本學期開學在卽，數學標準教本教育部尙未統籌編印，經諸友好敦促再版，以應需要。因時間倉促，暫時僅將航海及造表法部份删去；其餘應删部份附以星標※，以備參考。一俟將來續版，當再詳加修正。尙望採用諸同志對本書一切詳加批評指導。

一九五〇年八月編者

目　　　錄

第一章　量角法

第二章　銳角之三角函數，直角三角形之解法

第三章　任意角之三角函數

第四章 三角分析

第五章 三角恒等式，三角方程

第六章 三角形邊與角之函數之關係

第七章 對數

第八章 三角形之解法

第九章 函數之圖解

高中三角學

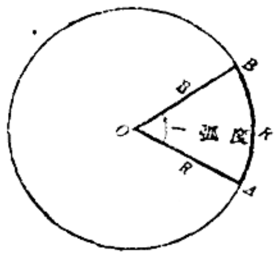
第一章

量角法

§1. 三角學. 三角學英文爲 Trigonometry (Trigon, "三角形", + metrein, "量") 即量三角形之意. 用於測量學, 機械學, 天文學等上, 以爲測量之基礎.

§2. 角之單位. 量角之單位常用者有二種: 註

1. 度量法或六十分法 (Sexagesimal System) 其單位角爲一度 (Degree) 即對弧爲圓周 $\frac{1}{360}$ 之圓心角. 一度分爲 60 分, 一分又分爲 60 秒. 符號 1°, $1'$, 及 $1''$ 用以表示一度, 一分及一秒. 此種單位於初等數學及工程上最常用之.



2. 弧量法 (Circular System). 其單位爲一弧度 (radian) 即與半徑等長之弧所對之圓心角. 如右圖, 設 AB 弧之長等於圓半徑 OA, 則

$$\angle AOB = 1 \text{ 弧度}.$$

此法已習用於高等數學上.

(註) 角之單位尚有一種百分法. 或稱法國制. 分一直角爲一百級 (grade), 一級分爲 100 分, 一分又分爲 100 秒. 用 1^g, $1'$, $1''$ 表示一級, 一分, 一秒. 但此法爲用未廣.

§3. 各單位間之關係. 設 R 爲圓之半徑，由幾何學知圓周之長等於 $2\pi R$；由弧量法之定義，圓周長等於 2π 倍半徑，又知繞圓心 O 之圓周角等於 $360°$，故

$$2\pi \text{ 弧度} = 360°$$

(1) $$\begin{cases} \underline{1 \text{ 弧度}} = \dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{180°}{3.1416} = \underline{57.2957°}, \\ \underline{1 \text{ 度}} \quad = \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{3.1416}{180} = \underline{0.01745 \text{ 弧度}}. \end{cases}$$

由此得法則如下：

欲化弧度爲度之法，即以 $57.2957°\left(=\dfrac{180}{\pi}\right)$ 乘弧度數.

欲化度爲弧度之法，即以 $0.01745\left(=\dfrac{\pi}{180}\right)$ 乘度數.

學者尙須熟記下列記法：

$360° = 2\pi$ 弧度　　　$60° = \dfrac{\pi}{3}$ 弧度.

$180° = \pi$ 弧度　　　$30° = \dfrac{\pi}{6}$ 弧度.

$90° = \dfrac{\pi}{2}$ 弧度　　　$15° = \dfrac{\pi}{12}$ 弧度.

$45° = \dfrac{\pi}{4}$ 弧度　　　$22.5° = \dfrac{\pi}{8}$ 弧度.

實用上習慣將"弧度"一名略而不書. 如云"一角 π 弧度"僅寫爲"一角 π".

設圓之半徑爲 R，$\overset{\frown}{AB}$ 所對圓心角之弧度數爲 θ，則由弧度之定義得

(2) $\theta=\dfrac{\widehat{AB}}{R}$ 或 $\widehat{AB}=R\theta$

例 1. 設圓之半徑爲 2 寸，問長 3.7 寸之弧所對之角，其弧度數若干？並化之爲度.

解. 用公式 (2)，則得

$$\theta=\frac{3.7}{2}=1.85. \qquad (答)$$

化此角爲度數，則由 (1) 得

$$1.85\times57.2957^\circ=105.997^\circ \qquad (答)$$

例 2. 長 64 寸之弧，其對角爲 2.5 弧度，問其圓半徑爲何？

解. 用公式 (2)，

$$2.5=\frac{64}{R}$$

$$\therefore \quad R=25.6\text{ 寸} \qquad (答)$$

例 3. 設定地球與太陽之距離爲 92500000 哩，太陽之視直徑爲 32′，求太陽之直徑.

解. 設 D 爲太陽直徑之哩數.

因太陽直徑之視角極小，則其直徑可視爲以觀察者之眼爲圓心所對之小圓弧. 又太陽對此圓心所張之圓心角爲 32′.

