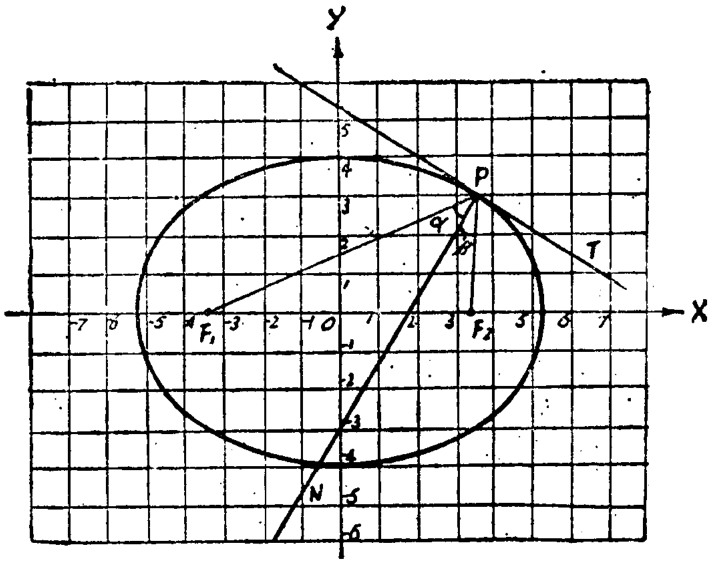

平面解析几何
题 解

沈阳市教育学院数学系几何教研室编

一九七九年四月

前　言

根据高考大纲的要求，考虑到目前学生练习题的类型单一，内容过简。为此，特选出各种类型的部份习题，并做解答。

本习题集由几何教研室刘全显、于庆泉、陈景魁、刘炳家和任彦成诸同志选编，最后由任彦成同志总其成，插图由刘炳家和张有利同志绘制。参与校对工作的还有刘丁、张同基、陈显文和李瑞年等同志。定稿后，又承沈河区教师学校吴玉斌同志协助校订，在此表示感谢。

但由于时间仓促，更加编选人员水平不高，每题的解法并非最优，谬误一定存在，诚恳地希望同志们指正。

沈阳市教育学院数学系

一九七九年四月

目　　录

(一)

直　　　线

1． $\triangle ABC$的三个顶点为$A(0,0)$、$B(4,8)$、$C(6,-4)$，已知M点内分AB为$3:1$，P是AC边上的一点，且$\triangle APM$的面积为$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{2}$，求P分AC的比。

解：设$M(x_M,y_M)$，运用定比分点坐标公式，得出$x_M=3$，$y_M=6$。

故　$M(3,6)$。

而　$|AB|=\sqrt{80}$，

$|AM|=\sqrt{45}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|h=\frac{1}{2}\sqrt{80}\,h$，

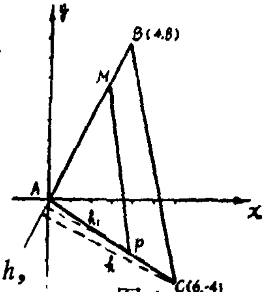

图 1

$S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}|AM|h_1=\frac{1}{2}\sqrt{45}\,h_1$。

其中h,h_1是对应三角形的高。

$\because \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMP}}=\frac{2}{1}=2$，

$\therefore \quad \frac{\sqrt{80}\,h}{\sqrt{45}\,h_1}=2$，

即　$\frac{h}{h_1}=\frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{80}}=\frac{3}{2}$，

于是　$\frac{h-h_1}{h_1}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$，

即 $\frac{h_1}{h-h_1}=\frac{2}{1}$,

故 $AP:PC=2:1$。

2. 等腰三角形底边所在的直线方程是 $x+y-1=0$，腰所在的直线方程是 $x-2y-2=0$，点 $(-2, 0)$ 在另一腰上，求此腰的方程。

解：设所求腰的方程的斜率为 k。

根据题意 $\angle 1=\angle 2$,

而 $\operatorname{tg}\angle 1=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}$

$=3$,

故 $\operatorname{tg}\angle 2=\dfrac{-1-k}{1-k}=3$,

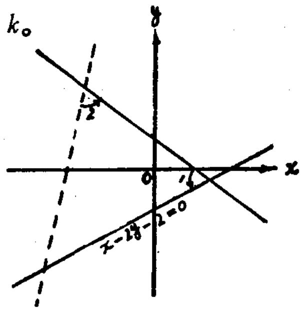

图 2

即 $-1-k=3-3k$，$2k=4$,

$\therefore$ $k=2$。

于是 $y-0=2(x+2)$,

即 $2x-y+4=0$，为所求的方程。

3. 过点 $P(0,1)$ 作直线，使它包含在 $x-3y+10=0$，和 $2x+y-8=0$ 间的线段被 P 点平分。

解：设过点 P $(0, 1)$ 的直线方程为 $y=kx+1$，求出该直线与已知直线 $x-3y+10=0$ 及直线 $2x+y-8=0$ 的交点，就是求出方程组

$$\begin{cases} y=kx+1 \\ x-3y+10=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y=kx+1 \\ 2x+y-8=0 \end{cases}$$ 的解。

解得 $x_1=\dfrac{7}{3k-1}$，$x_2=\dfrac{7}{2+k}$。

由中点坐标公式 $0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 解得 $k=-\dfrac{1}{4}$。

故所求的直线方程为

$$y=-\frac{1}{4}x+1。$$

4. 过点（1，1）的直线与 x 轴和 y 轴分别交于$(a,0)$和（0，b）点，试证 $a+b=ab$。

证明：1. ∵点(1，1)，$(a,0)$，$(0,b)$ 三点都在同一直线上，故

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $ab-b-a=0$，

故 $a+b=ab$。

证明：2.

由设可得该直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1。$$

又点（1、1）在此直线上，故有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1,$$

于是 $a+b=ab$。（证毕）

5. 设给出了三角形两边的方程$x+y-1=0$，$y+1=0$及第三条边中点（$-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}$），试求第三条边的方程。

解：如图设B点横标为 x_1，

则纵标为$1-x_1$。

设C点的坐标$(x_2,-1)$，

则有 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-x_1-1}{2}$

∴ $x_1=-1$

故 B点坐标（-1、2）。

∴ $BC:\dfrac{y-2}{x+1}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{-1+\frac{3}{2}}$，

即 $3x-y+5=0$。

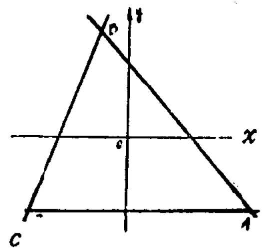

图 3

6. 直线l过点（-2，2），且与两个坐标轴围成的三角形面积是1，试求l的方程。

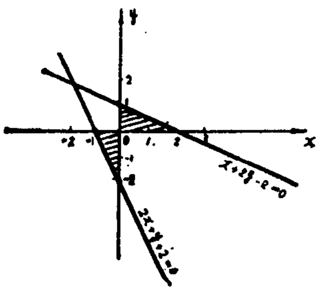

图 4

解：设l的方程为

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，由于 l 过点

$(-2,2)$,所以有 $2a-2b=ab$。

又由 $|ab|=2$ 得出 $a-b=\pm1$，

舍去 $\begin{cases} ab=-2 \\ a-b=-1 \end{cases}$

将 $b=a-1$ 代入 $ab=2$ 中，

得 $a^2-a-2=0$，$(a-2)(a+1)=0$，

∴ $a_1=2$，$a_2=-1$，

于是 $\begin{cases} a_1=2 & a_2=-1 \\ b_1=1 & b_2=-2 \end{cases}$，

从而 l 的方程为

$x+2y-2=0$,

及 $2x+y+2=0$。

7. 已知两点 $A(-1, 4)$，$B(3, -1)$，在直线 $l: x+y+2=0$ 上找一点 M，使 M 到 A，B 两点距离之和最短，试求点 M 的坐标，并证明为何最短。

解：如图过点 $B(3, -1)$ 垂直于直线 $x+y+2=0$ 的直线方程为 $x-y-4=0$。

解方程组 $\begin{cases} x-y-4=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$

得出 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 即 $D(1, -3)$，

再由中点坐标公式得出 $B'(-1, -5)$，过点 $A(-1, 4)$ 和 $B'(-1, -5)$ 的直线 $x=-1$ 和 $x+y+2=0$ 的交点为 $M(-1, -1)$，