故由公式 (2) 得

$$\frac{D}{92500000}=32'\text{ 之弧度數}=\frac{8^\circ}{15}\text{ 之弧度數}=\frac{8}{15}\times\frac{\pi}{180}$$

$$=\frac{2\pi}{675} \qquad \text{取 } \pi=\frac{22}{7},$$

$$\therefore \quad D=\frac{185000000}{675}\pi\text{ 哩}=\frac{185000000}{675}\times\frac{22}{7}\text{ 哩}$$

$=862000$ 哩（近似）（答）

習 題 1.

化度爲弧度

1. 270°　2. 11.25°　3. 56.25°　4. 7.5°
5. 196.5°　6. 1440°　7. 200°　8. 3000°

化弧度爲度.

9. $1\frac{1}{2}\pi$　10. $1\frac{1}{3}\pi$　11. $1\frac{1}{6}\pi$　12. $1\frac{1}{4}\pi$.
13. $\frac{1}{24}\pi$　14. 3π.　15. 6π.　16. 10π.

求下列諸角之度數及弧度數.

17. 四直角之$\frac{3}{5}$.　18. 四直角之$\frac{5}{6}$.
19. 二直角之$\frac{2}{3}$.　20. 一直角之$\frac{3}{8}$.

21. 鐘之分針移動15分所作之角，其弧度數若干?

22. 一圓之半徑爲25尺，問$4\frac{1}{2}$弧度之圓心角所對之弧長若干?

23. 1.2弧度之圓心角，其對弧長9.6尺，求其圓半徑.

24. 設二圓弧等長，所對圓心角各爲60°及75°，試求二圓半徑之比.

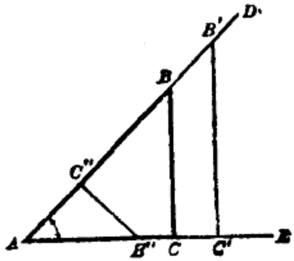
25. 一輪每秒旋轉10週. 若旋轉2弧度需時若干? 取$\pi=\frac{22}{7}$.

26. 脚踏車輪之直徑為28吋，當車輪旋轉一週時，其軸進行之距離若干? 取$\pi=\frac{22}{7}$.

第　二　章

銳角之三角函數，直角三角形之解法．

§4. 銳角之三角函數定義． 設$\angle EAD$爲一銳角，在



AD上取任意點B, B'，作AE之垂線BC, B'C'；又在AE上取任意點B''，作AD上之垂線B''C''．則構成一組相似三角形ACB, AC'B', AC''B''．此等相似三角形之對應邊成比例，即

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''};$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''};$$

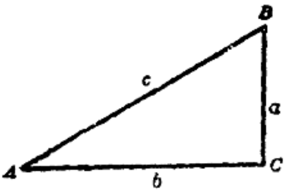
$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\frac{B''C''}{AC''};$$

同理諸反比$\frac{AB}{BC}$，$\frac{AB}{AC}$，$\frac{AC}{BC}$各有一組對應比值與之相等．

由此可知一角之邊任意延長，其所成直角三角形之邊之比不變；但當角變時，各邊之比亦隨之而變，因之上列諸比爲角A之函數(Function)．註

註．於代數學及幾何學上已知：若一量之值，依一變量之值而定，則此量謂之該變量之函數．例如 x^2-7x-8 爲x之函數，因其值依吾人所設x之值而定也．

於直角三角形 ABC 內，以大字母 A,B,C 表其三角，以小字母 a,b,c 表其相當對邊．此後除聲明外，凡直角三角形，皆以 c 表弦，以 C 表直角．



諸比 $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$ 及 $\frac{c}{a}$ 定名如下；

$\frac{a}{c}$ 名之為"A 之正弦"(sine)，記之為 sinA；

$\frac{b}{c}$ 名之為"A 之餘弦"(cosine)，記之為 cosA；

$\frac{a}{b}$ 名之為"A 之正切"(tangent)，記之為 tanA；

$\frac{b}{a}$ 名之為"A 之餘切"(cotangent)，記之為 cotA；

$\frac{c}{b}$ 名之為"A 之正割"(secant)，記之為 secA；

$\frac{c}{a}$ 名之為"A 之餘割"(cosecant)，記之為 cscA；

故 A 角之三角函數之定義可規定之如下：

(3) $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{弦}}$；　(6) $\csc A=\frac{c}{a}=\frac{\text{弦}}{\text{對邊}}$；

(4) $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{弦}}$；　(7) $\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\text{弦}}{\text{鄰邊}}$；

(5) $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$；　(8) $\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$.

此諸函數乃研究三角學之基本要件，學者必於上列六函數澈底了解；面對圖形，必於諸比何謂 secA，cotA，sinA 等等，倒

讀諸函數之順序時均可熟記爲止.

上列左方之三個函數. 乃右方相當函數之倒數, 學者如能注意此點, 亦甚易記憶. 以式表其關係於下:

$$\sin A=\frac{1}{\csc A}\qquad \csc A=\frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}\qquad \sec A=\frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}\qquad \cot A=\frac{1}{\tan A}$$

※ 此外尚有二函數, 但用時甚少, 其定義如下:

$\operatorname{vers}A=1-\cos A$, 讀作"A 之正矢"(versed sine);

$\operatorname{covers}A=1-\sin A$, 讀作"A 之餘矢"(coversed sine).