则 $M(-1, -1)$ 即为所求。

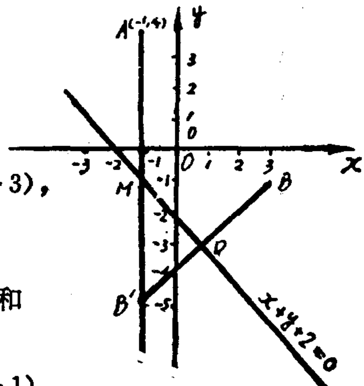

图 5

在直线 $x+y+2=0$ 上任取点 M'，连 AM'，$B'M'$，

则 $AM'+M'B'>AM+MB'$ 而 $AM+MB'=AM+MB$

$AM'+M'B'=AM'+M'B$，

故 $AM'+M'B>AM+MB$。

8. 设点 $A(1,1)$ 到 B 点的距离是 5，AB 的中点的横坐标为 3，求点 B 的坐标。

解 设 $B(x_0, y_0)$，由中点坐标公式得 $x_B=5$，

故 $B(5, y_B)$。再由两点间距离公式得

$y_B^2-2y_B-8=0$，

$(y_B-4)(y_B+2)=0$,

$y_{B1}=4$, $y_{B2}=-2$,

$\therefore$ $B(5,4)$, $B(5,-2)$。

9. 已知$x-y+\sqrt{2}=0$, $x-y+c_2=0$, $x-y+c_3=0$, ……, $x-y+c_n=0$, ($\sqrt{2}<c_2<c_3\cdots\cdots<c_n$), 这$n$条直线中的相邻两条间的距离顺次为2、3、4、5、…、n,

1)求c_n

2)求$x-y+c_n=0$与$x=0$, $y=0$围成的图形的面积;

3)试证$x-y+c_{n-1}=0$, $x-y+c_n=0$与$x=0$, $y=0$, 围成的图形的面积之差等于n^3。

解:1)所给的各平行线在原点同侧,且斜率为1,原点(0, 0)到$x-y+c_n=0$的距离为,

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

故 $$\frac{|c_n|}{\sqrt{2}}=\frac{n(n+1)}{2},$$

又 $c_n>\sqrt{2}$,

故 $$c_n=\frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}n(n+1).$$

2)$x-y+c_n=0$在x轴,y轴上的截距分别为$-c_n$与c_n,故所求的面积为

$$S_n=\frac{1}{2}|-c_n|c_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3)设所求的图形面积之差为$\triangle S_n$,

则 $$\triangle S_n=S_n-S_{n-1}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=$$

$$=\frac{4n^3}{4}=n^3$$

10. 一个直角三角形 ABC 的两条直角边 AB、AC 分别为 a 和 b，若直角顶为其内接矩形之顶点，

试用解析法求这内接矩形的最大面积。

解：如图建立坐标系，有 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(0,b)$。

BC 所在直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

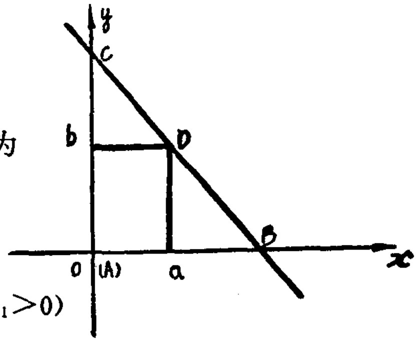

图 6

设 BC 的内接矩形的顶点为 $D(x_1,y_1)$ ，$(x_1>0,y_1>0)$

则有 $$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}=1$$

即 $$y_1=\frac{b}{a}(a-x_1)\text{。}$$

设矩形面积为 S，

于是 $$S=x_1y_1=x_1\cdot\frac{b(a-x_1)}{a}$$

$$=\frac{b}{a}(ax_1-x_1^2)$$

$$=-\frac{b}{a}(x_1^2-ax_1)$$

$$=-\frac{b}{a}(x_1-\frac{a}{2})^2+\frac{1}{4}ab,$$

故 $$S_{max}=\frac{1}{4}ab\text{。}$$

11．直线 l 与两坐标轴围成三角形的面积为 2， 且在两轴上的截距之差为 3，求 l 的方程

解：设所求直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

得方程组 $\begin{cases}\frac{1}{2}|a||b|=2\\ |a-b|=3,\end{cases}$

解之，得出 $\begin{cases}a=-1\\ b=-4\end{cases}$ $\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$ $\begin{cases}a=-4\\ b=-1\end{cases}$

于是得出 l 的方程为

$$4x+y+4=0,$$

$$x+4y-4=0,$$

$$4x+y-4=0,$$

$$x+4y+4=0.$$

12．设直线 $y=mx-7$，分线段 $M_1(3,2)$ $M_2(1,2)$ 的两段之比为 $\frac{3}{2}$，求 m 值。

解：设 $y=mx-7$，与 M_1M_2 的交点为 $P(x,y)$，由设 M_1P：$PM_2=3:2$，知 $\lambda=\frac{3}{2}$，

得　$P(\frac{9}{5},\ 2)$。

因 P 点在 $y=mx-7$ 上，

将 P 点坐标代入，即得出，$m=5$。

13．求平行于两平行线 $3x+4y=10$，$3x+4y=55$，且分

二平行线间的距离为2∶3的直线方程。

解：设 $l_1: 3x+4y=10$

$l_2: 3x+4y=35$

l_1, l_2 在 y 轴上的截距分别为$\frac{5}{2}$和$\frac{35}{4}$，

由平行线截得比例线段定理，得

$$\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{35}{4}}{1+\frac{2}{3}}=5,$$

$$\frac{\frac{35}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{25}{4}$$

故知所求直线方程为

$$y=-\frac{3}{4}x+5, \text{ 即} 3x+4y-20=0,$$

及 $$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}, \text{ 即} 3x+4y-25=0$$

14．若直线 $y=(m+2)x-n+5$，满足下述条件，试求 m 和 n 的值：

1）过原点；

2）平行于 x 轴；

3）与 $y=7x+15$平行；

4）与 $y=7x+15$相交；

5）与 $y=(3-m)x+6n^2$重合；

6）过点(1，2)且在 y 轴上截距为 P。

解：1）过原点：

由　$-n+5=0$ 得$n=5$，m为任实数。

2）平行于 x 轴：

由　$m+2=0$，得 $m=-2$，n为任实数。

3）与 $y=7x+15$平行：

由　$\dfrac{m+2}{7}=1$，$\dfrac{-n+5}{15}\neq 1$，

得出　$m=5$，$n\neq -10$。

4）与 $y=7x+15$相交：

由　$\dfrac{m+2}{7}\neq 1$，得$m\neq 5$，n为任实数。

5）与 $y=(3-m)x+6n^2$重合：

由　$\dfrac{3-m}{m+2}=1$，$\dfrac{6n^2}{-n+5}=1$，

得出　$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{5}{6}$，或$n=-1$。

6）过点（1，2）且在 y 轴上的截距为 P，

$m=-P$，$n=5-P$。

15．用解析法证明等腰三角形底边一点到两腰距离的和等于腰上的高。

证明：以等腰三角形底边所在直线为 x 轴底边中点为原点 O，并设 $A(0,b)$，$c(a,0)$，则 $B(-a,0)$

$P(x,y)$是底边上任意一点，

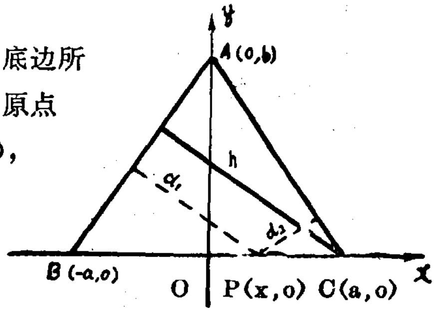

图 7

∵　直线 AB 的方

程　$-bx+ay-ab=0$,

直线 AC 的方程　$bx+ay-ab=0$，设 d_1, d_2 表示 P 到 AB, AC 的距离。

$\therefore\quad d_1=-\dfrac{-bx_1-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$（$P$ 点和原点在 AB 同旁），

$d_2=-\dfrac{bx_1-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$（$P$ 点和原点在 AB 同旁），

$\therefore\quad d_1+d_2=\dfrac{bx_1+ab-bx_1+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

又　$h=-\dfrac{-ab-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

（c点和原点在AB同旁），

$\therefore\quad d_1+d_2=h$,

16．已知$\square ABCD$ 的顶点 $A(4,8)$，$B(0,4)$，$D(8,0)$ 求 1）$\square ABCD$ 对角线交点的坐标；

2）过原点 O 的直线将$\square ABCD$ 分成面积相等的二部分的直线方程；

3）$\triangle ABD$ 的重心的坐标

解：1）设对角线交点为 $E(x_E, y_E)$，

则　$x_E=\dfrac{0+8}{2}=4$,

$y_E=\dfrac{4+0}{2}=2$.