§5. 餘角之函數. 於直角三角形 ABC 中 因 $A+B=90^\circ$, A, B 互爲餘角. 設用定義(3)至(8)於銳角 B, 則

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

以之與 A 角之函數相比較, 可知

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B;$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$

$$\tan A=\cot B;\qquad \cot A=\tan B;$$

正弦與餘弦; 正切與餘切; 正割與餘割; 互稱爲餘函數(co-function). 故得一定理如下:

定理　一銳角之函數, 等於其餘角之餘函數.

例 1. 已知 $a=3$，$b=4$，計算直角三角形內 A 角之函數。

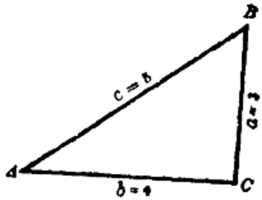
解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

用 (3) 至 (8) 各定義。

$\sin A=\dfrac{3}{5}$;　$\csc A=\dfrac{5}{3}$;

$\cos A=\dfrac{4}{5}$;　$\sec A=\dfrac{5}{4}$;

$\tan A=\dfrac{3}{4}$;　$\cot A=\dfrac{4}{3}$.



更求 B 角之各函數而比較其得數。

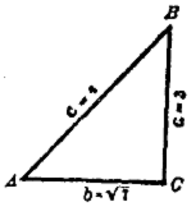
例 2. 已知 $a=3$，$c=4$，計算直角三角形內 B 角之函數。

解. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$;　$\csc B=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$;

$\cos B=\dfrac{3}{4}$;　$\sec B=\dfrac{4}{3}$;

$\tan B=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$;　$\cot B=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

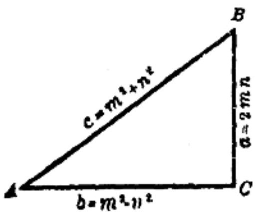


更求 A 角之各函數而比較其得數。

例 3. 在直角三角形內 $a=2mn$，$b=m^2-n^2$，計算 A 角之各函數。

解. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2$



$\sin A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$;　$\csc A=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$;

$\cos A=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$;　$\sec A=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

$\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$;　$\cot A=\dfrac{m^2-n^2}{2mn}$.

例 4.　在一直角三角形內，已知 $\sin A=\frac{4}{5}$，及 $a=80$；求 c。

解．用公式(3) $\sin A=\frac{a}{c}$．

以 sinA 及 a 之數值代入，得

$$\frac{4}{5}=\frac{80}{c};$$

解之　　$c=100$　　(答)

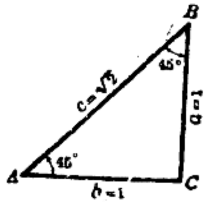
§6. 45°，30°，60°，之函數．　此數角於三角習題中爲最常用者．故必須求其三角函數之值而熟記之．

1．45° 之函數　作等腰直角三角形 ACB 則 $A=B=45°$，且 $a=b$．又因 $a^2+b^2=c^2$，設 $a=b=1$ 則 $c=\sqrt{2}$，故

$$\sin 45°=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\tan 45°=\cot 45°=1.$$

$$\sec 45°=\csc 45°=\sqrt{2}.$$



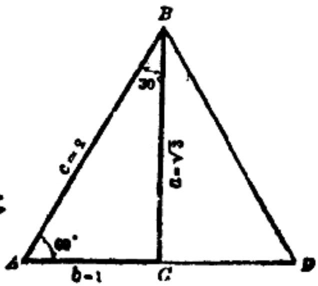
2．30° 及 60° 之函數　作一等邊三角形 ADB，自 B 作 BC ⊥AD，於直角三角形 ABC 內知 $A=60°$ 及 $B=30°$．又 $b=\frac{1}{2}c$，設 $b=1$，則 $c=2$，$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$．故

$$\sin 30°=\cos 60°=\frac{b}{c}=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30°=\sin 60°=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\tan 30°=\cot 60°=\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cot 30°=\tan 60°=\frac{a}{b}=\sqrt{3};$$



$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = \frac{c}{b} = 2.$$

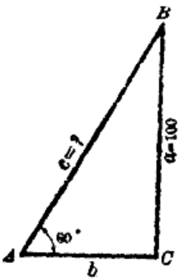
玆將此重要結果列表如下：註

角	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2} = .5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = .71^+$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86^+$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2} = .86^+$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = .71^+$	$\frac{1}{2} = .5$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .57^+$	1	$\sqrt{3} = 1.73^+$

其他餘割，正割，及餘切各爲正弦，餘弦及正切之倒數，故記憶不難.

例. 已知直角三角形之 $A = 60^\circ$. $a = 100$; 求 c.

解. 因 A 已知，則 A 之任一函數可知，又 a 爲已知，可用下之公式求 c.



$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \text{公式 (3)}$$

自上表 $\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$a = 100$，代入上式 得

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100}{c}.$$

化簡分數求 c，得

註. 爲便於記憶，可視第一(或 sin)列，各爲 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 以 2 除之；其第二(或 cos)列，各數與第一列順序相反. 其末(或 tan)列，各數爲以第二列各數除第一列各數而得者.