即　$E(4,\ 2)$，

2）过 $O(0,\ 0)$，$E(4,\ 2)$的直线即为所求，其方程为　$y=\dfrac{1}{2}x$

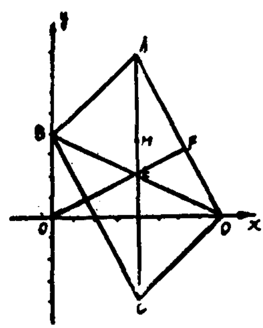

图 8

3）设$\triangle ABD$的重心为$M(x_M,y_M)$，其坐标为

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_D}{3}=4$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B+y_D}{3}=4$$

即　$M(4,\ 4)$。

17．三条直线$x=0$、$x=m$、$x=m+n$上各有一点A，B，C，如果这三点共线，求它们的纵坐标y_1,y_2,y_3之间的关系。

解：

∵　A，B，C分别在$x=0$、$x=m$、$x=m+n$上，

∴　$A(0,y_1)$，$B(m,y_2)$，$C(m+n,y_3)$。

∵　A,B,C三点在一条直线上，

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ m & y_2 & 1 \\ m+n & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

∴　$(m+n)y_1+my_3-(m+n)y_2-my_1=0$，

∴　y_1,y_2,y_3之间的关系为

$$y_2=\frac{ny_1+my_3}{m+n}.$$

18．求证直线$Ax+By+C=0$，分$P_1(x_1.y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$两点连线所成的比是$-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

证明：设直线$Ax+By+C=0$和线段P_1P_2的交点（内交或外交）是$M(x,y)$，

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

$\because$ $M(x, y)$ 在直线 $Ax + By + C = 0$ 上，

$\therefore$ $\dfrac{Ax_1 + A\lambda x_2}{1 + \lambda} + \dfrac{By_1 + B\lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0$

则 $Ax_1 + A\lambda x_2 + By_1 + B\lambda y_2 + C + \lambda C = 0$，

即 $\lambda(Ax_2 + By_2 + C) = -(Ax_1 + By_1 + C)$，

故 $\lambda = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$。

即 直线 $Ax + By + C = 0$

分线段P_1P_2的比为 $-\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$。

19． 设 R 为平面上以 $A(4,1)$，$B(-1,-6)$，$C(-3,2)$ 三点为顶点的三角形区域（包括边界和内部），试求点(x,y)在 R 上变动时，函数 $4x-3y$ 的极大值和极小值。须说明你的论断。

解：设$\lambda = 4x - 3y$，

令 λ为定值，$\lambda = 4x - 3y$ 为一条直线，

当 λ 变动时，$\lambda = 4x - 3y$ 为一组平行直线系，就其中一条直线而言，λ为定值。

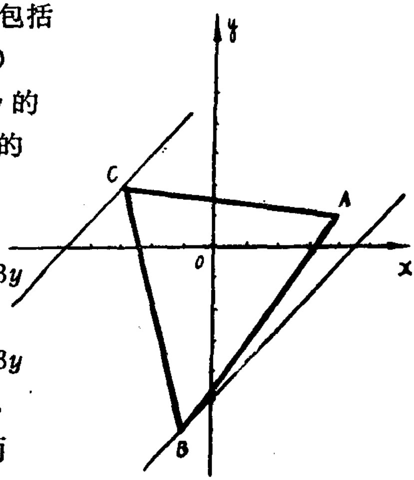

图 9

1）当 $\lambda=4x-3y$ 经过 C 点时，

$\lambda=-18$，这时直线 $\lambda=4x-3y$ 与 x 轴交点为 $(-4.5, 0)$。

2）当 $\lambda=4x-3y$ 经过 B 点时，

$\lambda=14$，此时直线同 x 轴交点为 $(3.5、0)$。

3）当 $\lambda=4x-3y$ 经过 A 点时，

$\lambda=13$，此时直线同 x 轴交点为 $(3.25, 0)$，由直线的方向可知 C，B 两点为 R 区域的边缘点。直线 $\lambda=4x-3y$ 和 x 轴交于 $(x', 0)$ 即 $\left(\frac{\lambda}{4}, o\right)$，而 $\lambda=4x'$ 和 x' 成正比。由于

$$-4.5\leqslant x\leqslant 3.5,$$

$$-18\leqslant\lambda\leqslant 14.$$

故　极大值14，极小值 -18。

20． $x+y-8=0$，$x-2y-5=0$，$3x-y=0$，是一个三角形的三条边所在直线方程，求：

① 经过三角形各顶点并且与对边平行的直线方程；

② 三边上的高所在的直线方程；

③ 三边上的中线所在的直线方程。

（解题时不得求三角形顶点的坐标）

解： 令三角形为 ABC，

$AB: x+y-8=0$，

$BC: x-2y-5=0$，

$CA: 3x-y=0$，

① 设过 A 点的直线方程为

$x+y-8+\lambda(3x-y)=0$，

则　$(1+3\lambda)x+(1-\lambda)y-8=0$，　　　　（1）